气固两相流及其燃烧

西安交通大学能源与动力工程学院

主讲人：周屈兰

3 气固两相流中相间作用力

3.1 气固两相流中颗粒的受力分析

颗粒受力分析（这是成功分析气体颗粒流的最重要的步骤）

- 第一类：与流体、流动无关的力：重力、电磁力
- 第二类：机械运动学受力：惯性力（由颗粒的加速度产生）、离心力（旋转坐标系的角速度产生）、科里奥利力（旋转坐标系的角速度与线速度）
- 第三类：产生于流体的作用但与流体－颗粒之间相对运动无关的力，如浮力、压差力
- 第四类：依赖于流体颗粒相对运动的相互作用力，如阻力等，一类与相对运动的方向平行，一类与相对运动的方向垂直
- 第五类：非机械力学的力，如热泳、声泳、光泳

3.1.1 重力与浮力

$$F_g = \frac{1}{6}\pi d_p^3 \rho_p g \qquad F_a = \frac{1}{6}\pi d_p^3 \rho_g g$$

d_p一颗粒直径，

ρ_p一颗粒密度

ρ_g一流体密度

3.1.2 粘性阻力

- 1710年牛顿对粘性流体中作定常运动的圆球所受阻力大小进行了研究，当相对速度很大时，得到阻力计算公式

$$F_r = 0.22\pi r_p^2 \rho (v - v_p)^2$$

- 颗粒与气流存在相对运动，气流作用在颗粒上的力取决于滑移速度。但粘性阻力收到许多因素的影响，不但和颗粒的雷诺数有关，还与流体的湍流运动、流体可压缩性、流体与颗粒的温度不同、颗粒形状等，难以统一表达。为研究方便，引入阻力系数的概念

$$C_D = \frac{F_r}{\pi r_p^2 \left[\frac{1}{2} \rho (v - v_p)^2 \right]}$$

则阻力表示为 $\vec{F}_r = \frac{1}{2} C_D \pi r_p^2 \rho \left| \vec{v} - \vec{v}_p \right| (\vec{v} - \vec{v}_p)$

3.1.3 附加质量力

- 颗粒相对流体作加速运动，颗粒周围的流体也被加速，这个力大于加速颗粒本身所需的力，相当于颗粒的质量增加，所以成为附加质量力（虚假质量力）
- 理论值：$\vec{F}_{vm}=\frac{1}{2}\rho_g V_p\left(\frac{d\vec{v}_g}{dt}-\frac{d\vec{v}_p}{dt}\right)$

为同体积流体惯性力的一半，实际值大于理论值，需要经验系数修正。

3.1.4 Basset力

- 颗粒在粘性流体中速度变化时，周围流场不能马上稳定，形成一个瞬时的流动阻力，计及颗粒的加速历程。（推导过程：对颗粒的非稳态加速过程进行理论求解，其结果与稳态阻力有一项的差异）

$$F_B = \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \rho_g \mu} \int_{-\infty}^{t} \frac{\frac{dv_g}{d\tau} - \frac{dv_p}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$$

- 在急剧加速过程中，这个力的影响与粘性阻力相当。

3.1.5 压力梯度力

- 在有压力梯度的流场中收到的压力梯度引起的非均匀分布压力

$$\vec{F}_p = -\frac{4}{3}\pi r^3 \nabla p = -V_p \nabla p$$

- 对煤粉颗粒来说，该力很小，可以忽略不计

3.1.6 Magnus力

- 颗粒旋转速度的数量级约为1000r/s左右
- 旋转的原因：速度梯度造成冲刷颗粒不均匀，形状不规则造成各点受到阻力摩擦力不同，颗粒之间及颗粒与固体壁面之间的碰撞，不均匀的蒸发、析出、燃烧过程。
- 旋转产生横向的力（垂直于气流速度方向的力）
- 对球形的理论值 $\vec{F}_M = \frac{1}{8}\pi d_p^3 \rho_g \left(\vec{u}_g - \vec{u}_p\right) \times \vec{\omega}\left(1 + o(\mathrm{Re}_p)\right)$
- 实际应用定义升力系数： $C_L = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho_g \pi r_p^2 \left(u_g - u_p\right)^2}$

  经验值，大约0.1～1之间

3.1.7 Saffman升力

- Saffman升力由流场速度梯度引起，不是由颗粒旋转引起。

$$F_S = 1.61(\mu\rho_g)^{1/2} d_p^2 (u_g - u_p)\left|\frac{du_g}{dy}\right|^{1/2}$$

- 一般在主流区，由于速度梯度很小，该力很小，只有在速度边界层中才变的很明显。是使得颗粒不沉积的力之一。

3.1.8 其它力

- 热泳力：由布朗运动产生，在d<10μm时超过重力。
- 光泳力：吸收光能后加热附近气体分子。
- 静电力

各种力的数量级

	1μm	10μm	100μm
气流曳引阻力F_r	0.59×10^{-12}	0.15×10^{-9}	0.82×10^{-7}
压力梯度力F_p	0.15×10^{-15}	0.15×10^{-12}	0.15×10^{-9}
Magnus力F_l	0.82×10^{-14}	0.82×10^{-11}	0.82×10^{-8}
Saffman力F_s	0.26×10^{-15}	0.28×10^{-12}	0.33×10^{-9}
附加质量力F_{vm}	0.53×10^{-16}	0.64×10^{-13}	0.72×10^{-10}
Basset力F_B	0.58×10^{-12}	0.62×10^{-10}	0.76×10^{-8}
热泳力F_T	0.19×10^{-14}	0.20×10^{-13}	0.20×10^{-12}
重力F_g	0.77×10^{-14}	0.77×10^{-11}	0.77×10^{-8}

