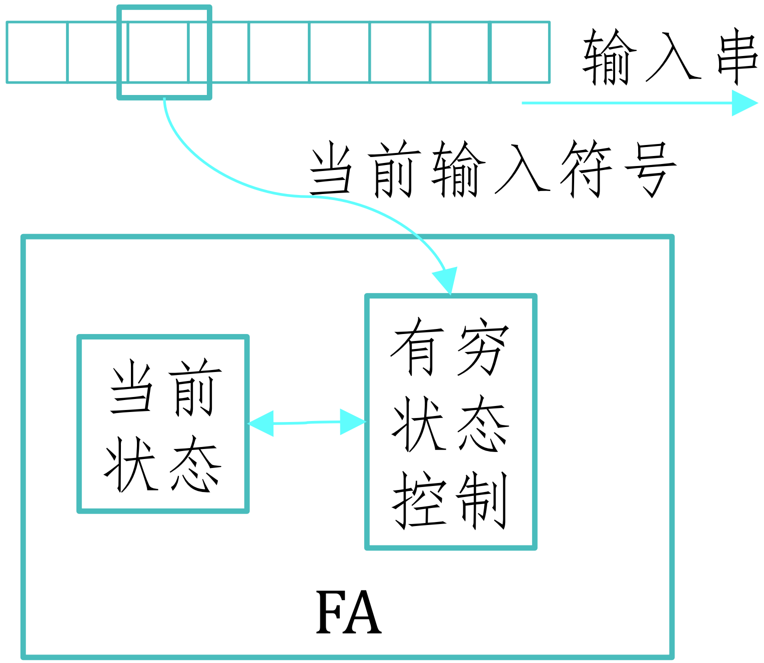
下推自动机
Pushdown Automata

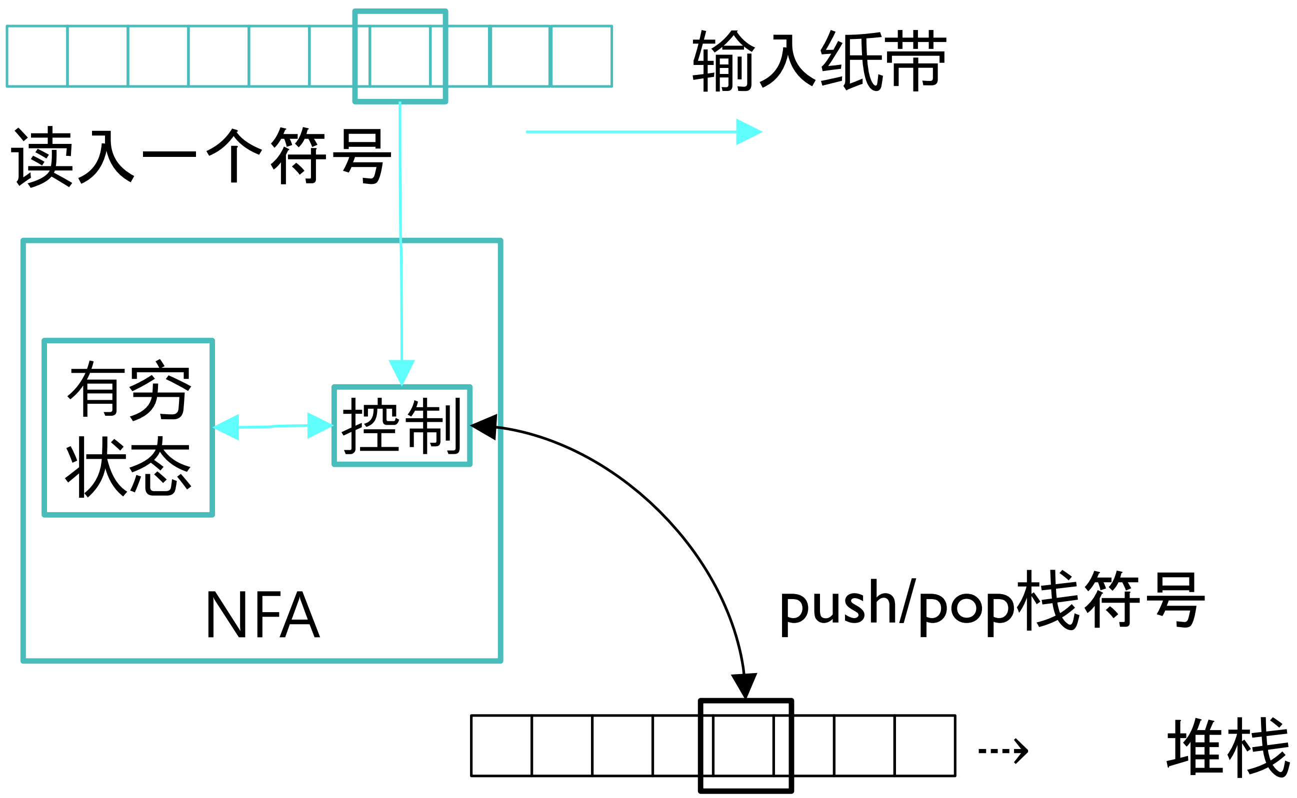
赵银亮

2024

回顾NFA

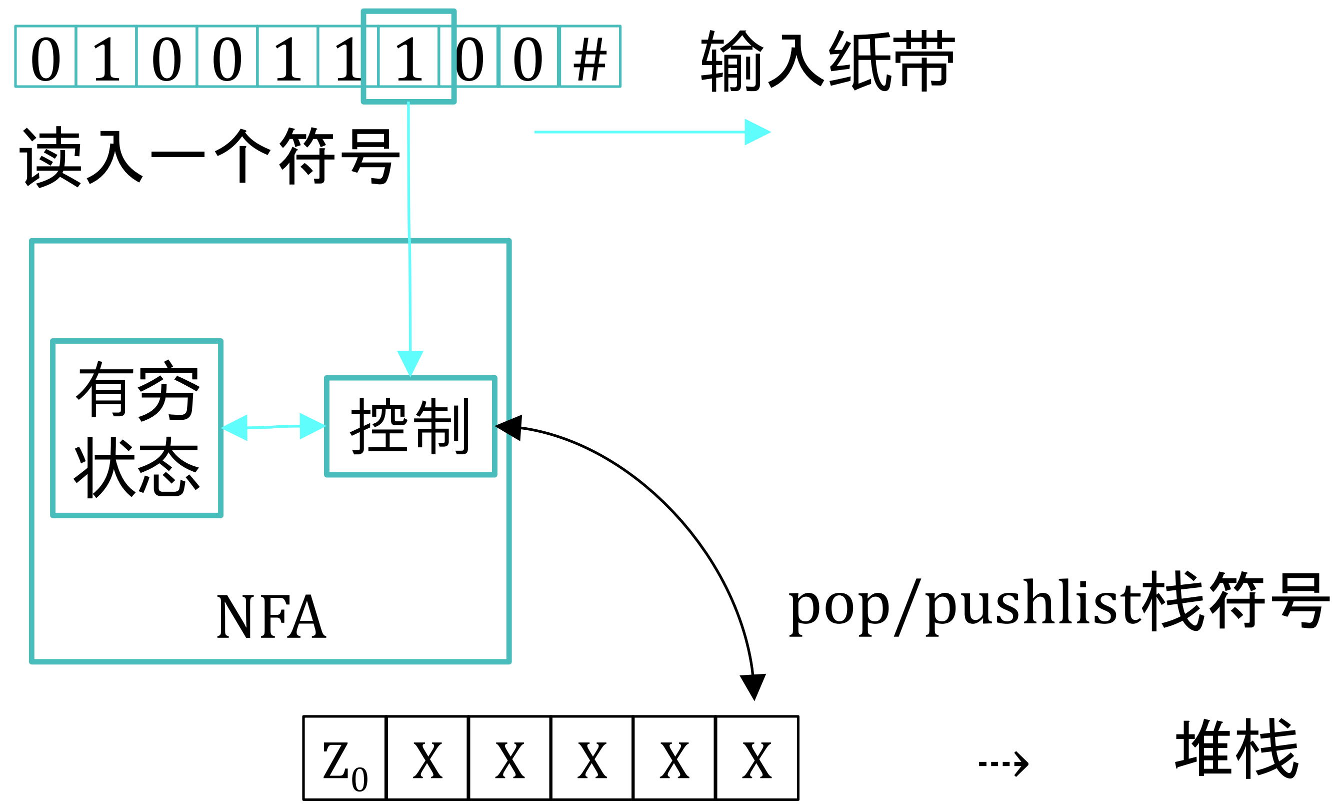


下推自动机



一个PDA类似于一个NFA外带有一个无穷栈，
依赖于输入符号和栈顶是什么来进行状态迁移。
PDA的记忆能力无穷但只能受限访问。PDA定义CFL。

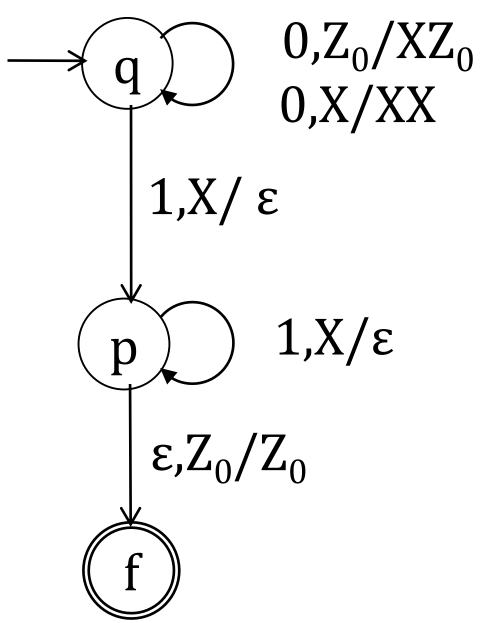
下推自动机



随着PDA读入输入串中当前输入符号，
它能够与NFA一样地进行状态转移但同步要求指定替换栈顶，
可看作pop零或一个指定的栈符号并push指定的零到多个栈符号。

构建 PDA

$$L_{7\text{-}1}=\{0^n1^n: n \geq 1\}$$



初始化用Z_0做栈底

通过给栈上压入X 来记住每个0

当遇见一个1时,则从栈顶上弹出一个X

输入串消耗完且栈顶为Z_0时表示接受。

弧上的标记:读入;弹出一个/压入多个(看作替换);
其中可以消耗一个输入符号，也可以不消耗输入符号;
默认Z_0在栈上。

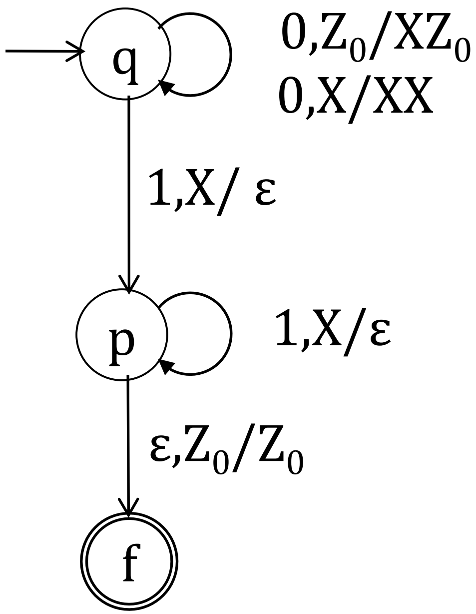
PDA的定义

- 一个PDA是一个七元组 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$，其中：
- Q是状态的有穷集合；
- Σ是输入符号的有穷集合；
- Γ是栈符号的有穷集合；
- $q_0 \in Q$是初始状态；
- $Z_0 \in \Gamma$是初始栈符号；
- $F \subseteq Q$是接受（终结）状态集合；
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^{(Q \times \Gamma^*)}$是转移函数。

$\delta(q, a, X) \subseteq \{(p, \xi) \mid p \in Q, \xi \in \Gamma^*\}, q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, X \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$

