

第五章 线性反馈系统的时间域综合

重点内容:

- 1、控制问题类型, 状态反馈及性质
- 2、多变量系统的极点配置
- 3、解耦控制
- 4、状态反馈实现镇定控制
- 5、状态观测器设计 (全维、降维)
- 6、抗干扰跟踪控制器设计 (选修)

系统的综合就是对于给定控制对象和指定的期望运动行为，确定控制作用。通常采用反馈形式。

综合问题涉及3个元素：受控对象、性能指标和控制输入。

(1) 受控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (5-1)$$

$$y = Cx$$

其中， x 为 n 维状态， u 为 p 维输入， y 维 q 维输出。

(2) 性能指标 可以有多种形式，大体上可以分为优化型性能指标和非优化型性能指标。非优化型性能指标指某些特征参量，优化型性能指标是指系统的一个性能指标函数取为极小值或极大值。

非优化型指标：不等式型的指标， \geq 即可。

优化型指标：一类极值型指标，所有值中取极值。

(3) 控制算法

状态反馈

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) \quad (5-2)$$

输出反馈 $u(t) = -Fy(t) + v(t)$

(5-3)

常见综合问题类型:

(1) **镇定问题**, 控制器设计目标是使反馈闭环系统保证渐近稳定。

(2) **极点配置问题**, 以一组期望闭环系统特征值作为性能指标, 综合目标是闭环系统特征值置于复平面上期望位置。

(3) **解耦问题**, 将 m 个输入 m 个输出系统化为 m 个单输入单输出系统, 即使导出的反馈控制系统实现一个输出仅由一个输入所控制。

(4) **跟踪问题**, 外部存在干扰时输出无静差地跟踪参考信号输入。

实现中的问题:

(1) 如果状态变量不能直接测量, 则需要由控制输入 u 和输出 y 重构状态, 这称为观测器设计问题。

(2) 系统模型的不准确和参数摄动问题

模型不准确和参数摄动, 按理想模型得到的控制器组成的控制系统中, 是否产生达不到期望的性能指标或不稳定的问题。

鲁棒性问题：参数的不精确误差或摄动出现在模型参数的一个邻域内时，系统仍能稳定地运行或保持期望的性能值，则称鲁棒性控制。

(3) 对外部扰动的影响的抑制问题 扰动抑制问题。

综合问题基本思路：

1. **建立可综合条件** 根据给定的受控系统和指标

2. **确定满足要求的控制律**

5.1 反馈结构及对系统特性的影响

1. 反馈结构

记系统 $S = (A, B, C)$ ，其状态 x ，输入 u ，输出 y 的维数分别为 n, p, q 。设 Kx 作为反馈量构成闭环，反馈到系统的输入端，这种反馈形式称为对 S 系统的状态反馈。

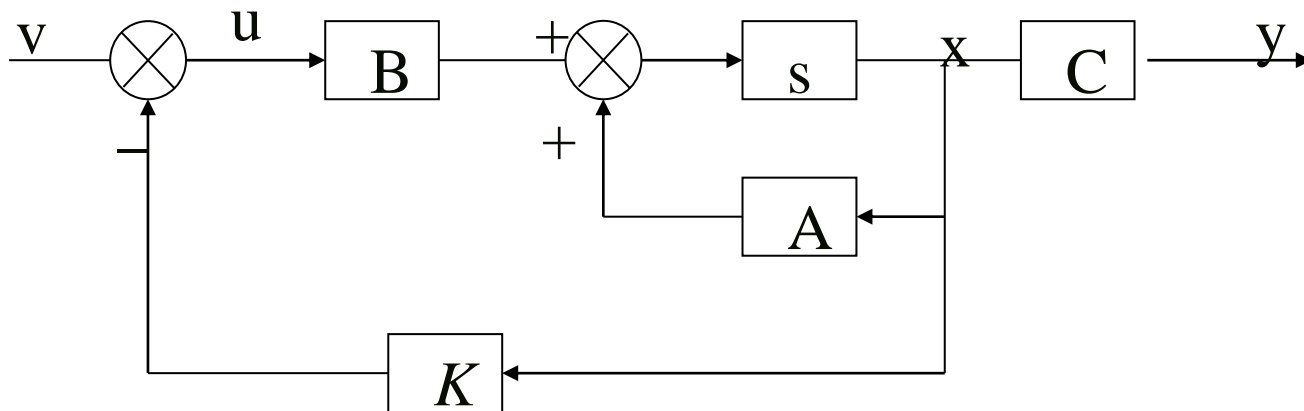


图5.1 状态反馈

控制输入为

$$u = -kx + v \quad (5-4)$$

v 为参考输入, 将 (5-4) 代入 (5-1) 中得反馈系统

$$\sum_{xk} : \dot{x} = (A - Bk)x + Bv, \quad x(0) = x_0, t \geq 0 \quad (5-5)$$

$$y = Cx$$

系统综合的实质就是通过引入合适的状态反馈矩阵 k , 使闭环系统 \sum_{xk} 特征值位于复平面上期望位置。

开环系统传递函数矩阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

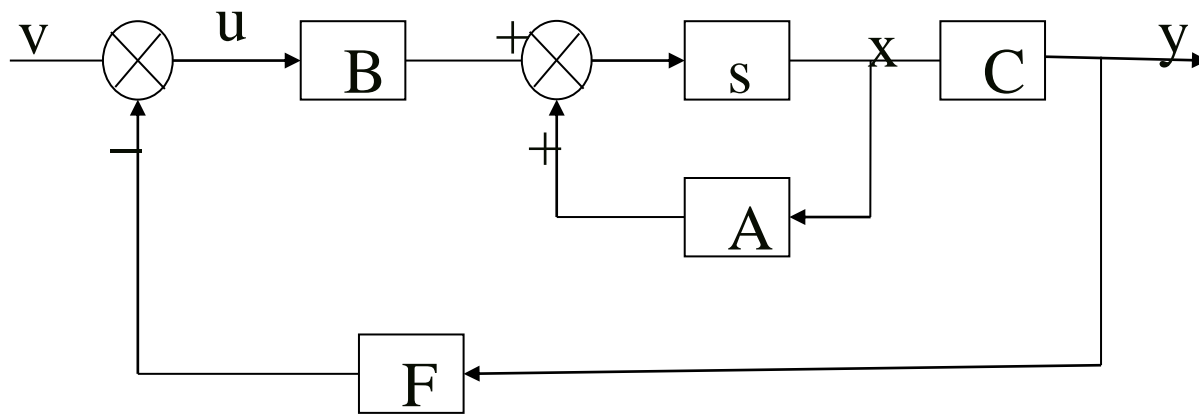
极点就等于 A 的特征值.