3.2 颗粒的运动阻力

3.2.1 球形颗粒在稳定流动时的阻力规律

一、低雷诺数（Re<1）——蠕流

- d足够小，与流体的相对速度不大，略去N-S方程中的惯性项，可求出近似解：

$$F_r = 3\pi\mu d_p u_\infty$$

其中，摩擦阻力占2/3，压差阻力占1/3

- $$C_d = \frac{F_r}{\frac{1}{4}\pi d_p^2 \cdot \frac{1}{2}\rho_g u_\infty^2} = \frac{24\mu}{\rho_g u_\infty d_p} = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

——Stokes阻力定律，在Re<1以及颗粒表面附近区域适用

- Ossen修正（考虑了部分惯性项）：

$$C_d = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1+\frac{3}{16}\mathrm{Re}\right)$$

但由于得到改善的主要是远离球面的区域，在阻力系数计算方面改善不大。

- 还有很多其它改进解，基本上都是 $C_d = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1+f(\mathrm{Re})\right)$ 的形式。

二、高雷诺数（Re>1）

惯性力不能忽略，理论求解N-S方程非常困难

- （1）Re<1，层流区（Stokes区）
- （2）1<Re<1000，过渡区（Allen区）

形状阻力份额↑，摩擦阻力份额↓，3<Re<400，

$$C_d = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1+\frac{1}{6}\mathrm{Re}^{2/3}\right)$$

- （3）Re>1000，湍流区（Newton区）

牛顿阻力定律：C_d=0.445；Re>3.5×10⁵，流动性质不稳定。

有大量的经验阻力系数关联式发表；有一个拟合公式适用范围相对较大：

$$C_d = \frac{24}{\mathrm{Re}}+\frac{6}{1+\sqrt{\mathrm{Re}}}+0.4 \qquad 0\le \mathrm{Re}\le 2\times 10^5。$$

三、阻力系数的实验数值和经验关联式

“标准阻力曲线”，用一组形如 $C_d = \frac{k_1}{\mathrm{Re}} + \frac{k_2}{\mathrm{Re}^2} + k_3$ 的拟合公式表达不同雷诺数时阻力系数的变化

3.2.2 球形颗粒在不稳定流动时的阻力规律

- Re<1：

$$C_d = \frac{24}{Re}\left(1+\frac{1}{2}d_p\sqrt{\frac{1}{\pi\nu\tau}}\right)$$

τ为定性时间，从状态改变到重新稳定所经过的时间

- Karanfilian和Kotas研究，在液体中：

$$C_d = C_{ds}\left[1+\frac{d_p}{(u_g-u_p)^2}\frac{d}{dt}(u_g-u_p)\right]^{1.2\pm0.03}$$

3.2.3 气体的稀薄效应对阻力系数的影响

- 颗粒直径远远大于气体分子自由程时，认为气体是连续介质；但对于特别小的颗粒或低密度的气体，连续介质假设不成立。
- Kundsen数描述气体稀薄的程度$Kn \propto \dfrac{Ma}{\mathrm{Re}}$，然后在非连续流动时对阻力系数修正：

$$G = \frac{\text{连续流动的阻力系数}}{\text{非连续流动的阻力系数}}$$

- Fuch和Firelander提出G和Kn的关系

$$G = 1 + Kn\left[2.492 + 0.84\exp\left(-1.74/Kn\right)\right] > 1$$

Kn↑，G↑，Cd↓

3.2.4 壁面的存在对球形颗粒阻力系数的影响

$\lambda=\frac{d_p}{D}$，$\lambda<<1$时，壁面的存在可以忽略；但是颗粒较大或管道很细时，$\lambda\uparrow$，面对颗粒阻力系数的影响↑，颗粒阻力系数将有较大增加，且 $K_F=\frac{\text{管道中颗粒阻力}}{\text{无界流动中颗粒阻力}}$

- Re<1时，$K_F=\left(1-\frac{cC_{d\infty}}{6\pi\mu u_\infty l}\right)^{-1}$，$l$是颗粒中心到壁面的距离，$c$是取决于壁面情况的常数。
- Re<50时，$K_F=1+\frac{24}{\mathrm{Re}}C_{d\infty}(k-1)$，k是$\lambda$的函数。
- 100<Re<10^4时，$K_F=\frac{1}{1-1.6\lambda^{1.6}}$，$\lambda\le0.6$，$K_F$与Re无关
- Re>10^5时，$K_F=\frac{1+1.45\lambda^{4.5}}{(1-\lambda^2)^2}$，$\lambda\le0.92$，$K_F$与Re无关。

3.2.5 颗粒浓度对球形颗粒阻力系数的影响

- 颗粒浓度增加时，颗粒间相互作用增强，颗粒对流体的排挤也增强

- 颗粒群阻力系数修正，$\Psi(C_v)$与颗粒体积浓度相关，体积份额＝0.2，修正系数≈2

$$\Psi(C_v)=\frac{4+3C_v+3\left(8C_v-3C_v^2\right)^{1/2}}{\left(2-3C_v\right)^2}$$

3. 2. 6 非球形颗粒的阻力系数

一、引入球形度对非球形颗粒的阻力系数修正

$$C_d' = f\left(\mathrm{Re}, \psi_w\right)$$

Re<1 $C_d' = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(0.843\lg\frac{\psi_w}{0.065}\right)^{-1}$ 湍流区 $C_d' = 5.31 \sim 4.884$