q到p箭弧标记为$a, Z/\zeta$, 当且仅当$(p, \zeta) \in \delta(q, a, Z)$

$L_{7\text{-}1}=\{0^n1^n: n \geq 1\}$的一个PDA



$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

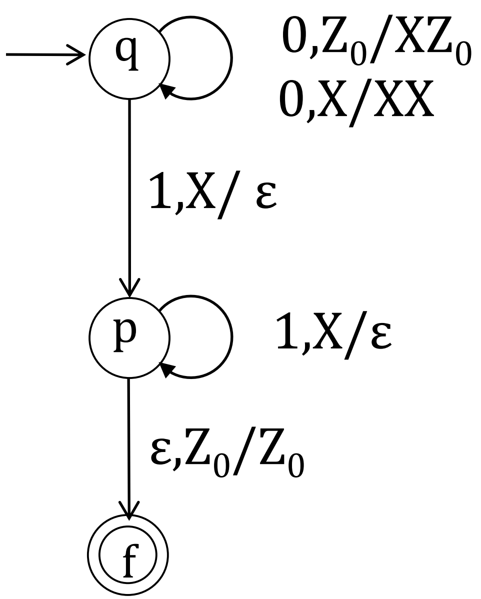
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

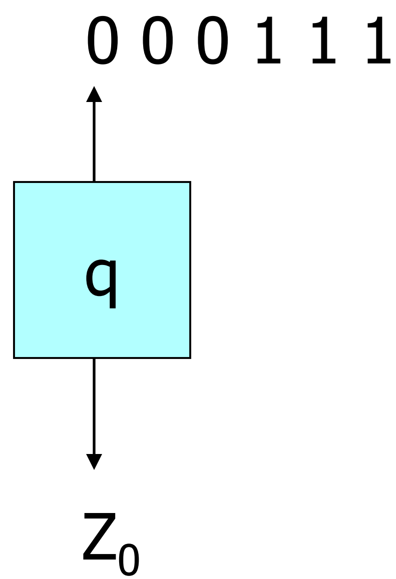
$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

PDA $(\{q,p,f\},\{0,1\},\{Z_0,X\},\delta,q,Z_0,\{f\})$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

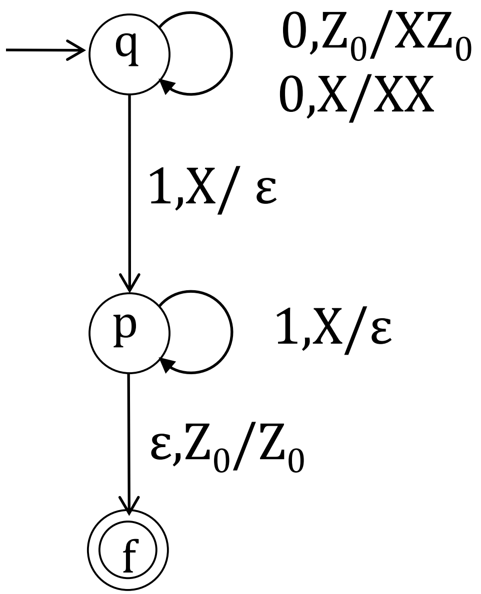
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

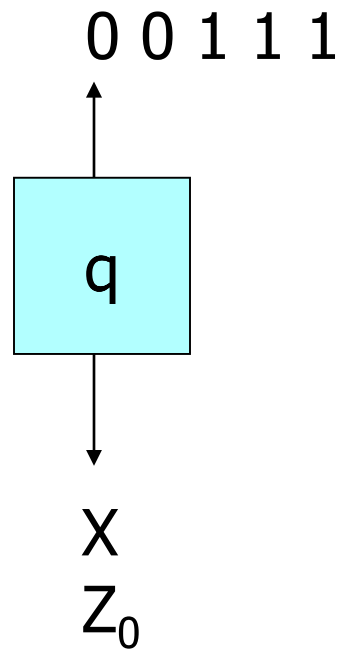
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

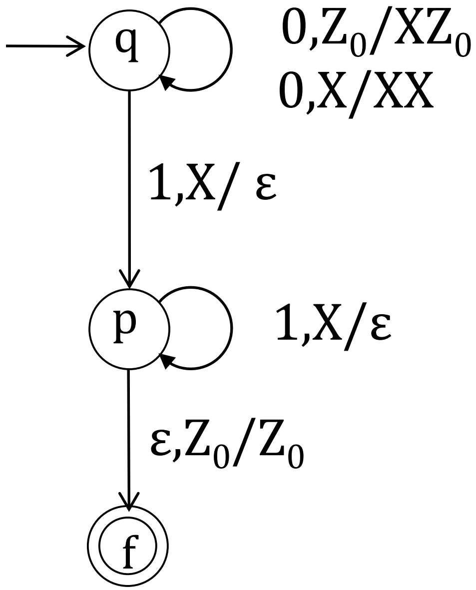
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

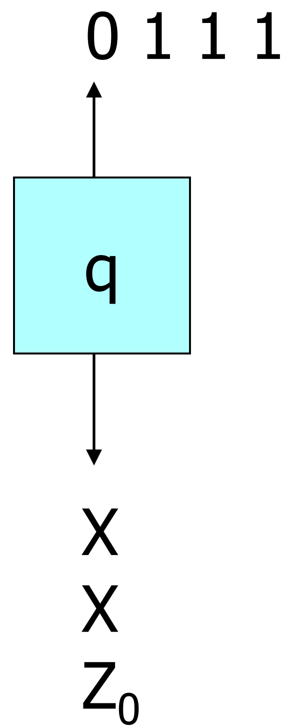
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

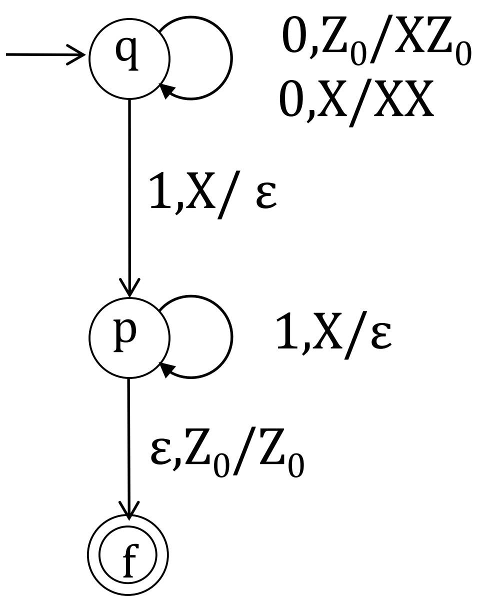
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