闭环系统传递函数矩阵 $G(s) = C(sI - A + Bk)^{-1} B$

输出反馈的构成形式: $u(t) = -Fy(t) + v(t)$

闭环系统为: $\sum_{yF} : \dot{x} = (A - BFC)x + Bv, \quad x(0) = x_0, t \geq 0$
 $y = Cx$

传递函数矩阵为: $G_y(s) = C(sI - A + BFC)^{-1} B$



2. 反馈对系统特性的影响

定理5.1 (状态反馈系统能控性) 对线性时不变系统, 状态反馈保持能控性。

证明：受控系统S和状态反馈系统 Σ_{xk} ，其能控性判别阵为

$$W_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

$$W_{ck} = [B \quad (A-Bk)B \quad \cdots \quad (A-Bk)^{n-1}B]$$

因为， $(A-Bk)B$ 每个列均可表为 $[B, AB]$ 各列的线性组合，
 $(A-Bk)^2 B$ 每列可表为 $[B, AB, A^2 B]$ 各列的线性组合，因此

$$\text{rank } W_{ck} \leq \text{rank } W_c$$

另一方面，把受控系统S可看成是 Σ_{xk} 的状态反馈系统，即有

$$\dot{x} = Ax + Bu = [(A-Bk) + Bk]x + Bu$$

可得出 $\text{rank } W_c \leq \text{rank } W_{ck}$

即有 $\text{rank } W_c = \text{rank } W_{ck}$

证毕。

定理5.2 对线性时不变系统，状态反馈不一定保持能观性，但输出反馈保持能观性。

定理5.3 对线性时不变系统，状态反馈和输出反馈都能影响闭环系统稳定性。

例5.1 设能控能观系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2] x$$

引入状态反馈 $u = -[3 \quad 1]x + v$

则闭环系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = [1 \quad 2] x$$

闭环系统能控但不能观。

5.2 多变量系统的极点配置

5.2.1 极点配置问题提法及任意配置极点的条件

考虑线性时不变受控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5-6)$$

$$y = Cx$$

其中， x 为 n 维数状态， u 为 p 维输入。开环系统传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

任意指定 n 个期望闭环极点： $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$

它们或为实数，或为共轭复数。取状态反馈

$$u = -kx + v$$

闭环系统极点满足关系式

$$\lambda_i(A - Bk) = \lambda_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

期望闭环极点组

(1)期望闭环极点组的性能指标属性

二重性 { 理论计算：期望闭环极点组
控制工程：直观性能指标

(2)控制工程中基本类型的性能指标

{ 时间域： $\delta, t_s, t_r, t_d, t_p$
频率域： $M_r, \omega_r, \omega_{cc}$ 可以相互转化

(3)基本类型性能指标和期望闭环极点组的主导极点对的关系

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

(4)期望闭环极点组的确定

工程型的性能指标 $\Rightarrow s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

n-2个期望闭环极点 $R_e(s_i) = (4\sim 6)R_e(s_1), \quad i=3,4,\dots,n$

定理5.3 (极点配置定理) 对多输入 n 维连续时间线性时不变系统, 系统通过状态反馈任意配置全部 n 个极点的充分必要条件为 $\{A, B\}$ 完全能控。

证: 我们在这里证明单输入单输出系统情况。必要性。采用反证法, 反设 (A, b) 不完全能控, 则通过线性非奇异变换进行结构分解导出:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_c \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} b_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

对任一 $1 \times n$ 状态反馈矩阵 $k = [k_1, k_2]$, 有

$$\begin{aligned} \lambda_i(A - bk) &= \lambda_i(\bar{A} - \bar{b}kP^{-1}) \\ &= \lambda_i \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c k_1 P^{-1} & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c k_1 P^{-1} \\ 0 & \bar{A}_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda(A - bk) = \{ \lambda(\bar{A}_c - \bar{b}_c k_1), \lambda(\bar{A}_c) \}$$

上式表明, 状态反馈不能改变系统不能控部分特征值, 即不能任意配置全部极点, 这于已知条件矛盾。因此, 系统 (A, b) 完全能控。

充分性。 已知 (A, b) 完全能控，欲证可任意配置。采用构造性方法。对此，表

$$\det(sI - A) = a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

并由 (A, b) 完全能控，可通过相应采用线性非奇异变换，将 (A, b) 化为能控规范形(定理3.6):

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

再由任意指定的 n 个期望闭环极点 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$ ，可以导出:

$$a^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^*$$

构造状态反馈矩阵

$$\bar{k} = kP = [\bar{k}_0, \bar{k}_1, \cdots, \bar{k}_{n-1}] = [a_0^* - a_0, \cdots, a_{n-1}^* - a_{n-1}] \quad (5-8)$$

由 (5-7) 和 (5-8) 得

$$\begin{aligned} \bar{A} - \bar{b}\bar{k} &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [a_0^* - a_0, \cdots, a_{n-1}^* - a_{n-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \hline -a_0^* & -a_1^* & \cdots & -a_{n-1}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是, 得到

$$\begin{aligned} \det(sI - A + bk) &= \det(sI - \bar{A} + \bar{b}\bar{k}) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned}$$

即存在反馈矩阵 $k = \bar{k}P^{-1}$, 使闭环系统任意配置极点。

5.2.2 单输入单输出系统极点配置算法

- 1、判断 (A, b) 能控性。若完全能控, 进入下一步; 若不完全能控, 转到停止。

2、计算矩阵A特征多项式。有

$$\det(sI - A) = a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

3、计算由期望闭环特征值 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$ 决定的特征多项式。
有

$$a^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^*$$

4、计算 $\bar{k} = [a_0^* - a_0, \dots, a_{n-1}^* - a_{n-1}]$

5、计算能控规范形变换矩阵

$$P = [A^{n-1}b, \dots, Ab, b] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

6: 计算 $Q = P^{-1}$

7: 计算 $k = \bar{k}Q$

8: 停止计算。

5.2.3 多输入多输出系统极点配置算法

考虑多输入系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5-9)$$

算法1 假定 (A, B) 能控。思路：首先求一状态反馈，使得其闭环系统对某一输入（例如对第一个输入 u_1 ）是能控的，再按单输入系统配置极点的方法配置极点。综合这两次反馈即得所求状态反馈。