二、引入动力系数

相同Re时，球形阻力系数/非球形阻力系数

$$K_\varphi = \left(\frac{C_d'}{C_d}\right)_{\mathrm{Re}}$$

Robins：对煤粉，d<100μm，$K_\varphi \to 1.7$；

Re<1，$C'_d = 1.7C_d$； Re>1，$C'_d = 1.7\mathrm{Re}^{0.23}C_d$。

3.2.7 颗粒在燃烧时的阻力系数

周围气体的粘度上升，传热、传质、化学反应不均匀→颗粒形状变化

- 煤粉：挥发分析出对运动的影响。
- 以煤粒温度作为定性温度Re<50，C_d=52/Re
- 以气流温度作为定性温度，T_p/T_g↑，C_d↑

4 气固两相流的松弛过程

4.1 气固两相非平衡流动的特点与松弛现象

- 气体与颗粒的速度、温度不同，有动量、热量的交换，使得二者的速度、温度有互相接近的趋势。
- 松弛或弛豫：随时间衰减的偏离平衡态的过程。

  非平衡→平衡
- 松弛量ϕ，ϕ_∞是不依赖于时间的常数，$\phi_\infty = \lim\limits_{\tau\to\infty}\phi$， τ——松弛过程的特征时间。

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi_\infty - \phi}{\tau}$$

4.2 单颗粒的Lagrangian运动方程

$$m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \sum \vec{F} \qquad\qquad m_p = \frac{1}{6}\pi d_p^3 \rho_p$$

一维运动方程（忽略侧向力）

$$\frac{1}{6}\pi d_p^3 \rho_p \frac{du_p}{dt} = \frac{1}{4}\pi d_p^2 C_d \frac{1}{2}\rho_g \left(u_g - u_p\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\pi d_p^3 \rho_g \left(\frac{du_g}{dt} - \frac{du_p}{dt}\right) +$$

$$\frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \rho_g \mu} \int_{-\infty}^{t} \frac{\frac{du_g}{d\tau} - \frac{du_p}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{1}{6}\pi d_p^3 \left(\rho_p - \rho_g\right) g_x$$

忽略Basset力，再根据ρ_g/ρ_p<<1，得

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{3}{4}\frac{C_d}{d_p}\frac{\rho_g}{\rho_p}\left(u_g - u_p\right)^2 + g_x$$

4.2 单颗粒的Lagrangian运动方程

- 对于Re<1的Stokes阻力系数 $C_d=\frac{24}{\mathrm{Re}}=\frac{24\mu}{\rho_g(u_g-u_p)d_p}$

  带入上式，可得 $\frac{du_p}{dt}=\frac{u_g-u_p}{\frac{\rho_p d_p^2}{18\mu}}+g_x$

定义 $\tau_v=\frac{\rho_p d_p^2}{18\mu}$，速度松弛时间（速度弛豫时间、速度松弛因子）

其量纲为 $[\tau_v]=\frac{[\rho_p][d_p]^2}{[\mu]}=\frac{ML^{-3}\cdot L^2}{ML^{-1}T^{-1}}=T$

- 对于Re>1的情况下，$C_d=\frac{24}{\mathrm{Re}}f(\mathrm{Re})$ 则颗粒运动方程可以改写为

$$\frac{du_p}{dt}=\frac{u_g-u_p}{\tau_v}f(\mathrm{Re})+g_x$$

4.3 典型流场中气体—颗粒间的速度松弛过程

假定：Stokes阻力区，$f(\mathrm{Re})=1$，$\frac{du_p}{dt}=\frac{u_g-u_p}{\tau_v}+g_x$

4.3.1 具有初速度的颗粒在静止流场中的阻尼运动

颗粒初速度，$u_p\big|_{t=0}=u_{p0}$ ，流体$u_g=0$，无外力$g_x=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_p}{u_{p0}}=e^{-\frac{t}{\tau_v}}$$

$t=\tau_v$ 时，$\frac{u_p}{u_{p0}}=\frac{1}{e}=36.8\%$　　$t=2\tau_v$ 时，$\frac{u_p}{u_{p0}}=\frac{1}{e^2}=13.5\%$

$t=5\tau_v$ 时，$\frac{u_p}{u_{p0}}=\frac{1}{e^5}=0.7\%$　　$t\to\infty$ 时，$\frac{u_p}{u_{p0}}=0$

τ_v的物理意义

- τ_v的物理意义：颗粒与流体速度滑移减小到其初值的1/e时所需的时间。表示了颗粒追踪流体的能力， τ_v越小，越易于追踪，气固间松弛过程进行得越快。
- 由 $u=\dfrac{dx}{dt}$ ，上式积分得到颗粒运动轨迹方程：

$$x=\tau_v\left(u_{p0}-u_p\right)=\tau_v u_{p0}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_v}\right)\right)$$

$u_p\big|_{t\to\infty}=0$ ， $x\big|_{t\to\infty}=\tau_v u_{p0}$ 。运动距离有限，松弛长度、制动距离，在静止流场中作阻尼运动达到静止。

- 松弛长度 $L_v=\int_0^{n\tau_v}u_p dt$ ，$n\tau_v$——松弛过程持续的时间，n=5近似认为松弛过程结束。

4.3.2 初速度为0的颗粒在恒速流场中的运动

颗粒初速度 $u_p\big|_{t=0}=0$ ，流体u_g=const，无外力g_x=0

$$u_p=u_g\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right) \qquad x=\tau_v u_g\left(\frac{t}{\tau_v}+\exp\left(-\frac{t}{\tau_v}\right)-1\right)$$

u_p以负指数的形式$\rightarrow u_g$

4.3.3 颗粒在匀加速流场中的运动

颗粒初速度 $u_p|_{t=0}=0$ ，流体$u_g=bt$，无外力$g_x=0$

$$u_p = bt - b\tau_v\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)$$

在匀加速流场中，$t\uparrow$，$u_p\uparrow$，$(u_g - u_p)\uparrow$，经过几倍的松弛时间后，达到与流体相同的加速度，此时颗粒$u_g - u_p = b\tau_v$ $=\mathrm{const}$，可以说颗粒的运动落后流体一段时间τ_v。