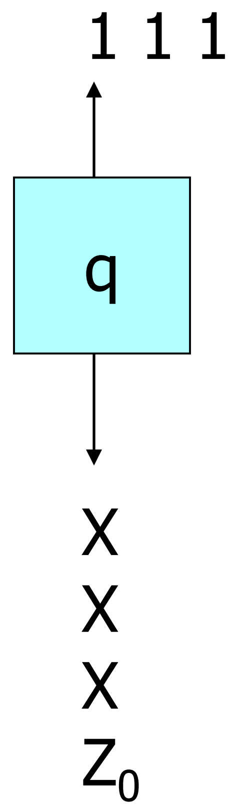
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0\ )=\{(q,XZ_0)\}$

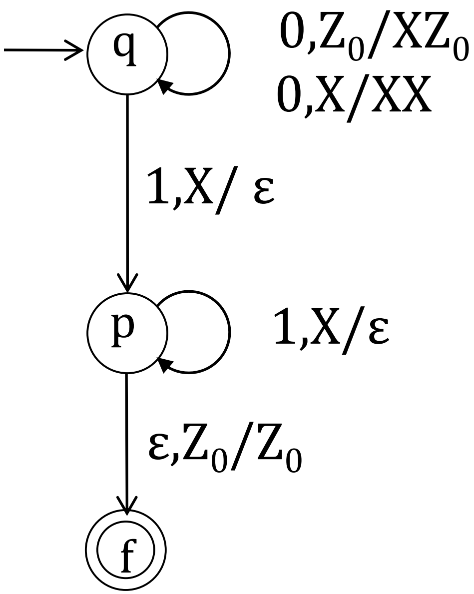
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

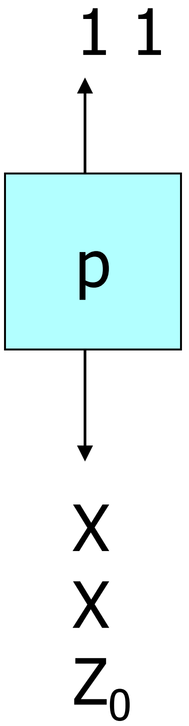
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

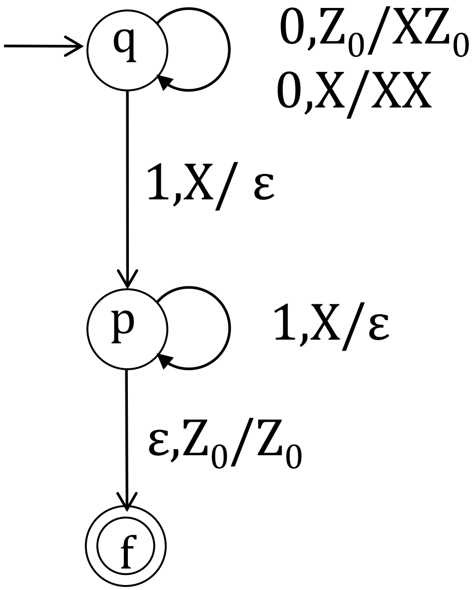
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

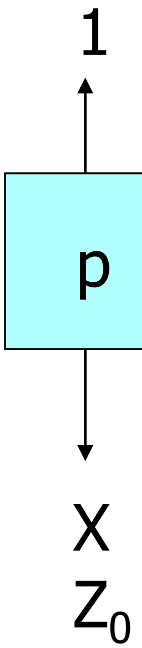
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$

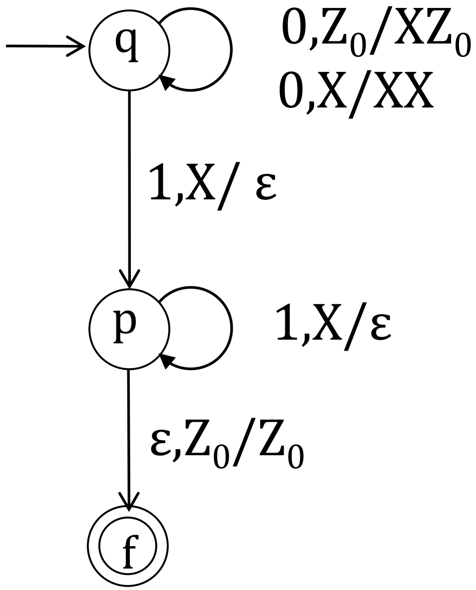
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

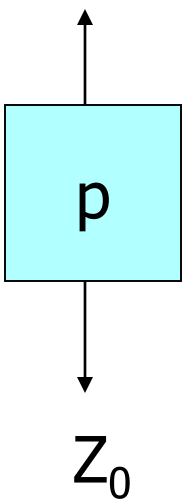
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$\delta(q,0,Z_0\ )=\{(q,XZ_0)\}$

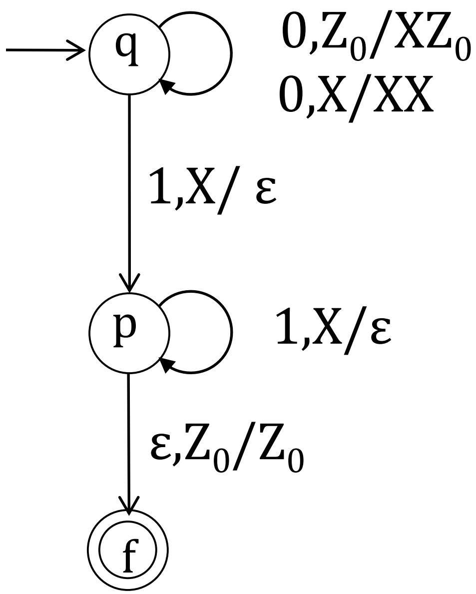
$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$

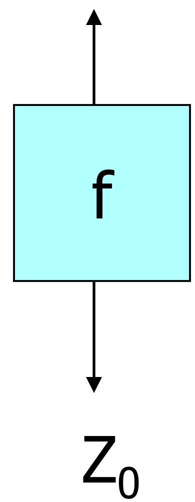
$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$

例：PDA运行（移动）





$$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$$
$$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$$
$$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$$
$$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$$
$$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$$