设系统 (A, B) 能控，即

$$\text{rank } W_c = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

按行搜索格栅来选取 W_c 中 n 个线性无关列向量。设 $\text{rank } B = p$ 矩阵，选择好 n 个独立列向量并排列成如下形式：

$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{n_2-1}b_2, \cdots, b_p, \cdots, A^{n_p-1}b_p$$

以它作为列向量构造矩阵

$$W = \begin{bmatrix} b_1, Ab_1, \cdots, A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{n_2-1}b_2, \cdots, \cdots, A^{n_p-1}b_p \end{bmatrix}$$

并有 $\sum_{i=1}^p n_i = n$

显然W是 $n \times n$ 阶的满秩阵, 故 W^{-1} 存在。再构造如下矩阵

$$L = \left[0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_3, 0, \dots, 0, e_p, 0, \dots, 0 \right]$$

\downarrow
 第 n_1 列

\downarrow
 第 n_1+n_2 列

\downarrow
 第 $\sum_{i=1}^{p-1} n_i$ 列

\downarrow
 第 n 列

其中 $e_i (2 \leq i \leq p)$, 是 $p \times p$ 单位阵的第 i 列列向量。显然 L 是 $p \times n$ 阶矩阵。令

$$\bar{K} = LW^{-1}, \quad \text{即 } \bar{K}W = L$$

构造状态反馈 $u = \bar{K}x + \bar{v} = LW^{-1}x + \bar{v}$ (5-10)

设 \bar{v}_1 是 \bar{v} 的第一个分量, 则有如下结果。

定理5.4 系统(5-9) 在反馈作用(5-10)下, 以 \bar{v}_1 作输入的闭环系统

$$\dot{x} = (A + B\bar{K})x + b_1\bar{v}_1 \tag{5-11}$$

是能控的。

证明: 自己证明。

由于 (5-11) 是单输入能控系统, 可以用单输入系统状态反馈极点配置方法设计状态反馈。

构造状态反馈 $\bar{v}_1 = \tilde{K}x + v_1$

使得闭环系统 $\dot{x} = (A + B\bar{K} + b_1\tilde{K})x + b_1v_1$

具有指定极点。对多输入系统构造状态反馈

$$\bar{v} = \hat{K}x + v \quad (5-12)$$

其中
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{1 \times n} \\ 0_{(p-1) \times n} \end{bmatrix}$$

那么其闭环系统为

$$\dot{x} = (A + B\bar{K} + B\hat{K})x + Bv \quad (5-13)$$

而 $(A + B\bar{K} + B\hat{K})$ 与 $(A + B\bar{K} + b_1\tilde{K})$ 有相同的极点, 故 (5-13) 具指定的极点。

综合 (5-10) 和 (5-12), 得 $u = Kx + v, \quad K = \bar{K} + \hat{K}$

$$\text{闭环系统为 } \dot{x} = (A + BK)x + bv = (A + B(\bar{K} + \hat{K}))x + Bv \quad (5-14)$$

(5-14) 具有指定的极点。

计算步骤:

1、构造状态反馈 $u = \bar{K}x + \bar{v} = LW^{-1}x + \bar{v}$

$$W = [b_1, Ab_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{n_2-1}b_2, \dots, \dots, A^{n_p-1}b_p]$$

$$L = [0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_3, 0, \dots, 0, e_p, 0, \dots, 0]$$

使单输入系统 $\dot{x} = (A + B\bar{K})x + b_1\bar{v}_1$ 能控;

2、对第1步得到的单输入系统, 用单输入系统配置极点方法, 求反馈矩阵 \tilde{K} , 使闭环系统到希望的极点, 并令

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{1 \times n} \\ 0_{(p-1) \times n} \end{bmatrix}$$

3、求总反馈

$$u = Kx + v, \quad K = \bar{K} + \hat{K}$$

例5.2 设系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

试求一状态反馈，使得闭环系统的极点为-1, -2。

解： (1) 求 \bar{K} ，使 $(A + B\bar{K}, b_1)$ 能控。

构造 W, L

$$W = [b_1 \quad b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由5.10式

$$\bar{K} = LW^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

构造状态反馈

$$u = \bar{K}x + \bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \bar{v}$$

在此反馈下，所给系统的闭环系统为：

$$\dot{x} = (A + B\bar{K})x + B\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{v} \quad (*)$$

因而单输入系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{v}_1 \quad (**)$$

是能控的。

(2) 对**式构造反馈, 使闭环系统的极点为-1, -2。(**)式的特征多项式为

$$p_0(s) = \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - 2s + 1$$

所希望的特征多项式为 $p(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$

求得 $\tilde{K} = [-5 \quad -1]$

这样在反馈 $\bar{v}_1 = \tilde{K}x + v_1 = [-5 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v_1$

作用下, (**)式的闭环系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-5 \quad -1]x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

得
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

此闭环系统的特征根为所希望的-1, -2。

(3) 综合前两步, 即得所要求的反馈:

$$u = Kx + v = (\bar{K} + \hat{K})x + v$$

$$u = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) x + v = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + v$$

在此状态反馈下, 所给系统闭环系统具有希望的特征值-1, -2。

算法2 利用循环矩阵方法

定义1 称方阵A为循环矩阵,若其特征多项式为最小多项式。

定义2 若系统矩阵A为循环矩阵,则称为线性时不变循环系统。

判断:若系统矩阵A的n个特征值为两两相异,或A为约当形且每个不同特征值仅有一个约当块,则系统为循环。

结论: 设线性时不变系统为非循环, $\{A, b\}$ 可控, 则对几乎所有 $p \times n$ 实常阵 K , 可使 $(A - BK)$ 为循环.

步骤:

Step1: 判断 A 的循环性. 若 A 非循环, 选取一个 $p \times n$ 实常阵 K_1 , 使 $\bar{A} = (A - BK_1)$ 为循环; 若 A 为循环, $\bar{A} = A$

Step2: 对 \bar{A} 选取一个 $p \times 1$ 实常向量 ρ , 使 $\{\bar{A}, b\}$ 为完全可控;

Step3: 对单输入系统 $\{\bar{A}, b\}$ 利用单输入极点配置算法计算状态反馈向量 k .

Step4: 对 A 循环, 所求状态反馈矩阵 $K = \rho k$; 对 A 为非循环, 所求状态反馈矩阵为 $K = \rho k + K_1$

Step5: 停止计算.