综上所述：

（1）若流场状态不变，则松弛过程使$u_g \to u_p$，趋近的快慢取决于τ_v的大小。

（2）若流场状态变化，则颗粒始终不能同流体达到平衡。

τ_v小，表示颗粒跟随性好，相对于流体落后时间短。

对于一般情况，颗粒初速度 $u_p\big|_{t=0}=u_{p0}$，流体$u_g=bt$，有外力g_x

$$\frac{du_p}{dt}=\frac{u_{g0}+bt-u_p}{\tau_v}+g_x \qquad (1)$$

令 $X=u_{g0}+bt-u_p$ ，则 $\frac{dX}{dt}=-\frac{du_p}{dt}+b$ ，$\frac{du_p}{dt}=-\frac{dX}{dt}+b$ 带入（1）

则

$$-\frac{dX}{dt}=\frac{X}{\tau_v}+(g_x-b) \qquad (2)$$

令 $Y=\frac{X}{\tau_v}+(g_x-b)$，则 $\frac{dY}{dt}=\frac{1}{\tau_v}\frac{dX}{dt}$ ，$\frac{dX}{dt}=\tau_v\frac{dY}{dt}$ 带入（2）

则 $-\tau_v\frac{dY}{dt}=Y$ 即 $\frac{dY}{Y}=-\frac{1}{\tau_v}dt$

回代得 $$u_p = u_{g0} + bt + \left[Ce^{-\frac{t}{\tau_v}} - (g_x - b) \right] \tau_v$$

根据 $u_p \big|_{t=0} = u_{p0}$，得 $$C = -\frac{u_{p0} - u_{g0}}{\tau_v} + (g_x - b)$$

得到通解 $$u_p = u_{g0} + bt + (u_{p0} - u_{g0}) e^{-\frac{t}{\tau_v}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_v}} \right) (g_x - b) \tau_v$$

特例：

① $g_x=0$， $$u_p = u_{g0} + bt + (u_{p0} - u_{g0}) e^{-\frac{t}{\tau_v}} - b\tau_v \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_v}} \right)$$

② $g_x=0$， $b=0$， $$u_p = u_{g0} + (u_{p0} - u_{g0}) e^{-\frac{t}{\tau_v}}$$

③ $g_x=0$，$u_{p0}=0$，

$$u_p=u_{g0}+bt-u_{g0}e^{-\frac{t}{\tau_v}}-b\tau_v\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)=u_{g0}+b(t-\tau_v)+(b\tau_v-u_{g0})e^{-\frac{t}{\tau_v}}$$

④ $g_x=0$，$u_{p0}=0$，$b=0$，

$$u_p=u_{g0}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)$$

⑤ $g_x=0$，$u_{p0}=0$，$u_{g0}=0$，

$$u_p=bt-b\tau_v\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)$$

⑥ $g_x\neq0$，$u_{p0}=0$，$u_{g0}=0$，$b=0$，

$$u_p=g_x\tau_v\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)$$

4.3.4 颗粒在静止流场中的重力沉降

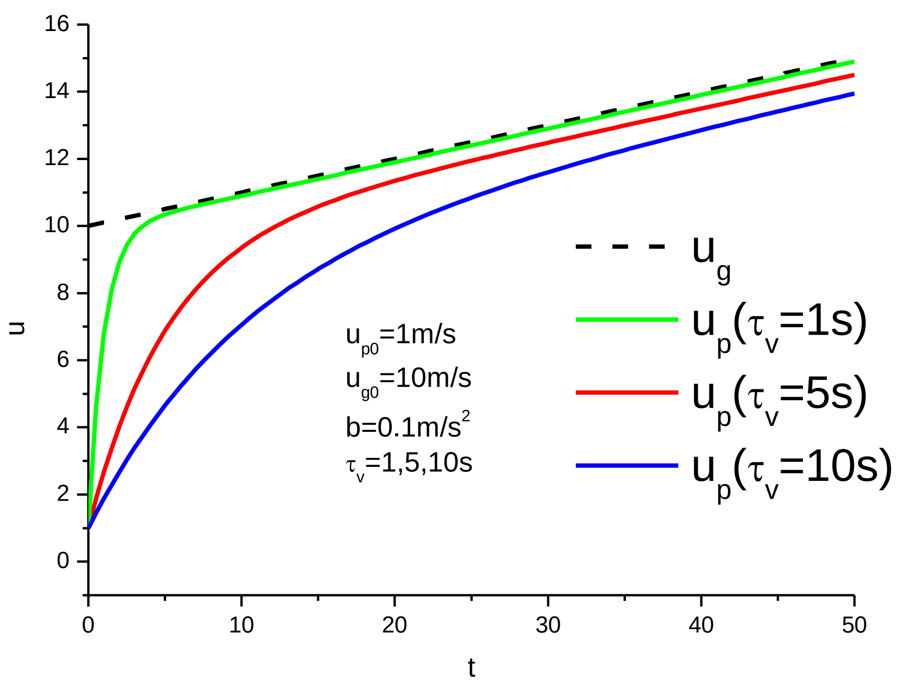
- $g_x=g$， $u_{p0}=0$， $u_{g0}=0$， $b=0$， $u_p=g\tau_v\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)$ ，$u_p \to g\tau_v$，称为终端沉降速度 u_t，即在重力作用下颗粒在静止流场中作自由沉降时所达到的恒定速度（或最大速度）