例 I

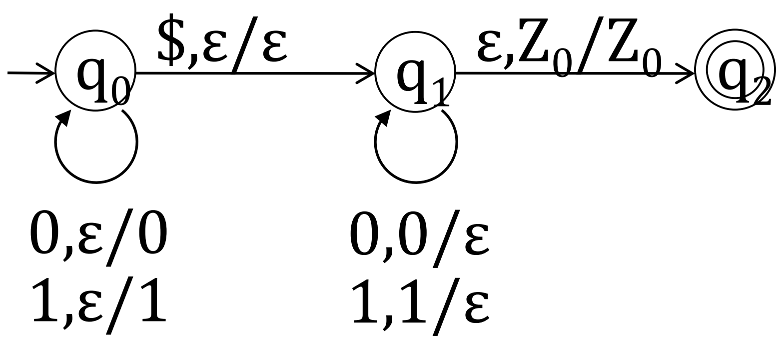
$L=\{w\$w^R: w\in\{0,1\}^*\}$

$\Sigma=\{0,1,\$\}$

$\Gamma=\{Z_0,0,1\}$

$\$,0\$0,01\$10 \in L$

$\varepsilon,01\$1,0\$\$0 \notin L$



将w写到栈上　从栈上读出w^R

例 2

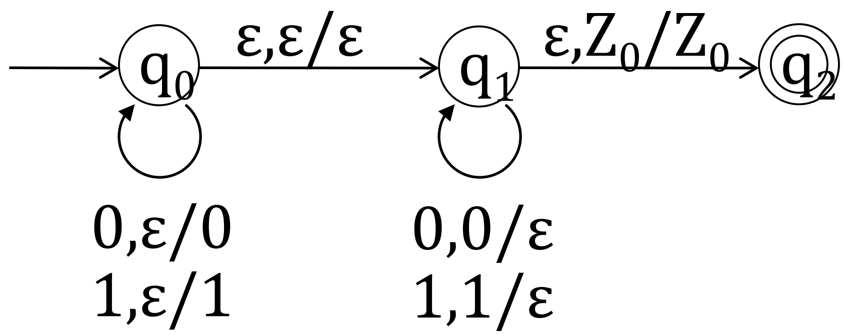
$L=\{ww^R: w \in S^*\}$

$\Sigma=\{0,1\}$

$\Gamma=\{Z_0,0,1\}$

$\varepsilon,00,0110 \in L$

$1,011,010 \notin L$



猜测 串的中间部分

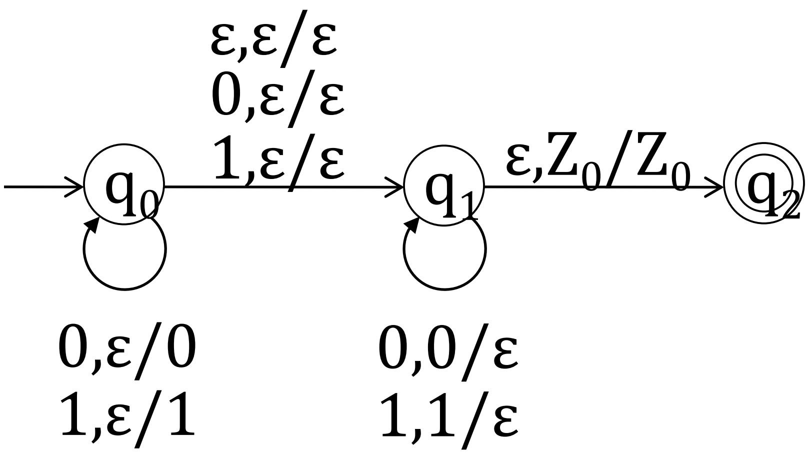
例 3

$L=\{w: w=w^R, w \in S^*\}$

$\varepsilon,1,00,010,0110 \in L$

$011 \notin L$

$\underbrace{01101}_{x}\underbrace{10110}_{x^R}$ or $\underbrace{0110}_{x}1\underbrace{0110}_{x^R}$