例 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u$$

确定状态反馈 K ,使闭环特征值配置为

$$\lambda_1^* = -2, \lambda_2^* = -1 + 2j, \lambda_3^* = -1 - 2j,$$

解:(1)因为 A 为约当形,且对应 $\lambda_1 = 1$ 和 λ_2 各只有一个约当块,知 A 为循环.

$$(2) \quad \rho = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = B\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (A, b) \text{ 满足完全能控}$$

$$(3) \quad \alpha(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{bmatrix} = s^3 - 4s^2 + 5s - 2$$

$$\alpha^*(s) = (s+2)(s+1-2j)(s+1+2j) = s^3 + 4s^2 + 9s + 10$$

$$P = \begin{bmatrix} A^2 b & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$k = [\alpha_0^* - \alpha_0, \alpha_1^* - \alpha_1, \alpha_2^* - \alpha_2] P^{-1} = [12 \quad 4 \quad 8] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = [-12 \quad -22 \quad -52]$$

$$(4) \quad K = \rho k = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [-12 \quad -22 \quad -52] = \begin{bmatrix} -24 & -44 & -104 \\ -12 & -22 & -52 \end{bmatrix}$$

结束

(2) 我们还可以利用 Luenberger 能控标准形进行极点配置。
考虑系统 (A, B) 能控并已具有 Luenberger 能控标准形

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{按行} \quad (5-18)$$

其中

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \times & \cdots & \cdots & \times \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 1 & * & & \vdots & & \vdots \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mu_1 \\ \\ \\ \mu_r \end{matrix}$$

(5-19)

× 表示可能的非零数，
对 C 的要求未列出。

设所希望的闭环系统的特征多项式 $\tilde{\lambda}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$

与 $\tilde{\lambda}(s)$ 相应的能控标准伴随形 \tilde{A} 为

$$\tilde{A}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \bigcirc \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

试比较5.18与5.20式，不难发现矩阵A与 \tilde{A} 的差别仅在第 $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, \mu_1 + \dots + \mu_r = n$ 诸行。

现分别取A与 \tilde{A} 的第 $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, \mu_1 + \dots + \mu_r$ 诸行，由它们所构成的矩阵，分别记为 A_r 与 \tilde{A}_r 。

因而A与 \tilde{A} 的差别仅在 A_r 与 \tilde{A}_r 不同。另外，我们也将B中的 $\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, n$ 诸行取出，由它们构成矩阵 B_r ， B_r 具有如下的上三角形形式。

$$B_r = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \times & \dots & \times & \times & \dots & \times \\ & \ddots & \ddots & \times & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \times & \times & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & \times & \dots & \times \end{array} \right] \quad (5-21)$$

显见 B_r 是满秩的。 28

设所求的状态反馈为 $u = Kx + v$ (5-22)

其闭环系统为 $\dot{x} = (A + BK)x + Bv$

那么要求 $A + BK = \tilde{A}$ 即等价于 $A_r + B_r K = \tilde{A}_r$

故求得 $K = B_r^{-1}(\tilde{A}_r - A_r)$

即所求状态反馈为 $u = B_r^{-1}(\tilde{A}_r - A_r)x + v$ (5-23)

步骤:

- (1) 将能控矩阵化为龙伯格能控标准型;
- (2) 写出对应希望极点的闭环系统能控标准伴随形式;
- (3) 构造矩阵 A_r , \tilde{A}_r 和 B_r , 选取反馈矩阵

$$\bar{K} = B_r^{-1}(\tilde{A}_r - A_r)$$

- (4) 计算化龙伯格能控标准型的变换矩阵 T ;
原系统 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, 化为龙伯格标准型系统 (A, B, C)

$$A = T\bar{A}T^{-1}, B = T\bar{B}$$

- (5) 计算状态反馈矩阵 $K = \bar{K}T$

例5.3 对于下列龙伯格能控标准型系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

求一状态反馈 K ，使得闭环系统的特征多项式为

$$\lambda(s) = s^7 + 9s^6 + 35s^5 + 60s^4 + 65s^3 + 40s^2 + 13s + 6$$

解：容易看出

$$A_r = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -13 & -40 & -65 & -69 & -33 & -9 \end{bmatrix}$$

那么，所求反馈增益阵为

$$\begin{aligned} K &= B_r^{-1}(\tilde{A}_r - A_r) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -6 & -12 & -41 & -65 & -59 & -33 & -10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 20 & 82 & 131 & 118 & 64 & 20 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -6 & -12 & -41 & -65 & -59 & -33 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故所求状态反馈为

$$u = \begin{bmatrix} 11 & 20 & 82 & 131 & 118 & 64 & 20 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -6 & -12 & -41 & -65 & -59 & -33 & -10 \end{bmatrix} x + v$$

通过标准型来求状态反馈，比较容易，但求标准型的过程比较复杂。

5.2.4 多输入系统状态反馈极点配置讨论

- (1) 完全能控的单输入单输出系统，状态反馈不会变动零点位置。

(2) 对完全能控n维多输入多输出连续时间线性时不变系统，状态反馈在配置传递函数矩阵全部n个极点同时，一般不影响其**零点**。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

其传递函数矩阵 $G(s) = C(SI - A)^{-1}B$ ， $G(s)$ 的极点为其特征方程式的根。

零点定义：使得 $\text{rank} \begin{bmatrix} SI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + \min(p, q)$ **的所有s值**

注：实际上， $G(s)$ 的每个元传递函数的零点有可能改变。

(3) 对于多输入系统，状态反馈并不唯一，可以用不同的状态反馈达到配置同一希望极点的目的；不同的反馈矩阵，而系统的状态响应和输出响应也不同。

注：在极点配置综合问题中，一个**状态反馈矩阵被称为是较好的**，如果其元**反馈系数总体较小**和**闭环系统的响应较好**。

算法：基于龙伯格能控规范型的算法较好。

(4) 单变量系统状态反馈后不一定保持能观性是因为可以产生零极点对消，如果分子上没有零点即为常数则一定不产生零极点对消，这时一定不影响能观性。

5.2.5 多输入系统输出反馈极点配置

(1) 一般地说，利用非动态输出反馈 $u = -Fy + v$

(v 为参考输入)，不能任意地配置系统的全部极点。

单输入—单输出系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

其中： x 为 n 维状态向量， u 和 y 为标量输入和标量输出。

取反馈控制 $u = v - fy = v - fcx$

其中： v 为参考输入， f 为标量反馈增益。

输出反馈系统的传递函数为：

$$g_f(s) = c(sI - A + bfc)^{-1}b$$

其特征多项式为：

$$\alpha_f(s) = \det(sI - A + bfc)$$

可以证明采用输出反馈，只能使闭环系统极点配置到根轨迹上，而不能任意配置到根轨迹以外位置上。

通过合理选取补偿器结构和特性，可对带补偿器输出反馈系统的全部极点进行任意配置。

5.3 用状态反馈实现镇定控制

(1) 问题的提法

所谓状态反馈镇定问题就是，对给定线性时不变受控系统，找到一个状态反馈型规律：

$$u = -Kx + v, \quad v \quad \text{为参考输入}$$

使所导出的状态反馈闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$

为渐近稳定，即系统闭环特征值均具有负实部。

(2) 可镇定条件

定理5.7 (可镇定充要条件) 连续时间线性时不变受控系统可由状态反馈镇定，当且仅当系统不能控部分为渐近稳定。

证: 已知不完全能控 $\{A, B\}$ 系统必可通过特定线性非奇异变换，实现系统结构分解：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