- 在Stokes阻力区， $u_t=g\tau_v=\dfrac{\rho_p d_p^2 g}{18\mu}$

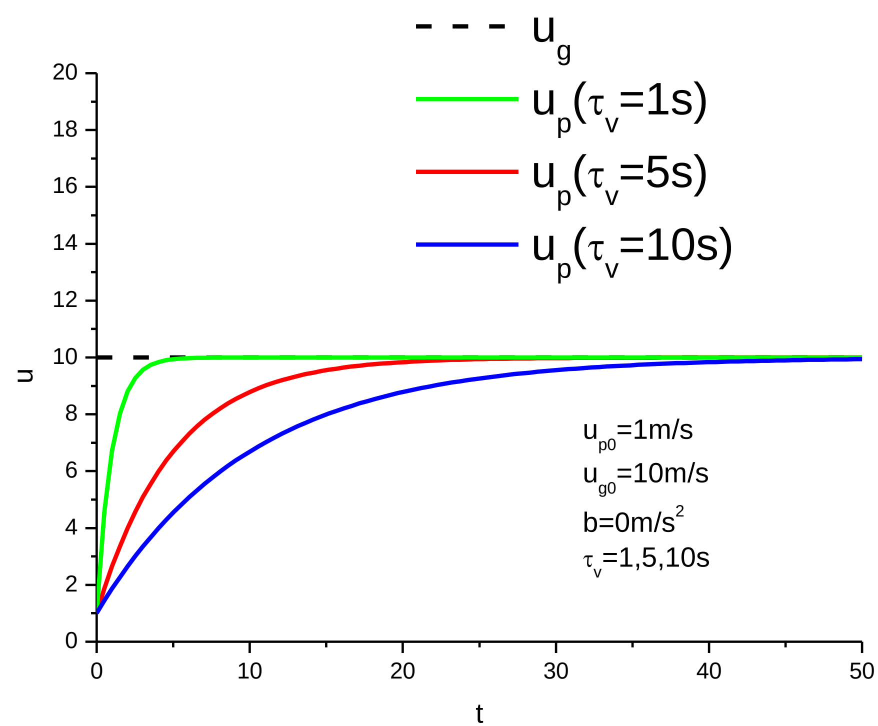
- 终端沉降速度的一般表达式可写为：

$$u_t=g\tau_v=\frac{\rho_p d_p^2 g}{18\mu f(\mathrm{Re})} \quad , \qquad \mathrm{Re}=\frac{\rho_g u_t d_p}{\mu}$$

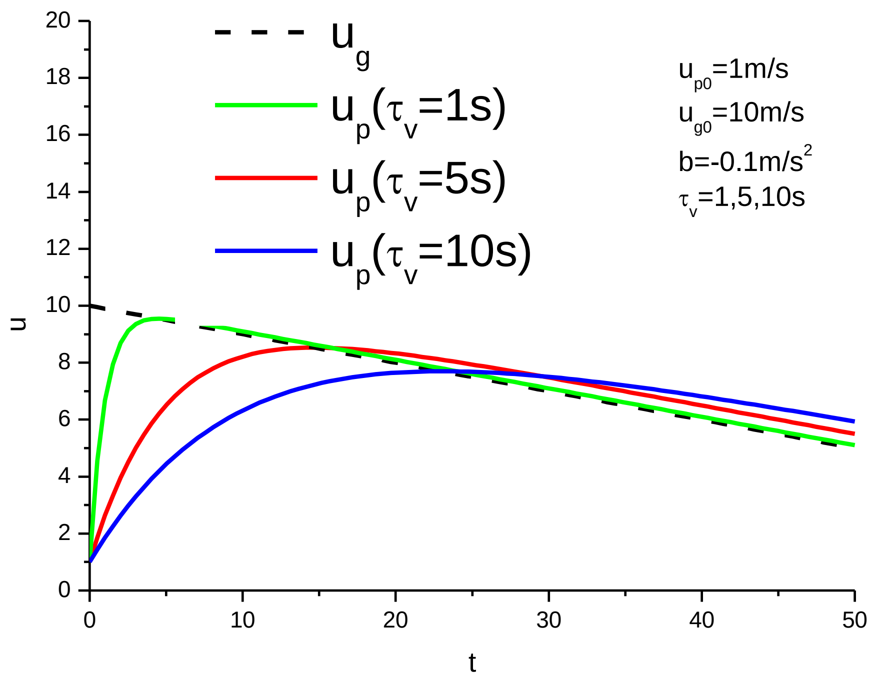
$$u_p = u_{g0} + bt + \left(u_{p0} - u_{g0}\right)e^{-\frac{t}{\tau_v}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right)\left(g_x - b\right)\tau_v$$