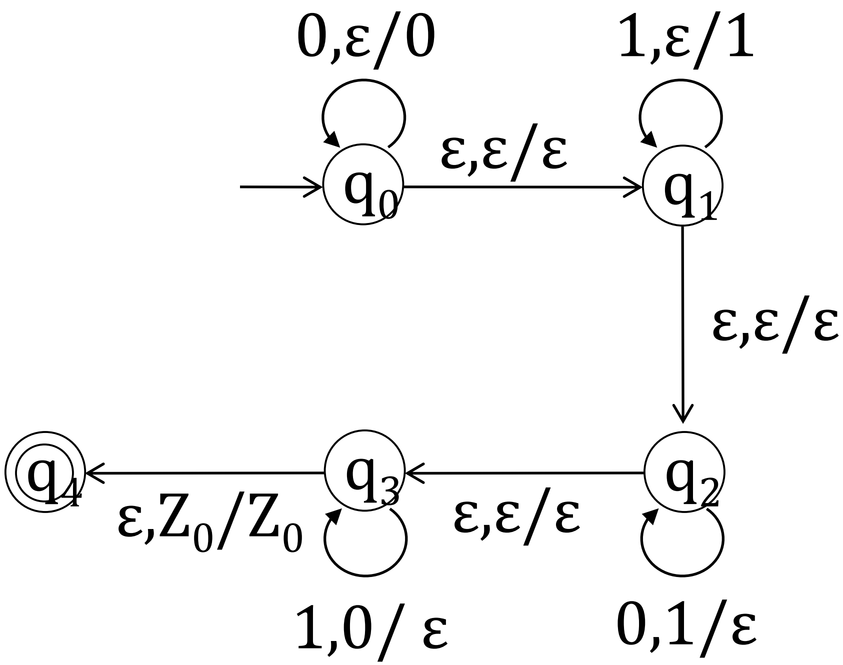


中间的符号可能是ε,0,或1

例 4

$L=\{0^n 1^m 0^m 1^n \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

$\Sigma=\{0,1\}$



输入: $0^n 1^m 0^m 1^n$

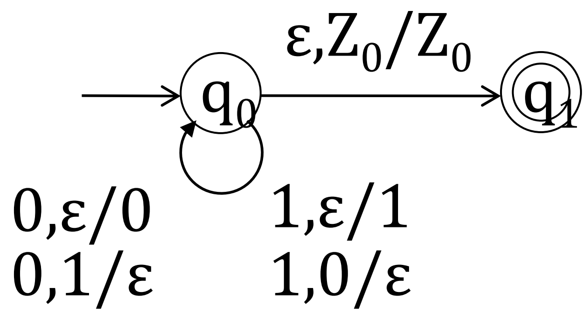
栈: $0^n 1^m$

例 5

L={w: w 有相同个数的0和1}

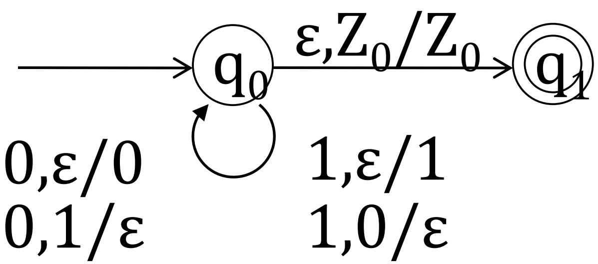
策略: 栈保持跟踪那些超出的 0或者1

若在最后,栈是空的,则数目相等



演示例 5

L={w: w有相同个数的0和1}



w=001110

输入	栈
0	$Z_0 0$
0	$Z_0 00$
1	$Z_0 0$
1	Z_0
1	$Z_0 1$
0	Z_0

例 6

L={w: w 有两个0-块且各块的0的个数相同

01011,001011001,1001010101001　　01001000,01111

允许　　不允许

策略:　　检测第一个0-块的开始

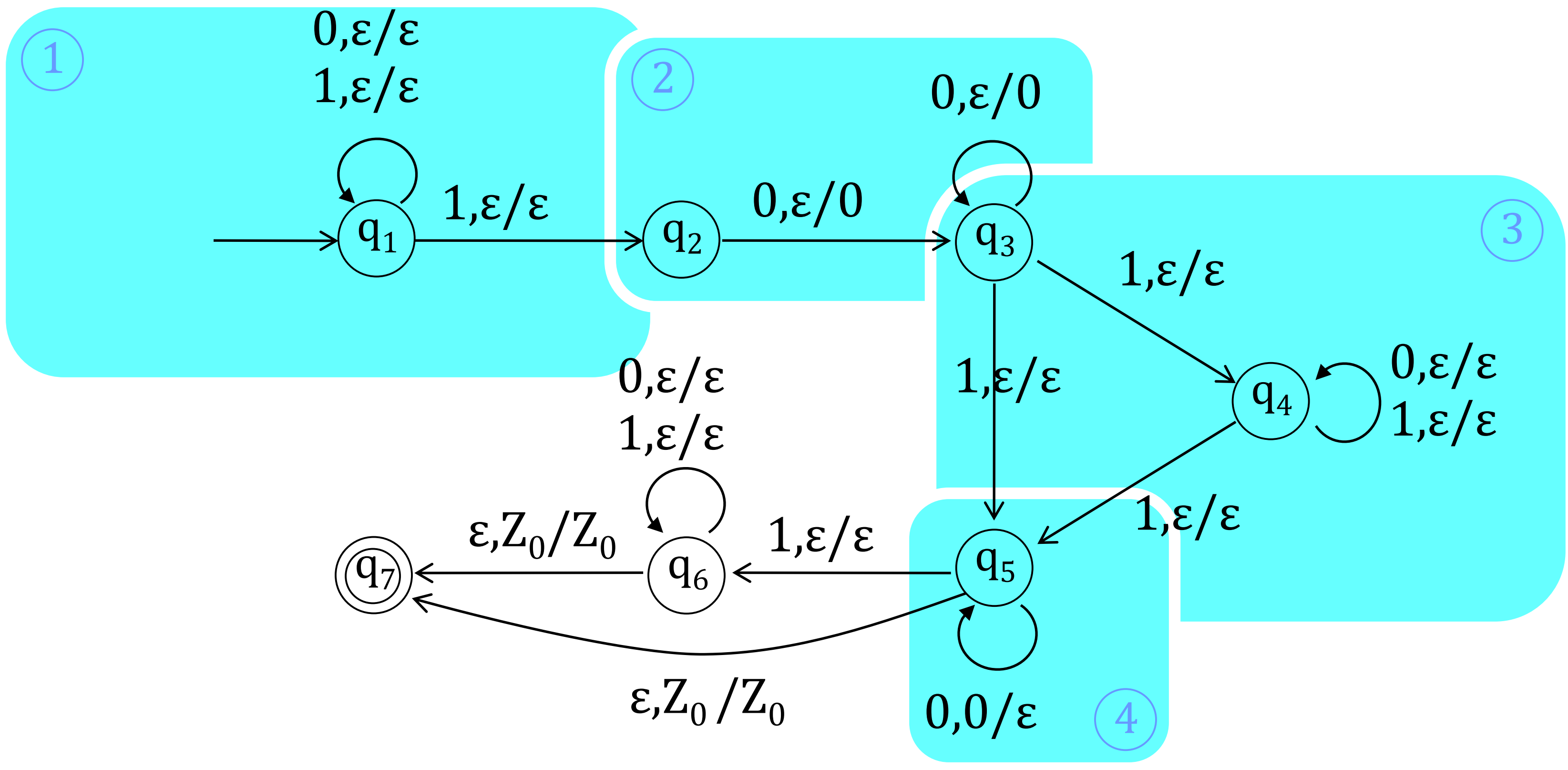
压入0到栈上

检测第二个0-块的开始

从栈上弹出0

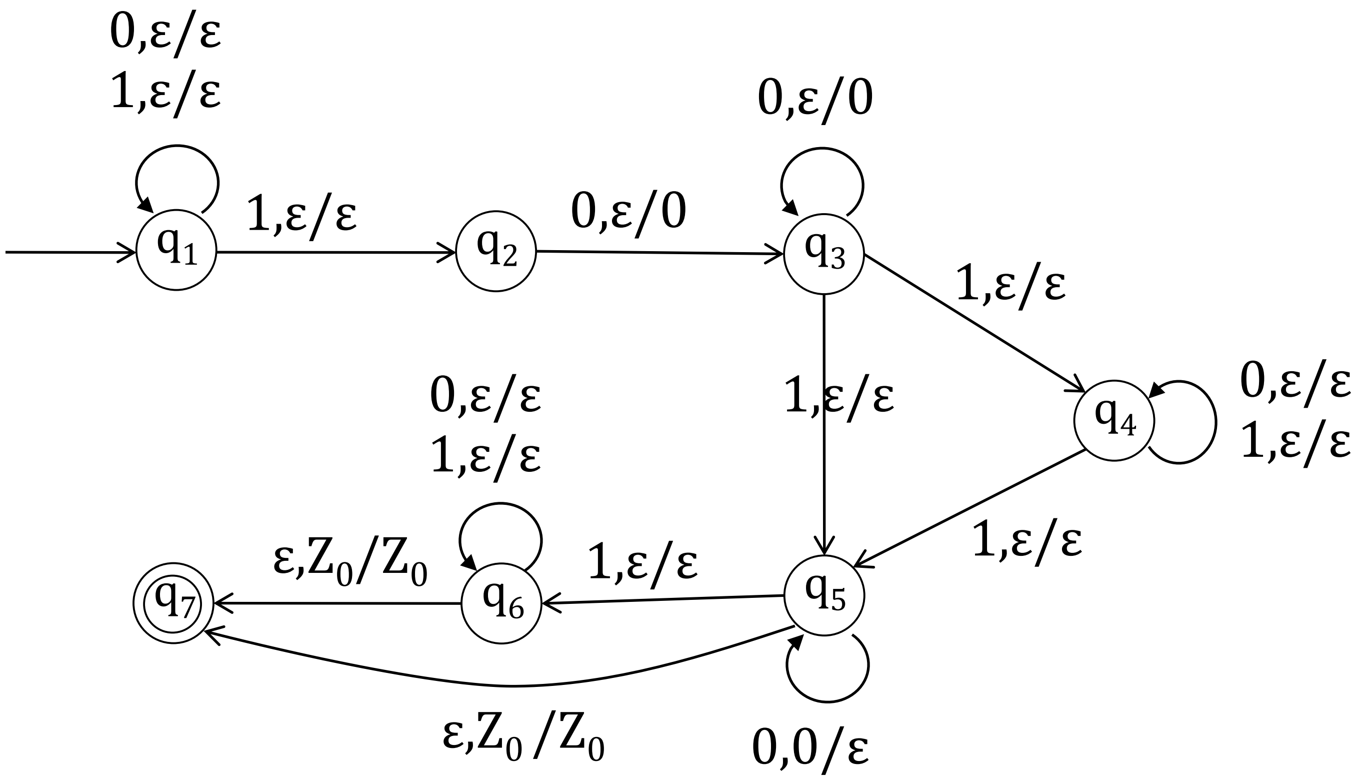
例 6

L={w: w有两个0-块且其0的个数相同



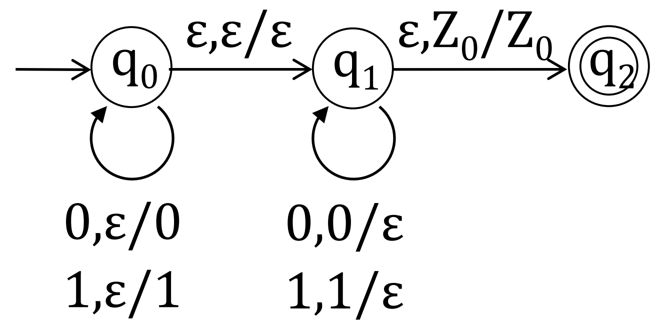
例 6

L={w: w有两个0-块且其0的个数相同



PDA的瞬时描述

- PDA 运行过程中的当前状态、剩余输入串、栈内容反映了运行过程每一步的PDA配置，称为PDA的瞬时描述(ID)。
- 一个ID 是一个三元组(q,w,β),其中:
  - ✓q是状态;
  - ✓w是剩余输入串;
  - ✓β是栈内容,栈顶在左端,即β的前缀。



$ID(q_0,w,Z_0)$

$ID(q,ay,X\beta)$

$ID(q,xy,\alpha\beta)$

$ID(f,\varepsilon,Z_0)$ $ID(p,\varepsilon,\beta)$

$ID(f,\varepsilon,\varepsilon)$ $ID(p,\varepsilon,\varepsilon)$

$ID(q_0,1001,Z_0)$

$ID(q_0,001,1Z_0)$

$ID(q_0,01,01Z_0)$

$ID(q_1,01,01Z_0)$

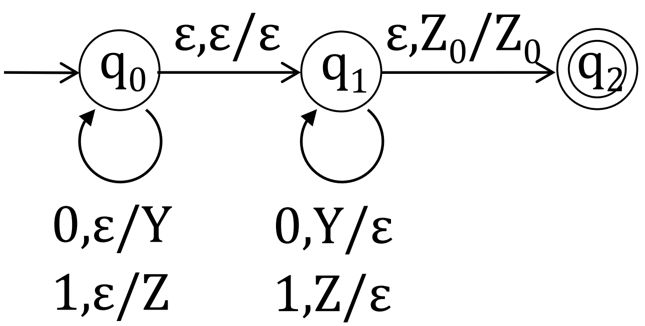
$ID(q_1,1,1Z_0)$

$ID(q_1,\varepsilon,Z_0)$

$ID(q_2,\varepsilon,Z_0)$

PDA的移动

- 对于PDA$(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$
- 定义直接移动。对任意$w\in\Sigma^*$和$\beta\in\Gamma^*$，若$\delta(q,a,X)$包含(p,α)，则有$(q,aw,X\beta)\vdash(p,w,\alpha\beta)$。

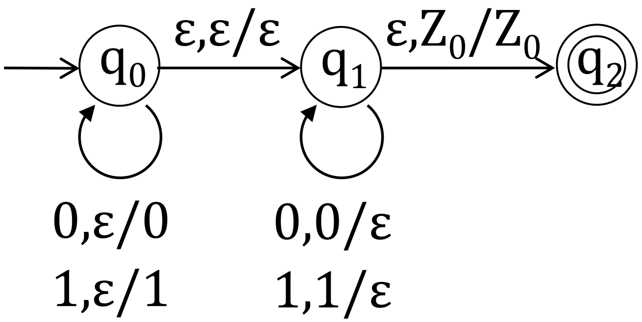


$ID(q_0,1001,Z_0)\vdash$
$ID(q_0,001,ZZ_0)\vdash$
$ID(q_0,01,YZZ_0)\vdash$
$ID(q_1,01,YZZ_0)\vdash$
$ID(q_1,1,ZZ_0)\vdash$
$ID(q_1,\varepsilon,Z_0)\vdash$
$ID(q_2,\varepsilon,Z_0)$

q_0	$Z_0\bullet1001\#$
q_0	$Z_0Z\bullet001\#$
q_0	$Z_0ZY\bullet01\#$
q_1	$Z_0ZY\bullet01\#$
q_1	$Z_0Z\bullet1\#$
q_1	$Z_0\bullet\#$
q_2	$Z_0\bullet\#$

PDA的移动

- 对任意$w \in \Sigma^*$和$\beta \in \Gamma^*$，若$\delta(q,a,X)$包含(p,α)，则有$(q,aw,X\beta) \vdash (p,w,\alpha\beta)$。



$ID(q_0,1001w,\beta) \vdash$

$ID(q_0,001w,1\beta) \vdash$

$ID(q_0,01w,01\beta) \vdash$

$ID(q_1,01w,01\beta) \vdash$

$ID(q_1,1w,1\beta) \vdash$

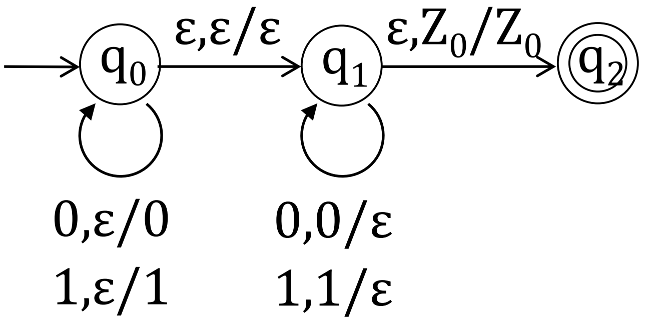
$ID(q_1,w,\beta) \vdash$

$ID(q_2,w,\beta)$

q_0	$\#\beta^R \bullet 1001w\#$
q_0	$\#\beta^R 1 \bullet 001w\#$
q_0	$\#\beta^R 10 \bullet 01w\#$
q_1	$\#\beta^R 10 \bullet 01w\#$
q_1,	$\#\beta^R 1 \bullet 1w\#$
q_1,	$\#\beta^R \bullet w\#$
q_2	$\#\beta^R \bullet w\#$