对任意状态反馈阵 $K = [K_1, K_2]$ 可有 $\bar{K} = KP^{-1} = [\bar{K}_1, \bar{K}_2]$

可以得到：

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \det(sI - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}) \\ &= \det \begin{bmatrix} (sI - \bar{A}_c + \bar{B}_c\bar{K}_1) & -\bar{A}_{12} + \bar{B}_c\bar{K}_2 \\ \mathbf{0} & (sI - \bar{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - \bar{A}_c + \bar{B}_c\bar{K}_1) \det(sI - \bar{A}_{\bar{c}}) \end{aligned}$$

再由 $\{\bar{A}_c, \bar{B}_c\}$ 能控知，存在 \bar{K}_1 可使 $\bar{A}_c - \bar{B}_c\bar{K}_1$ 特征值均具有负实部。要使存在 K 使 $A - BK$ 特征值均具有负实部，即系统可由状态反馈镇定，当且仅当系统不能控部分 $\bar{A}_{\bar{c}}$ 为渐近稳定即其特征值均具有负实部。证明完成。

推论5.2 (可镇定充分条件) 连续时间线性时不变受控系统可由状态反馈镇定的一个充分条件是系统为完全能控。

证: 镇定属于极点配置问题。完全能控系统必可由状态反馈任意配置全部极点。则完全能控系统也必可由状态反馈镇定。证明完成。

(3) 状态反馈镇定的算法

算法 (状态反馈镇定算法) 给定 n 维线性时不变系统 $\{A, B\}$ 设其满足可镇定条件, 求镇定的 **状态反馈矩阵 K** 。

(1) 判断 $\{A, B\}$ 能控性。若不完全能控, 进入下一步; 若完全能控, 去到 (5);

(2) 对 $\{A, B\}$ 构造按能控性分解变换矩阵 P , 计算:

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_c \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中, 表 $\dim \bar{A}_c = n_1, \dim \bar{A}_c = n_2$

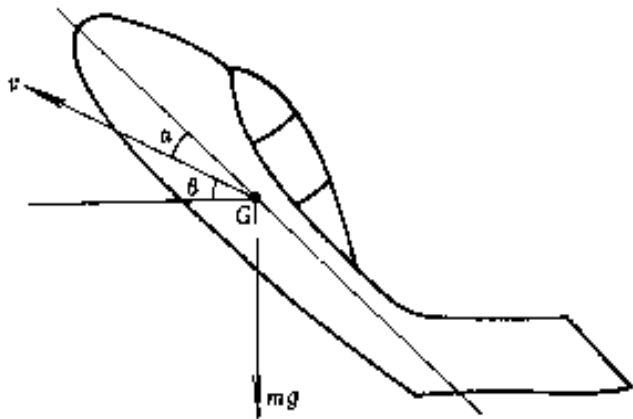
(3) 对 $\{\bar{A}_c, \bar{B}_c\}$ 任意指定 p 个实部为负期望闭环特征值 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_p^*\}$, 按多输入情形极点配置算法, 计算 $p \times n_1$ 阶极点配置状态反馈矩阵 \bar{K}_1

(4) 计算 p 镇定状态反馈矩阵 $K = [\bar{K}_1 \quad 0]$ 停止;

(5) 对 $\{A, B\}$ 指定 n 个实部为负期望闭环特征值 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$, 按多输入情形极点配置, 计算 $p \times n$ 镇定状态反馈矩阵 K 。

(6) 计算停止。

5.4 用状态反馈实现解耦控制



飞机在飞行中我们感兴趣的输出量是俯仰角、水平方向和高度，控制输入变量可通过机翼的偏转。

因为三个输出量之间有耦合，如果要同时操纵三个输入量并成功地控制飞机，要求驾驶员有相当高的技巧。

如果系统实现“解耦”，就为驾驶员提供了三个独立的高稳定性的子系统，从而可以独立地调整其俯仰角、水平位置和高度。

考虑多输入多输出线性时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad (5-24)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^p$ 。传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

5.4.1 动态解耦控制问题的提法及结构特征量

取状态反馈

$$u = -Kx + Lv \quad (5-25)$$

其中, K 为 $p \times n$ 状态反馈矩阵, L 为 $p \times p$ 输入变换矩阵, v 为参考输入。

导出的反馈闭环系统为

$$\dot{x} = (A - BK)x + BLv$$

$$y = Cx$$

闭环系统传递函数矩阵为

$$G_{KL}(s) = C(sI - A + BK)^{-1} BL \quad (5-26)$$

解耦控制目标就是，寻找一个输入变换和状态反馈矩阵对 $\{L \in \mathbb{R}^{p \times p}, K \in \mathbb{R}^{p \times n}\}$ ，使导出的闭环系统传递函数矩阵为非奇异对角有理分式矩阵，即

$$G_{KL}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BL = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}_{pp}(s) \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