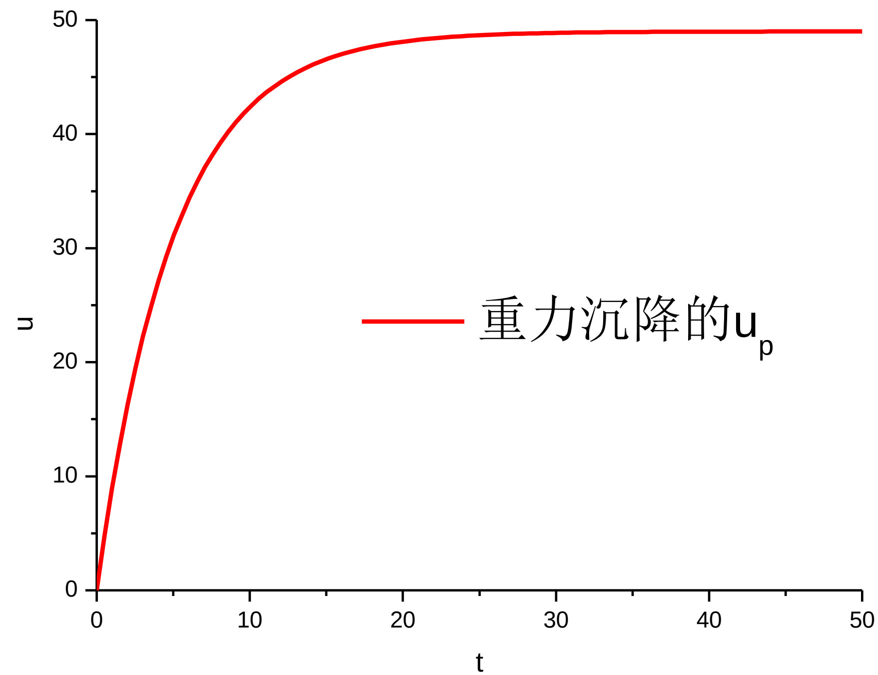


b>0



b=0


u
t
u_g
$u_p(\tau_v=1s)$
$u_p(\tau_v=5s)$
$u_p(\tau_v=10s)$
u_{p0}=1m/s
u_{g0}=10m/s
b=-0.1m/s^2
τ_v=1,5,10s


u
t
重力沉降的u_p

b<0

g重力沉降

4.3.5 横向喷入流速为恒定的流场中的颗粒运动

二维流动问题：忽略重力，设流场速度方向为x，流速为恒定u_g，颗粒射入点位置$x=0, y=0$，颗粒初速度u_{p0}，v_{p0}，求颗粒轨迹及穿透流体的深度。

颗粒运动方程

$$\begin{cases} \dfrac{du_p}{dt} = \dfrac{u_g - u_p}{\tau_v} f(\mathrm{Re}) \\ \dfrac{dv_p}{dt} = -\dfrac{v_p}{\tau_v} f(\mathrm{Re}) \\ u_p\big|_{t=0} = u_{p0}, v_p\big|_{t=0} = v_{p0} \\ \mathrm{Re} = \dfrac{\rho_g d_p}{\mu}\sqrt{(u_g - u_p)^2 + v_p^2} \end{cases}$$

当f(Re)=1时，可以分开求解

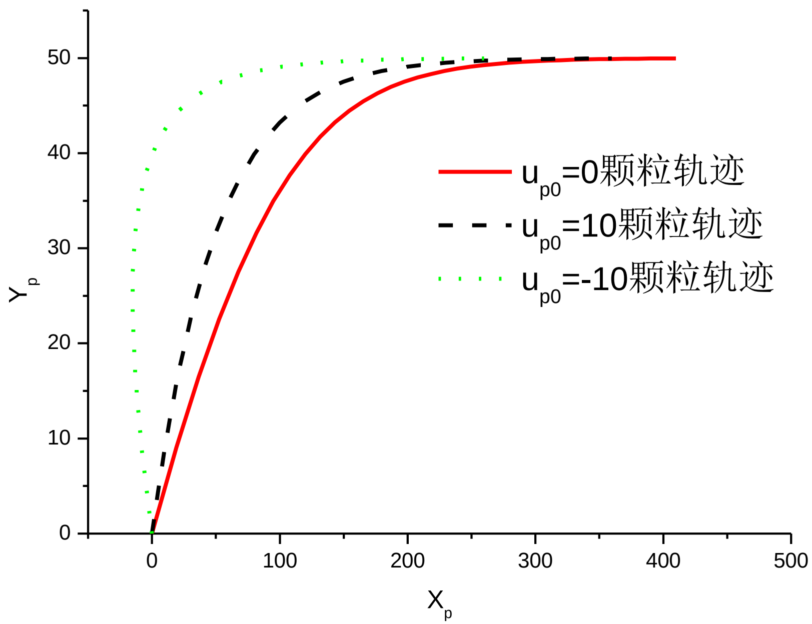
$$\begin{cases} u_p = u_g + (u_{p0} - u_g) e^{-\frac{t}{\tau_v}} \\ v_p = v_{p0} e^{-\frac{t}{\tau_v}} \end{cases}$$

积分得，

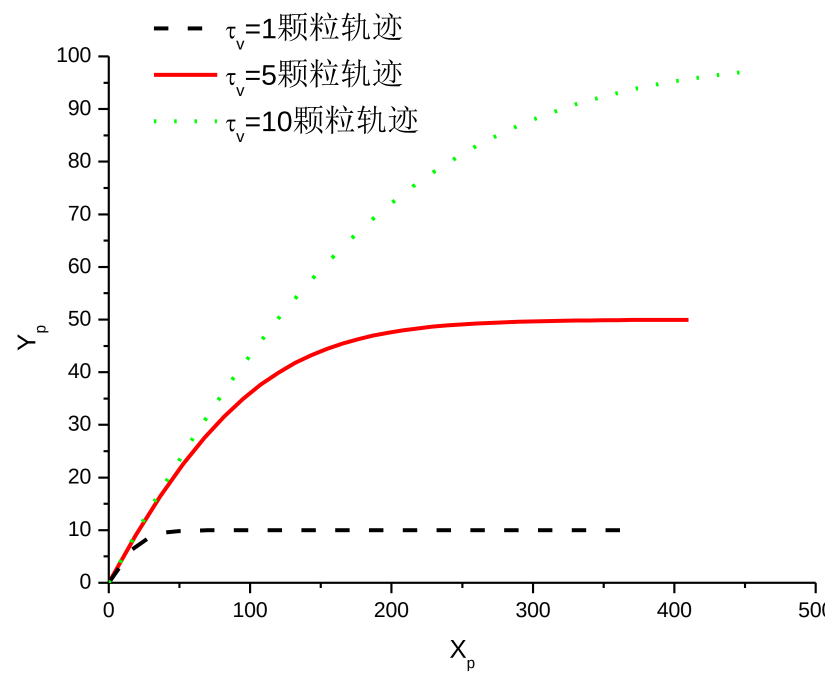
$$\begin{cases} x_p = u_g t + \tau_v (u_{p0} - u_g)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right) \\ y_p = \tau_v v_{p0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_v}}\right) \end{cases}$$