PDA的移动

- 对于PDA$(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$
- 定义移动$\vdash^*$为“0到多步直接移动”：
  - ✓基础：$I \vdash^* I$。
  - ✓归纳：若$I \vdash^* J$ 且$J \vdash K$,则$I \vdash^* K$。
- 自反性、传递性



$ID(q_0,1001w,\beta) \vdash^* ID(q_0,001w,1\,\beta) \vdash^* ID(q_0,01w,01\,\beta)$
$ID(q_0,1001w,\beta) \vdash^* ID(q_1,01w,01\,\beta)$
$ID(q_0,01w,01\,\beta) \vdash^* ID(q_1,1w,1\,\beta) \vdash^* ID(q_2,w,\beta)$

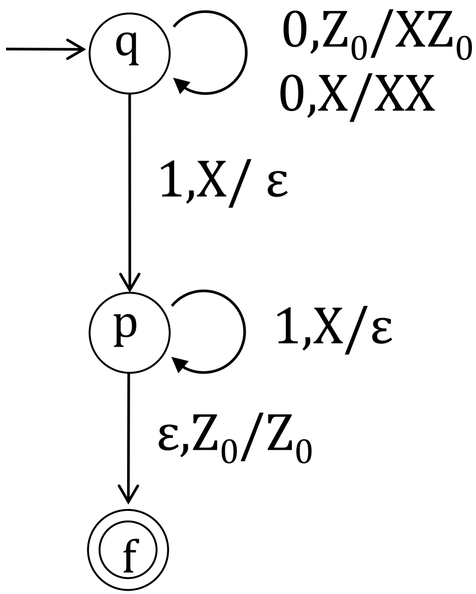
$ID(q_0,1001,Z_0) \vdash^* ID(q_0,001,1Z_0) \vdash^* ID(q_0,01,01Z_0)$
$ID(q_0,1001,Z_0) \vdash^* ID(q_2,\varepsilon,Z_0)$

例: 移动

- 例子中的移动序列为:

  ✓ $(q,000111,Z_0)\vdash(q,00111,XZ_0)\vdash(q,0111,XXZ_0)$
  $\vdash(q,111,XXXZ_0)\vdash(p,11,XXZ_0)\vdash(p,1,XZ_0)$
  $\vdash(p,\varepsilon,Z_0)\vdash(f,\varepsilon,Z_0)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}\\&\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}\\&\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}\\&\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}\\&\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}\end{aligned}}$$



- 因此,$(q,000111,Z_0)\vdash^*(f,\varepsilon,Z_0)$。
- 输入0001111会怎样?

答案

- $(q,0001111,Z_0)\vdash(q,001111,XZ_0)\vdash(q,01111,XXZ_0)\vdash(q,1111,XXXZ_0)\vdash(p,111,XXZ_0)\vdash(p,11,XZ_0)\vdash(p,1,Z_0)\vdash(f,1,Z_0)$

$$
\begin{aligned}
&\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}\\
&\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}\\
&\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}\\
&\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}\\
&\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}
\end{aligned}
$$

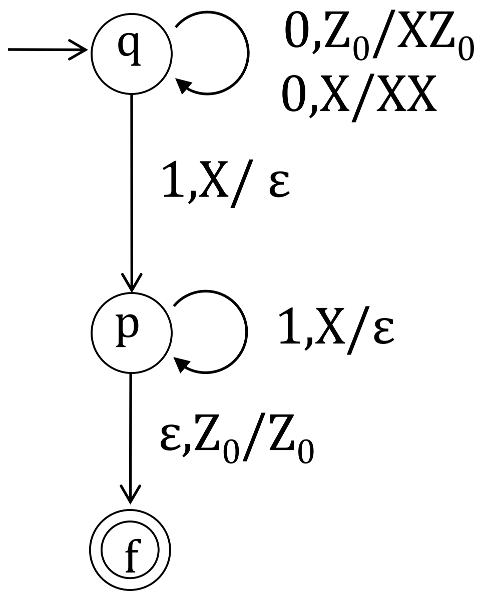
注意最后一个移动，在剩余输入串还有情况下也能不消耗输入符号进行移动。

- 0001111 不被接受因为输入串没消耗完（即使到达接受状态了也不行）。
- 输入串为0000111怎样?

答案

- $(q,0000111,Z_0)\vdash(q,000111,XZ_0)\vdash(q,00111,XXZ_0)\vdash(q,0111,XXXZ_0)\vdash(q,111,XXXXZ_0)\vdash(p,11,XXXZ_0)\vdash(p,1,XXZ_0)\vdash(p,\varepsilon,XZ_0)$

$$\delta(q,0,Z_0)=\{(q,XZ_0)\}$$
$$\delta(q,0,X)=\{(q,XX)\}$$
$$\delta(q,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$$
$$\delta(p,1,X)=\{(p,\varepsilon)\}$$
$$\delta(p,\varepsilon,Z_0)=\{(f,Z_0)\}$$



- 0000111 不接受因为没达到接受状态（即使输入串已经消耗完了）。

关于PDA移动的讨论

- 若$\delta(q,a,X)\ni(p,\alpha)$，则有$(q,aw,X\eta)\vdash(p,w,\alpha\eta)$。 --直接移动
- 若$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$ 则 $(q,xw,\alpha)\vdash^*(p,yw,\beta)$。
- 若$(q,x,\alpha\eta)\vdash^*(p,y,\beta\eta)$则，$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$。
- 若$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,z,\beta)$且 $x=yz$，那么 $(q,y,\alpha)\vdash^*(p,\varepsilon,\beta)$。

看不到的输入串和栈符号不影响它的计算。
观察栈，当$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$时$\alpha$的最大后缀$\eta$它的符号绝不参与发生在栈顶替换过程。
净弹出：ξ，其中$\alpha=\xi\eta$。

$$q \xrightarrow{a,X/\alpha} p$$

定理7.1

若$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$则$(q,xw,\alpha\eta)\vdash^*(p,yw,\beta\eta)$，
其中$x,y,w\in\Sigma^*,\alpha,\beta,\eta\in\Gamma^*$。

证明：对$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$步数归纳。
基础：0步 $(q,xw,\alpha\eta)\vdash^*(q,xw,\alpha\eta)$

归纳：设小于n步成立，即若$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$，则$(q,xw,\alpha\eta)\vdash^*(p,yw,\beta\eta)$。
那么n步时，必有$\delta(q,a,X)\ni(q_1,\alpha_2)$使得有第一步直接移动，即$(q,x,\alpha)=(q,ax_1,X\alpha_1)\vdash(q_1,x_1,\alpha_2\alpha_1)\vdash^*(p,y,\beta)$，那么$(q,xw,\alpha\eta)=(q,ax_1w,X\alpha_1\eta)\vdash(q_1,x_1w,\alpha_2\alpha_1\eta)\vdash^*(p,yw,\beta\eta)$。

直接移动 对任意$w\in\Sigma^*$和$\beta\in\Gamma^*$，若$\delta(q,a,X)$包含(p,α)，则有$(q,aw,X\beta)\vdash(p,w,\alpha\beta)$

定理7.2

若$(q,xw,\alpha)\vdash^*(p,yw,\beta)$，则$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$
其中$x,y,w\in\Sigma^*,\alpha,\beta\in\Gamma^*$。

证明：对$(q,xw,\alpha)\vdash^*(p,yw,\beta)$步数归纳。
基础：0步$(q,xw,\alpha)\vdash^*(q,xw,\alpha),(q,x,\alpha)\vdash^*(q,x,\alpha)$。

归纳：设小于n步成立，即若$(q,xw,\alpha)\vdash^*(p,yw,\beta)$，则$(q,x,\alpha)\vdash^*(p,y,\beta)$。
那么n步时，必有$\delta(q,a,X)\ni(q_1,\alpha_2)$使得有第一步直接移动，
即$(q,xw,\alpha)=(q,ax_1w,X\alpha_1)\vdash(q_1,x_1w,\alpha_2\alpha_1)\vdash^*(p,yw,\beta)$，那么
$(q,x,\alpha)=(q,ax_1,X\alpha_1)\vdash(q_1,x_1,\alpha_2\alpha_1)\vdash^*(p,y,\beta)$。

直接移动 对任意$w\in\Sigma^*$和$\beta\in\Gamma^*$，若$\delta(q,a,X)$包含(p,α)，则有$(q,aw,X\beta)\vdash(p,w,\alpha\beta)$