其中， $\bar{g}_{ii}(s) \neq 0, i = 1, 2, \dots, p$ 。

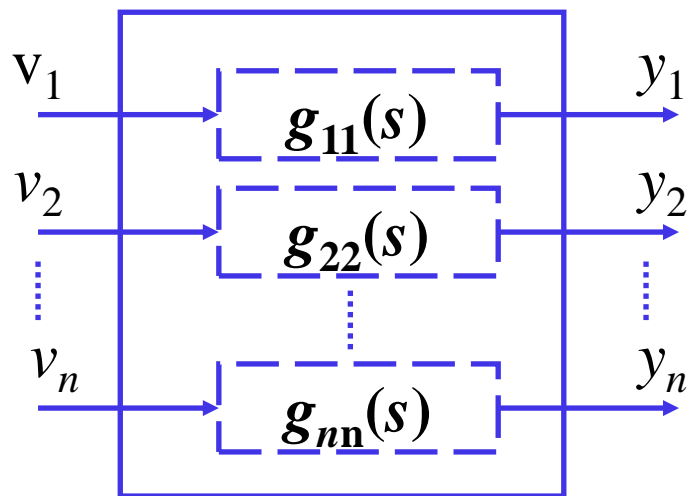
这种解耦控制的实质是在整个时间区间内，把一个p输入p输出解耦系统

$$\hat{y}(s) = G_{KL}(s)\hat{v}(s)$$

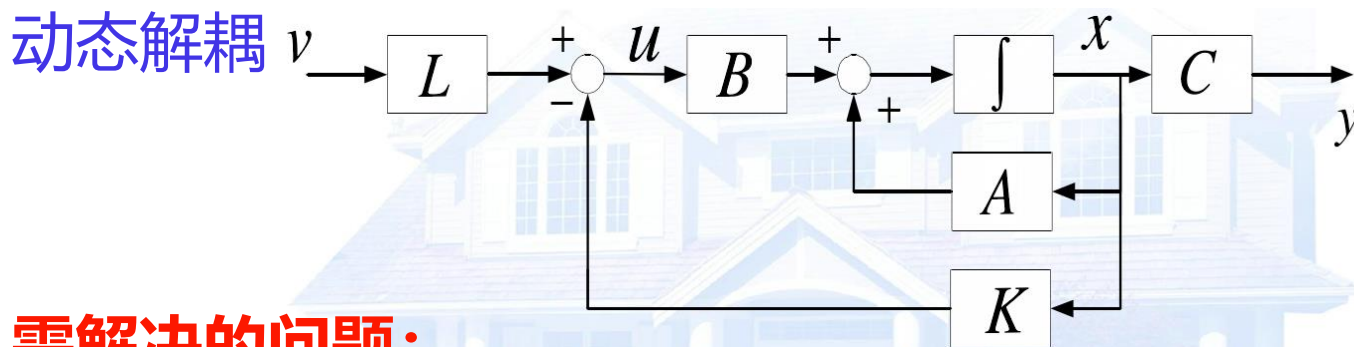
通过引入适当 $\{L \in \mathbb{R}^{p \times p}, K \in \mathbb{R}^{p \times n}\}$ ，化为p个独立的单输入单输出系统：

$$\hat{y}_i(s) = \bar{g}_{ii}(s)\hat{v}_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

且一个输出 y_i 由且仅由一个输入 v_i 所控制。



解耦系统示意图



需解决的问题:

- (1) 受控系统的可解耦性, 即通过状态反馈实现解耦所应满足的条件;
- (2) 建立求解矩阵 $\{L \in \mathbb{R}^{p \times p}, K \in \mathbb{R}^{p \times n}\}$ 的综合算法。

系统的结构特征量

开环系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 描述为 $p \times p$ 有理分式矩阵, 可表为

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \\ \vdots \\ g_p(s) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

$$g_i(s) = [g_{i1}(s) \quad g_{i2}(s) \quad \cdots \quad g_{ip}(s)]$$

σ_{ij} = " $g_{ij}(s)$ 分母多项式次数 " - " $g_{ij}(s)$ 分子多项式次数 "

结构特性指数定义为

$$d_i = \begin{cases} \mu_i, & \text{当 } c_i A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \mu_i - 1, \text{ 而 } c_i A^{\mu_i} B \neq 0 \\ n-1, & \text{当 } c_i A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

或
$$d_i = \min \{ \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{ip} \} - 1$$

其中, $i = 1, 2, \dots, p$ 。很显然, $0 \leq d_i \leq n-1$ 。

结构特性向量定义为 $E_i = c_i A^{d_i} B$ 或 $E_i = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} g_i(s)$
(1×p)

$$G_{KL}(s) = C(sI - A + BK)^{-1} BL$$

闭环系统的结构特性指数 \bar{d}_i 为

$$\bar{d}_i = \begin{cases} \bar{\mu}_i, & \text{当 } c_i (A - BK)^k BL = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \bar{\mu}_i - 1 \\ & \text{而 } c_i (A - BK)^{\bar{\mu}_i} BL \neq 0 \\ n-1, & \text{当 } c_i (A - BK)^k BL = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

其中, $i = 1, 2, \dots, p$ 。

结构特性向量 \bar{E}_i 有类似定义。

定理 5.5 受控系统 $\{A, B, C\}$ 和包含输入变换的状态反馈系统 $\{A - BK, BL, C\}$, 其中 $\{L \in \mathbb{R}^{p \times p}, K \in \mathbb{R}^{p \times n}\}$ 为任意, $\det L \neq 0$ 。 d_i 和 \bar{d}_i 为开环系统和闭环系统结构特性指数, E_i 和 \bar{E}_i 为开环系统和闭环系统结构特性向量, 两者具有如下关系:

$$\bar{d}_i = d_i, \quad \bar{E}_i = E_i L, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5-28)$$

证明: 略。

5.4.2 可解耦控制条件

定理5.6 (可解耦条件) 对连续时间线性时不变受控系统

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}\}$, 定义 $p \times p$ 结构特性矩阵 E , 则存在输入变换 $L \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和状态反馈 $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 状态反馈系统可实现解耦的充分必要条件是 E 为非奇异即 $\det E \neq 0$ 。

证明：必要性。

$$G_{KL}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BL = \frac{CR_{n-1}(K)BLs^{n-1} + \cdots + CR_0(K)BL}{s^n + \alpha_{n-1}(K)s^{n-1} + \cdots + \alpha_1(K)s + \alpha_0(K)}$$

若解耦, 则

$$CR_{n-1}(k)BL, \cdots, CR_0(k)BL \quad \text{对角阵}$$

$$CR_j(k)BL = \begin{bmatrix} r_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & r_{jp} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \cdots, n-1$$

$$c_i R_j(K)BL = r_{j,i} e_i^T \quad (i = 1, \cdots, p; j = 0, \cdots, n-1)$$

且向量 $(r_{0,i}, \dots, r_{n-1,i}) \neq 0, i=1,2,\dots,p$ (传递函数阵非奇异要求)

$$\bar{d}_i = d_i \quad c_i A^{d_i} B \neq 0 \rightarrow c_i A^{d_i} BL \neq 0, i=1,\dots,p$$