穿透深度

当f(Re)≠1时，x,y方向的运动通过Re数相互耦合，一般情况下只能用数值求解



不同入射速度



不同松弛时间

4.3.6 振荡气流中颗粒的运动

假定颗粒受谐振气流支配，$u_g = u_{g0}\sin\omega t$ ，运动中只考虑Stokes阻力定律，则得

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{u_{g0}\sin\omega t - u_p}{\tau_v} \qquad (1)$$

令 $X = \dfrac{u_{g0}\sin\omega t - u_p}{\tau_v}$，则 $\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\omega u_{g0}\cos\omega t - \dfrac{du_p}{dt}}{\tau_v}$

$$\Rightarrow \frac{du_p}{dt} = -\tau_v\frac{dX}{dt} + \omega u_{g0}\cos\omega t = X \quad 则 \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{X - \omega u_{g0}\cos\omega t}{\tau_v}$$

令 $Y = -\dfrac{X - \omega u_{g0}\cos\omega t}{\tau_v}$，则 $\dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{\omega^2 u_{g0}\sin\omega t + \dfrac{dX}{dt}}{\tau_v}$

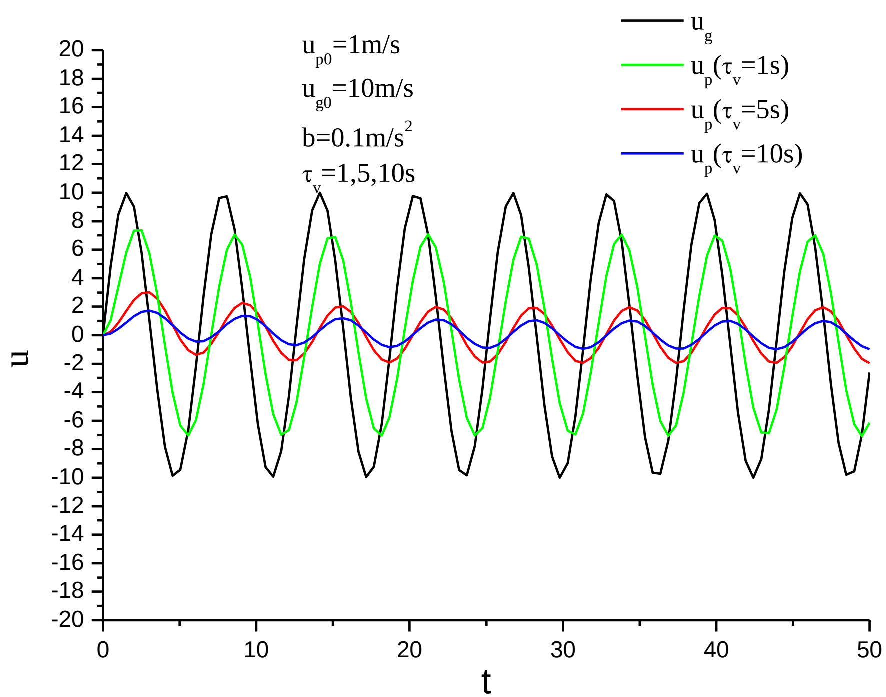
$$\frac{dX}{dt} = -\tau_v\frac{dY}{dt} - \omega^2 u_{g0}\sin\omega t = Y \Rightarrow \frac{dY}{dt} = \frac{-\omega^2 u_{g0}\sin\omega t - Y}{\tau_v} \qquad (2)$$

(1)×ω^2+(2)得， $$\frac{d\left(\omega^2 u_p + Y\right)}{dt} = -\frac{\omega^2 u_p + Y}{\tau_v}$$

得 $$\omega^2 u_p + Y = \omega^2 u_p - \frac{\dfrac{u_{g0}\sin\omega t - u_p}{\tau_v} - \omega u_{g0}\cos\omega t}{\tau_v} = Ce^{-\frac{t}{\tau_v}}$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_v^2}\right)u_p = Ce^{-\frac{t}{\tau_v}} + \frac{u_{g0}\sin\omega t}{\tau_v^2} - \frac{\omega u_{g0}\cos\omega t}{\tau_v}$$

t =0时，u_{p0}=0， 则 $C = \dfrac{\omega u_{g0}}{\tau_v}$ ，$u_p = \dfrac{1}{1+\tau_v^2\omega^2}\left[\tau_v \omega u_{g0}\left(e^{-\frac{t}{\tau_v}} - \cos\omega t\right) + u_{g0}\sin\omega t\right]$



4.4 颗粒群的松弛过程

- t=0，气流和颗粒的初速度u_{g0}，u_{p0}，φ_p为颗粒群所占的质量分数，φ_g为气体所占的质量分数，则$\varphi_p+\varphi_g=1$，初始动量 $u_m=u_{g0}\varphi_g+u_{p0}\varphi_p$
- 设相间无质量交换，流场均匀和无限延展，φ_p保持不变，则混合体系的总动量守恒 $u_g\varphi_g+u_p\varphi_p=u_{g0}\varphi_g+u_{p0}\varphi_p=u_m$