PDA的语言

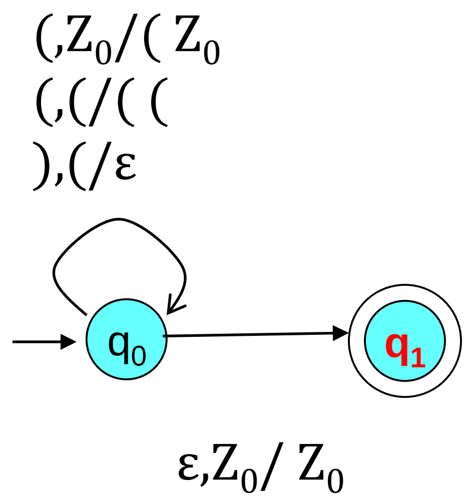
- 通过 终结状态接受方式定义PDA的语言。
- 若P 是一个 PDA,那么L(P)是串w 的集合,对于终结状态 f 和任意α满足 $(q_0,w,Z_0)\vdash^*(f,\varepsilon,\alpha)$。

- 通过空栈 接受方式定义PDA的语言。
- 若N 是一个PDA,那么L(N)是串w的集合且 $(q_0,w,Z_0)\vdash^*(q,\varepsilon,\varepsilon)$ 对任意状态q。

例: 平衡括号语言

通过终结状态接受的PDA

P:



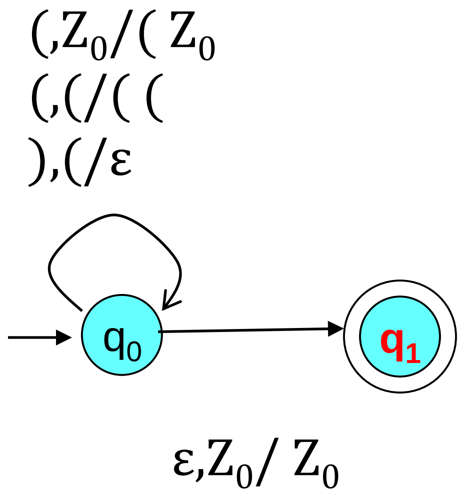
等价的以空栈方式接受的PDA

N:

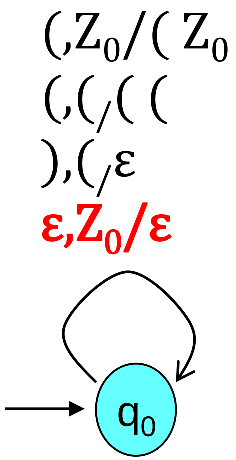
对于输入: ((( ))( )) ( ),这两个PDA如何工作?

例: 平衡括号语言

PDA P:



PDA N:



对于输入: ((( ))( )) ( ),这两个PDA如何工作?

两种定义语言方式的等价性

- 对于空栈方式接受的PDA N，存在终结状态方式接受的 PDA P， 满足L(P)=L(N)。
  - ✓定理7.4 L(P)=L(N)

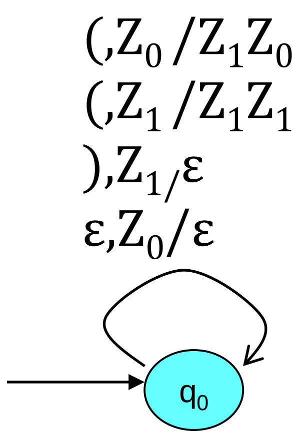
- 对于终结状态方式接受的 PDA P，存在空栈方式接受的PDA N，满足L(N)=L(P)。
  - ✓定理7.5 L(N)=L(P)

- 注意到PDA N的接受状态不起作用，故有时省略

例: 平衡括号语言

PDA $(\{q_0\}, \{(,)\}, \{Z_0,Z_1\}, \delta', q_0, Z_0)$

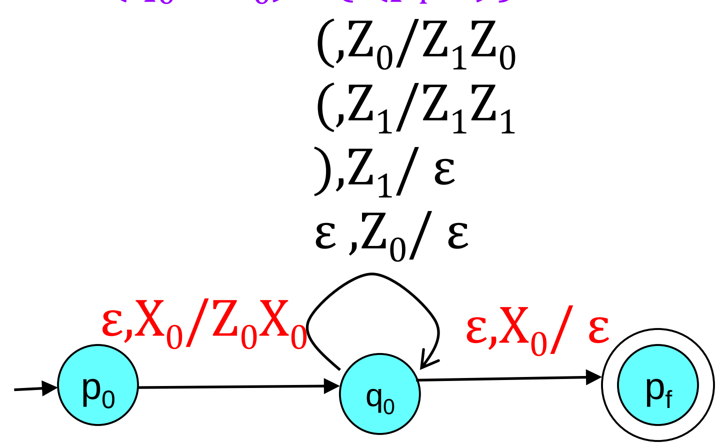
δ'：
$\delta'(q_0,(,Z_0)=\{ (q_0,Z_1Z_0)\}$
$\delta'(q_0,(,Z_1)=\{ (q_0,Z_1Z_1)\}$
$\delta'(q_0,),Z_1)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$
$\delta'(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$



空栈方式接受

PDA
$(\{p_0,q_0,p_f\}, \{(,)\}, \{X_0,Z_0,Z_1\}, \delta, p_0, X_0, \{p_f\})$

δ:
$\delta(p_0,\varepsilon,X_0)=\{ (q_0,Z_0X_0)\}$
$\delta(q_0,(,Z_0)=\{ (q_0,Z_1Z_0)\}$
$\delta(q_0,(,Z_1)=\{ (q_0,Z_1Z_1)\}$
$\delta(q_0,),Z_1)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$
$\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{ (q_0,\varepsilon)\}$
$\delta(q_0,\varepsilon,X_0)=\{ (p_f,\varepsilon)\}$



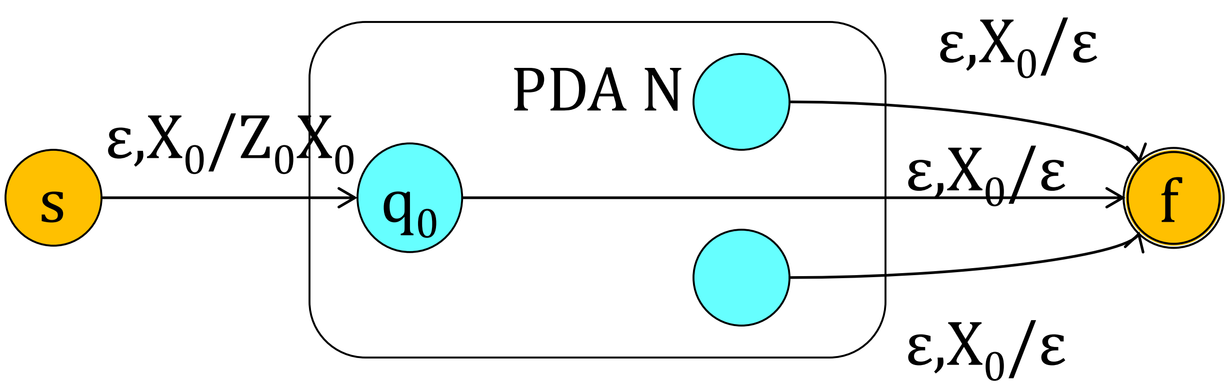
接受状态方式接受

定理7.4 对于PDA N，存在等价的PDA P。

- PDA P 模拟PDA N。
- P 有一个特定的栈底标记以俘获N清空其栈的情形。
- 若是，则P 接受。

由PDA N构造等价PDA P的规则

1. 将N所有状态、栈符号、转移函数均作为P的。
2. 增加一个非PDA N栈符号X_0作为PDA P的开始符号。
3. 增加两个非N状态s和f，分别作为P初始状态和终结状态。
4. P增加转移$\delta(s,\varepsilon,X_0)=\{(q_0,Z_0X_0)\}$，$Z_0$是N开始符号。
5. 对N的每一状态q，为P增加转移$\delta(q,\varepsilon,X_0)=\{(f,\varepsilon)\}$。



定理7.4 对于PDA N，存在等价的PDA P。

- 定理7.4 如果对于PDA $N=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta',q_0,Z_0)$有$L=L(N)$，那么存在一个PDA P使得$L=L(P)$。

- 当且。已知$(q_0,w,Z_0)\vdash_N^* (q,\varepsilon,\varepsilon)$，由定理7.1有$(q_0,w,Z_0X_0)\vdash_N^* (q,\varepsilon,X_0)$，根据规则1，有$(q_0,w,Z_0X_0)\vdash_P^* (q,\varepsilon,X_0)$，根据规则4，$\delta(s,\varepsilon,X_0)=\{(q_0,Z_0X_0)\}$，有$(s,w,X_0)\vdash_P (q_0,w,Z_0X_0)\vdash_P^* (q,\varepsilon,X_0)$，由规则5有$\delta(q,\varepsilon,X_0)=\{(f,\varepsilon)\}$，则$(q,\varepsilon,X_0)\vdash(f,\varepsilon,\varepsilon)$。那么w为P接受。