由 d_i 的定义可以导出

$$c_i R_{n-j-1}(K)B = 0 \quad j < d_i$$

$$c_i R_{n-d_i-1}(K)B = C_i A^{d_i} B \quad j = d_i$$

(可导出 R_{n-j-1} 表达式, 再用 d_i 定义推导)

故

$$c_i A^{d_i} BL = c_i R_{n-d_i-1}(k)BL = r_{n-d_i-1,i} e_i^T \neq 0$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{n-d_1-1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & r_{n-d_p-1,p} \end{bmatrix} L^{-1}$$

所以

$$\det E \neq 0$$

另一种证法

$$G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}_{p,p} \end{bmatrix}, \quad \bar{g}_{ii} \neq 0, i=1,2,\dots,p$$

利用 \bar{E} 传递函数矩阵的定义公式, 得

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \vdots \\ \bar{E}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_1+1} \bar{g}_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_p+1} \bar{g}_{pp}(s) \end{bmatrix} \quad \text{即 } \bar{E} \text{ 为非奇异。}$$

因为 $\bar{E} = EL$, $\det L \neq 0$ 所以 $\det E \neq 0$

充分性 若有 $\det E \neq 0$, 只要找到 K, L 解耦即可。

$$\text{令 } F = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_p A^{d_p+1} \end{bmatrix} \quad L = E^{-1}, K = E^{-1}F$$

则由此导出的包含输入变换的状态反馈系统为

$$\dot{x} = (A - BE^{-1}F)x + BE^{-1}v$$

$$y = Cx$$

为积分型解耦系统，即闭环传递函数矩阵具有形式：

$$G_{KL}(s) = C(sI - A + BE^{-1}F)^{-1}BE^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{d_p+1}} \end{bmatrix}$$

在 $\{L, K\}$ 的上述选取下，包含输入变换的状态反馈系统为积分型解耦系统。从而，存在 $\{L, K\}$ 可使闭环系统解耦。

充分性得证。

推论 5.1 (积分型解耦系统) 给定连续线性时不变受控系统

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}\}$ ，通过选取 $L = E^{-1}, K = E^{-1}F$ 可实现积

分解耦。同时，任何一个实现解耦控制的系统能实现积分解耦控制。

说明：积分型解耦系统不稳定，工程上不能被接受。

5.4.3 解耦控制综合算法

1、计算系统 (A,B,C) 的结构特征量

$$d_i, i=1,2,\dots,p$$

$$E_i = c_i A^{d_i} B$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \end{bmatrix}$$

若E非奇异, 下一步; 否则, 停止。

2、进行状态反馈实现积分解耦

$$F = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_p A^{d_p+1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{L} = E^{-1}, \bar{K} = E^{-1}F$$

积分型解耦系统为

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}v$$

$$y = \bar{C}x$$

其中, $\bar{A} = A - BE^{-1}F$, $\bar{B} = BE^{-1}$, $C = \bar{C}$ 且 $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 保持能控。

3、化积分型解耦系统 $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ 为规范型

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C} \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C} \bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = m$$

引入非奇异变换 $\bar{x} = T^{-1}x$, 化积分型解耦系统 $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ 为解耦规范形:

$$\tilde{A} = T^{-1} \bar{A} T, \quad \tilde{B} = T^{-1} \bar{B}, \quad \tilde{C} = \bar{C} T$$

对完全能观测 $\{\bar{A}, \bar{C}\}$, $m=n$, 解耦规范形具有形式:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{A}_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{b}_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{c}_p \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

其中, $\tilde{A}_i \in \mathcal{R}^{m_i \times m_i}$, $\tilde{b}_i = \mathcal{R}^{m_i \times 1}$, $\tilde{c}_i \in \mathcal{R}^{1 \times m_i}$, $i = 1, 2, \dots, p$, $\sum_{i=1}^p m_i = m = n$, $m_i = d_i + 1$.

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c}_i = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

对不完全能观测 $\{\bar{A}, \bar{C}\}$, $m < n$, 解耦规范形具有形式:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{A}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \tilde{A}_p & 0 \\ \hline \tilde{A}_{c1} & \cdots & \tilde{A}_{cp} & \tilde{A}_{p+1} \end{array} \right], \tilde{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{b}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{b}_p & \\ \hline \tilde{b}_{c1} & \cdots & \tilde{b}_{cp} & \end{array} \right], \tilde{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{c}'_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \tilde{c}'_p \\ \hline & & & 0 \end{array} \right] \quad (5-30)$$

由已知 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ 和 $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ 定出变换矩阵 T^{-1} 。

对 $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ 和 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ 为能控能观测情形, 基于下列关系式:

$$\tilde{A} = T^{-1} \bar{A} T, \quad \tilde{B} = T^{-1} \bar{B}, \quad \tilde{C} = \bar{C} T$$

$$\bar{Q}_c = [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}], \quad \tilde{Q}_c = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

$$\bar{Q}_0 = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C} \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C} \bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C} \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

可以导出: $T^{-1} = (\tilde{Q}_0^T \tilde{Q}_0)^{-1} \tilde{Q}_0^T \bar{Q}_0$, $T = \bar{Q}_c \tilde{Q}_c^T (\tilde{Q}_c \tilde{Q}_c^T)^{-1}$

4、对解耦规范形 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$, 选取 $p \times n$ 状态反馈矩阵 \tilde{K} 。
相应于完全能观解耦规范形(5-29), 取 \tilde{K} 的形式为

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{K}_p \end{bmatrix}$$

相应于不完全能观解耦规范形(5-30)，取 \tilde{K} 的形式为

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \tilde{K}_p & 0 \end{bmatrix}$$

状态反馈矩阵 \tilde{K} 的这种选取必可使 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ 实现解耦，即有

$$\tilde{C}(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{c}'_1(sI - \tilde{A}_1 + \tilde{b}_1\tilde{K}_1)^{-1}\tilde{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{c}'_p(sI - \tilde{A}_p + \tilde{b}_p\tilde{K}_p)^{-1}\tilde{b}_p \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_i - \tilde{b}_i\tilde{K}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{d_i} & \\ 0 & & & \\ \hline -k_{i0} & -k_{i1} & \cdots & -k_{id_i} \end{array} \right]$$

或

$$\tilde{A}_i - \tilde{b}_i\tilde{K}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{d_i} & \\ 0 & & & 0 \\ \hline -k_{i0} & -k_{i1} & \cdots & -k_{id_i} \end{array} \right]$$

对解耦后各单输入单输出系统指定期望极点组：

$$\{\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*, \dots, \lambda_{i,d_i+1}^*\}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