$\Rightarrow\ u_g=\dfrac{u_m-u_p\varphi_p}{\varphi_g}$，带入 $\dfrac{du_p}{dt}=\dfrac{u_g-u_p}{\tau_v}$

整理得 $\dfrac{du_p}{dt}=\dfrac{u_m-u_p}{\varphi_g\tau_v}$，设 τ_v为常数

$$u_p=u_m+(u_{p0}-u_m)e^{-\frac{t}{\varphi_g\tau_v}}=(u_{g0}\varphi_g+u_{p0}\varphi_p)\left(1-e^{-\frac{t}{\varphi_g\tau_v}}\right)+u_{p0}e^{-\frac{t}{\varphi_g\tau_v}}$$

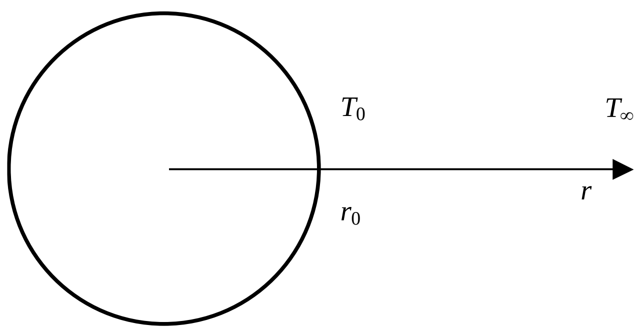
- 可以看出，颗粒群的松弛时间小于单颗 粒的松弛时间，前者为后者的φ_g倍，而且颗粒速度趋于u_m而非u_{g0}。

原因：气相与颗粒相一起松弛，同时向平衡态靠近

$$\frac{u_m - u_{p0}}{u_{g0} - u_{p0}} = \frac{u_{g0}\varphi_g + u_{p0}\varphi_p - u_{p0}}{u_{g0} - u_{p0}} = \varphi_g$$

4.5 气体—颗粒间的温度松弛

4.5.1 无界流场中相对静止的颗粒



球对称坐标系的热传导方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r}=0$$

积分一次 $r^2\frac{\partial T}{\partial r}=C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{C_1}{r^2}$ 再积分一次 $T=-\frac{C_1}{r}+C_2$

根据边界条件，r=r$_0$时，$T_0=-\frac{C_1}{r_0}+C_2$，r→∞时，$T_\infty=C_2$

得 $C_1=(T_\infty-T_0)r_0$ ，$C_2=T_\infty$ ，则 $T=T_\infty-\frac{r_0}{r}(T_\infty-T_0)$

则求出r=r$_0$处的热流

$$Q=\lambda 4\pi r_0^2\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r_0}=\lambda 4\pi r_0^2\left(\frac{r_0(T_\infty-T_0)}{r^2}\Big|_{r=r_0}\right)=\lambda 4\pi r_0^2\frac{(T_\infty-T_0)}{r_0}$$

对比牛顿冷却定律，传热量：

$$Q=4\pi r_p^2 h(T_g-T_p)$$

可得 $h=\frac{\lambda}{r_0}$

$$\Rightarrow \quad Nu=\frac{hd}{\lambda}=\frac{\frac{\lambda}{r_0}2r_0}{\lambda}=2$$

4. 5. 2 有相对运动时的情况

由于对流作用的增强

$$Nu = 2 + 0.6\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}^{1/2}$$

Pr为流体的Prandtl数 $\quad \mathrm{Pr} = \dfrac{\mu c_g}{\lambda} = \dfrac{\nu}{a}$

4.5.3 温度松弛过程

设颗粒内部温度均匀，则颗粒与气体间的非稳态传热方程可写为

$$\frac{1}{6}\pi d_p^3\rho_p c_p\frac{dT_p}{dt}=\pi d_p^2 h\left(T_g-T_p\right)$$ 整理得 $$\frac{dT_p}{dt}=\frac{6h}{d_p\rho_p c_p}\left(T_g-T_p\right)=\frac{\frac{hd_p}{\lambda}}{2}\frac{\left(T_g-T_p\right)}{\frac{\rho_p d_p^2 c_p}{12\lambda}}$$

$Nu=2$ ，令 $\tau_T=\dfrac{\rho_p d_p^2 c_p}{12\lambda}$ ，$\dfrac{dT_p}{dt}=\dfrac{\left(T_g-T_p\right)}{\tau_T}$

设气体温度不变T_g=const，$T_p\big|_{t=0}=T_{p0}$，易得 $T_p-T_g=\left(T_{p0}-T_g\right)e^{-\frac{t}{\tau_T}}$

温度松弛时间 τ_T 的物理意义：颗粒与气流动温差减少到初始温差1/e＝36.8%的时所需的时间。

$\dfrac{\tau_T}{\tau_v}=\dfrac{3}{2}\dfrac{c_g}{c_p}\mathrm{Pr}$ ，大多数气体Pr≈2/3，且c_g/c_p≈1，两个松弛时间大致相同。

4.6 平衡流动和冻结流动

一、若某一过程（流动或传热）进行的特征时间 t >>松弛时间 τ，那末颗粒的参数几乎随时都能追随流场参数变化，则这样的流动可视作平衡流动（单相流动），先求混合物的平均物性，用一种等效流体代替两相混合物，再用流体力学方程求解等效的单相流动。

二、$t << \tau$，这样的流动视为冻结流动，颗粒的温度和速度视作不变，两相独立求解（无需耦合）。