- 仅当。已知$(s,w,X_0)\vdash_P^* (f,\varepsilon,\alpha)$，那么根据规则4，有$(s,w,X_0)\vdash_P (q_0,w,Z_0X_0)$，现在P要能移动到$(f,\varepsilon,\alpha)$，根据规则5，必须到达ID$(q,\varepsilon,X_0)$，即$(q_0,w,Z_0X_0)\vdash_P^* (q,\varepsilon,X_0)$，根据规则1，这就要求$(q_0,w,Z_0)\vdash_N^* (q,\varepsilon,\varepsilon)$，而且过程中不会把$X_0$弹掉，因为它不是PDA N的栈符号。所以N接受w。

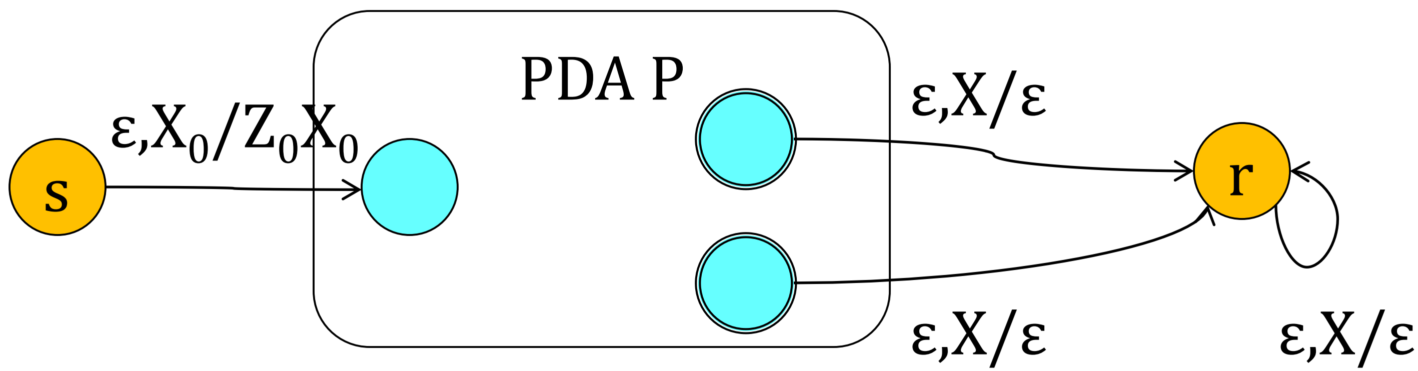
定理7.5 对于PDA P，存在等价PDA N。

- N 能模拟P。
  - P： $(q_0,w,Z_0)\vdash_P^* (f,\varepsilon,\alpha)$
  - N： $(q_0,w,Z_0)\vdash_N^* (q,\varepsilon,\varepsilon)$

- 若P 接受，N 会清空其栈。
- N 必须避免意外清空其栈，所以它使用一个特殊栈底标记来俘获非接受但P已清空其栈的情况。

由PDA P构造等价PDA N的规则

1. 将P所有状态、栈符号、转移函数均作为N的。
2. 增加一个非P栈符号X_0作为N的开始符号。
3. 增加两个非P状态s和r，分别作为N初始状态和新状态。
4. N增加转移$\delta'(s,\varepsilon,X_0)=\{(q_0,Z_0X_0)\}$。 q_0和Z_0分别为P初始状态和开始符号。
5. 对P的每个终结状态q，任意栈符号X，给N增加转移 $\delta'(q,\varepsilon,X)=\delta(r,\varepsilon,X)=\{(r,\varepsilon)\}$。



定理7.5　若有PDA P则有等价PDA N

- 定理7.5 如果对于PDA $P=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta_F,q_0,Z_0,F)$有$L=L(P)$，那么存在一个PDA N使得$L=L(N)$。

- 当且。已知$(q_0,w,Z_0)\vdash_P^* (q,\varepsilon,\alpha),(q_0,w,Z_0X_0)\vdash_N^* (q,\varepsilon,\alpha X_0)$，$(s,w,X_0)\vdash_N (q_0,w,Z_0X_0)\vdash_N^* (q,\varepsilon,\alpha X_0)\vdash_N^* (r,\varepsilon,\varepsilon)$

- 仅当。类似思路。

7.4 确定型PDA

- DPDA同时满足如下条件：
  - $\delta(q, a, X)$
  - $\delta(q, \varepsilon, X)$
  - $\delta(q, a, \varepsilon)$
  - $\delta(q, \varepsilon, \varepsilon)$
- **定义7.4** PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$是确定型的，当且仅当，
- $\forall q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, X \in \Gamma \cup \{\varepsilon\} \cdot \delta(q, a, X)$至多有一个成员

L_{wwr}语言的这个PDA 是不确定的

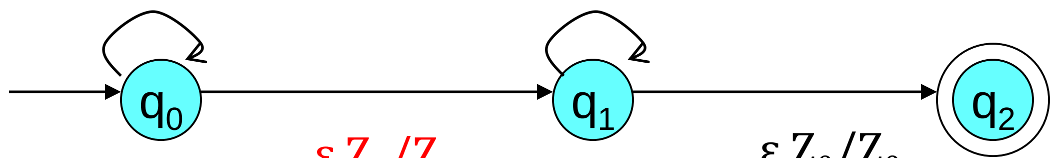
增长栈

$0,Z_0/0Z_0$
$1,Z_0/1Z_0$
$0,0/00$
$0,1/01$
$1,0/10$
$1,1/11$

弹出栈以匹配符号

为什么必须是不确定的？

$0,0/\varepsilon$
$1,1/\varepsilon$



$\varepsilon,Z_0/Z_0$
$\varepsilon,0/0$
$\varepsilon,1/1$

$\varepsilon,Z_0/Z_0$

通过接受状态方式接受

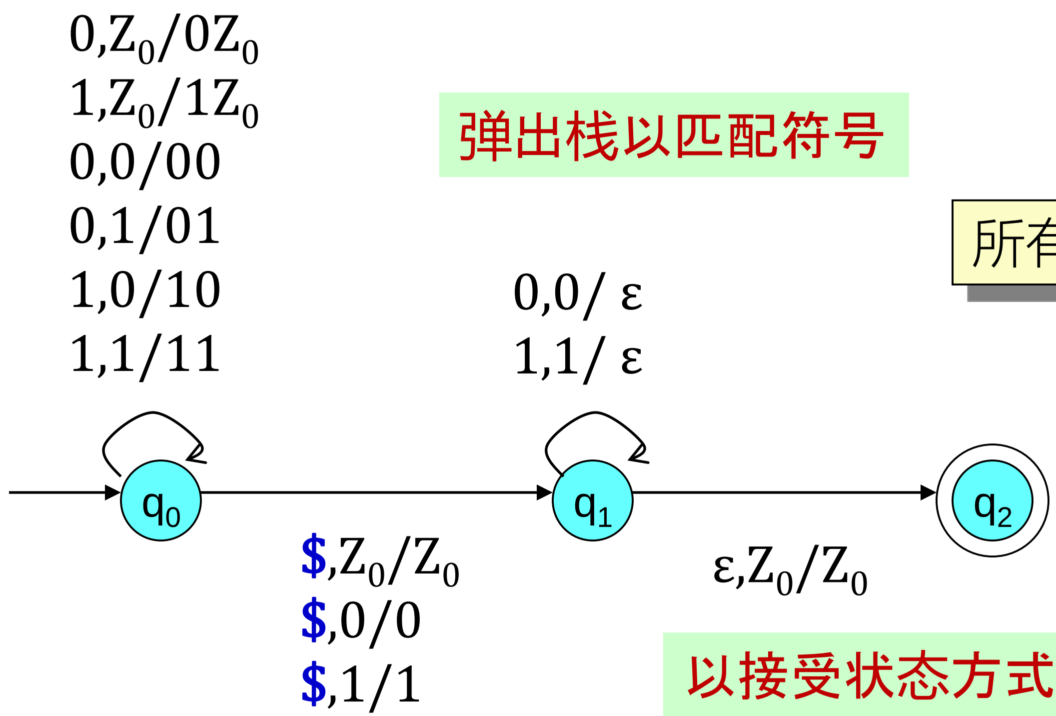
切换到弹出模式

要消除猜测,需要用户在中间插入一个符号。

D-PDA for L_{wcwr}

$L_{wcwr}=\{w\$w^R \mid \$$ 是一个不属于w的特殊符号$\}$

栈增长



弹出栈以匹配符号

所有迁移都变成确定的

以接受状态方式接受

切换到弹出状态

例子显示: 非确定性PDA ≠ D-PDA

DPDA的语言

- 定理7.7 如果L是正则语言，则存在DPDA P有L=L(P)。
- DPDA可以模拟DFA，只需要栈不起作用即可。
- DPDA的语言包含正则语言，但包含于CFL。
- ~~定理7.8 有DPDA P它的语言L=N(P)，当且仅当L有前缀性质且有DPDA Q，并且L=L(Q)。~~
- ~~语言L有前缀性质，当且仅当L的任意两个元素之间都不存在前缀关系。~~

小结

- PDA定义、转移函数
- PDA的移动、瞬时描述
- PDA的语言、两种接受方式
- 确定性PDA

- 作业：P157 6.1.1；P163 6.2.2a