按单输入情形极点配置算法，定出状态反馈矩阵各个元组：

$$\{k_{i0}, k_{i1}, \dots, k_{id_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

5、对原系统 $\{A, B, C\}$ ，定出满足解耦和期望极点配置的一个输入变换和状态反馈矩阵对 $\{L, K\}$ ：

$$K = E^{-1}F + E^{-1}\tilde{K}T^{-1}, \quad L = E^{-1}$$

例5.4 给定双输入双输出线性时不变受控系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

求满足解耦和期望极点配置的输入变换和状态反馈矩阵 $\{L, K\}$ 。

解：（1）计算结构特征指数 $\{d_1, d_2\}$ 和结构特征向量 $\{E_1, E_2\}$

$$c_1 B = [2 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$c_1 A B = [2 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

$$c_2 B = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$c_2AB = [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1]$$

可以定出： $d_1 = 1, d_2 = 1$

$$E_1 = [1 \ 0], \quad E_2 = [0 \ 1] \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

易知E为非奇异，即受控系统可实现解耦控制。

(2) 导出积分型解耦系统

首先，计算定出： $F = \begin{bmatrix} c_1A^2 \\ c_2A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基此，取输入变换矩阵和状态反馈矩阵为

$$\bar{L} = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{K} = E^{-1}F = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

可导出积分型解耦系统的系数矩阵为

$$\bar{A} = A - BE^{-1}F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = BE^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 化积分型解耦系统 $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ 为规范型

基于上述得到的系数矩阵，容易判断 $\{\bar{A}, \bar{C}\}$ 为完全能观测，略。

由 $d_1 = 1$ 和 $d_2 = 1$ ，可以导出 m_1 和 $m_2 = 4$ 。基
此， m_1 并考虑到 $m_2 = 4$ 完全能观测，可以导出解耦规范形具有形式：

$$\tilde{A} = T^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \bar{C}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且由已知能控能观测 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ 和 $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 可以定出变换矩阵为

$$T^{-1} = (\tilde{Q}_o^T \tilde{Q}_o)^{-1} \tilde{Q}_o^T \bar{Q}_o$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 对解耦规范形 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ 定出状态反馈矩阵的结构

基于上述导出的 $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ 结构, 取反馈阵为两个对角分块阵, 结构形式为

$$\tilde{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_{10} & k_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & k_{20} & k_{21} \end{array} \right]$$

$$\lambda_{11}^* = -2, \quad \lambda_{12}^* = -4$$

$$\lambda_{21}^* = -2 + j, \quad \lambda_{22}^* = -2 - j$$

(5) 对解耦后各单输入单输出系统期望极点进行配置

可以看出, 解耦后单输入单输出系统均为2维系统。指定两组期望闭环极点:

并定出相应的两个期望特征多项式为

$$a_1^*(s) = (s+2)(s+4) = s^2 + 6s + 8$$

$$a_2^*(s) = (s+2-j)(s+2+j) = s^2 + 4s + 5$$

$$\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -k_{10} & -k_{11} & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -k_{20} & -k_{21} \end{array} \right]$$

按极点配置算法，可以定出：

$$k_{10} = 8, \quad k_{11} = 6; \quad k_{20} = 5, \quad k_{21} = 4$$

从而，在保持动态解耦前提下，可以导出满足期望极点配置的状态反馈矩阵：

$$\tilde{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right]$$

(6) 定出相对与原系统 $\{A, B\}$ 的输入变换阵 L 和状态反馈矩阵 K 。

$$\begin{aligned} K &= E^{-1}F + E^{-1}\tilde{K}T^{-1} = F + \tilde{K}T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 6 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

输入变换矩阵为 $L = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

通过计算得到，对综合导出的解耦控制系统，状态方程和输出方程为

$$\dot{x} = (A - BK)x + BLv = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -10 & -6 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$$
$$y = Cx = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

传递函数矩阵为

$$G_{KL}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BL = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 6s + 8} & \\ & \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \end{bmatrix}$$

5.4.4 状态反馈静态解耦

动态解耦严重依赖系统模型，工程上静态解耦已可以满足实际需要，且其对模型误差和参数摄动的敏感性小得多。

问题的提法:

设多输入多输出连续时间线性时不变受控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dim u = \dim y$$

所谓静态解耦，就是综合一个输入变换和状态反馈矩阵对

$$L \in R^{p \times p}, \quad K \in R^{p \times n}, \quad \det L \neq 0$$

使导出的包含输入变换状态反馈系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + BLv$$

$$y = Cx$$

及其传递函数矩阵 $G_{KL}(s) = C(SI - A + BK)^{-1} BL$

满足: i) 闭环控制系统渐近稳定, 即

$$R_e \lambda_i(A - BK) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

ii) 闭环传递函数矩阵当 $s=0$ 时为非奇异对角常阵, 即有

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{KL}(S) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{g}_{pp}(0) \end{bmatrix} \quad \bar{g}_{ii}(0) \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

静态解耦特点:

1. 当 $s \neq 0$ 时, 闭环传递函数矩阵为非对角矩阵;
2. 只适合于 p 维参考输入 v 各分量为阶跃信号情况。

可解耦条件:

存在输入变换和状态反馈矩阵对 $\{L, K\}$, 其中 $\det L \neq 0$ 可使 n 维连续时间线性时不变受控系统实现静态解耦, 当且仅当

1. 受控系统可由状态反馈镇定;
2. 受控系统系数矩阵满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p$$

静态解耦控制综合算法

Step1: 判断受控系统 $\{A, B\}$ 的能镇定性, 若为能镇定, 进入下一步, 否则转入Step7。

Step2: 判断受控系统 $\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + p$, 若满足, 进入下一步, 否则转入Step7。

Step3: 综合 $p \times n$ 镇定状态反馈阵 K , 按多输入情形极点配置算法计算 K 。

Step4: 按系统期望要求指定稳态增益即 $\tilde{d}_{ii}, (i = 1, 2, \dots, p)$ 组成

$$\tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_{11}, \dots, \tilde{d}_{pp})$$

Step5: 计算 $C(A - BK)^{-1}B$, 计算 $C(A - BK)^{-1}B$ 的逆。

Step6: 计算 $L = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1}\tilde{D}$, 则 $\{L, K\}$ 为综合导出的输入变换和状态反馈阵, 并有 $G_{KF}(0) = \tilde{D}$ 。

Step7: 停止计算。

第5章习题 (1)

1.p371, 6.2

2.p371,6.5

3.p372,6.8

4.p372,6.9(iii)

5.p373,6.14