第一章

结构振动基本概念

振动是日常生活和工程中普遍存在的现象，有机械振动、电磁振荡、光的波动等形式

机械系统的振动 $\xrightarrow{\text{简化}}$
- 单自由度系统
- 多自由度系统
- 连续体

- 单自由度系统的振动反映振动的一些最基本规律
- 两自由度系统的一些特点可推广到多自由度系统

1.1 单自由度系统的自由振动

自由振动微分方程

- 重力 P 作用下弹簧的静变形

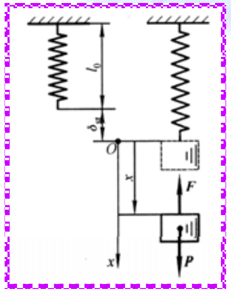
$$\delta_{st}=P/k$$

- 运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P-k(\delta_{st}+x)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

只在恢复力作用下维持的振动称为无阻尼自由振动



$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$ 两端同除以质量 m，并设 $\omega_0^2=k/m$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$$

无阻尼自由振动微分方程的标准形式

- 方程解的形式 $x=e^{rt}$ 代入运动微分方程，可得
- 本征方程 $\Rightarrow$ $r^2+\omega_0^2=0$
- 本征方程的两个根 $\Rightarrow$ $r_1=+i\omega_0$ ，$r_2=-i\omega_0$

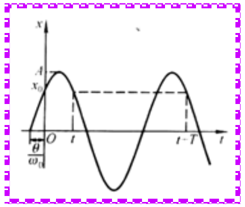
运动微分方程的解

$$\Rightarrow \quad x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

C_1、C_2由运动起始条件确定，令

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\ ,\ \tan\theta = \frac{C_1}{C_2}$$

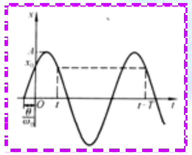
$$\Rightarrow \quad x = A\sin(\omega_0 t + \theta)$$



☞ 上式表示无阻尼振动是简谐振动

无阻尼自由振动的特点

固有频率



- 无阻尼自由振动是简谐振动，是一种周期振动
- 自由振动的周期 $\Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

☞ ω_0 为固有角（圆）频率或固有频率，只与表征系统本身特性的质量和刚度有关，与运动的初始条件无关

- 计算系统的固有频率是研究系统振动问题的重要课题之一，将 $m = P/g$ 和 $k = P/\delta_{st}$ 代入上式

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

☞ 对上述振动系统，只要知道重力作用下的静变形，就可求得系统的固有频率

振幅与初相角 $\quad x = A\sin(\omega_0 t + \theta)$

- A 表示相对于振动中心点 O 的最大位移，称为振幅
- $(\omega_0 t + \theta)$ 称为相位或相位角，θ为初相角，决定了质点的起始位置

将起始 $t = 0$时，物块的坐标 $x = x_0$，速度 $v = v_0$代入

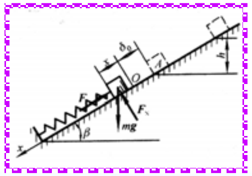
$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= A\sin\theta \\ v_0 &= A\omega\cos\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\ ,\ \tan\theta = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$$

例：如图所示，质量为m = 0.5kg的物块，沿光滑斜面无初速度滑下，当物块下落高度 h = 0.1m时撞于无质量的弹簧上并与弹簧不再分离。弹簧刚度系数 k = 0.8kN/m，倾角 $\beta = 30^{\circ}$，求此系统振动的固有频率和振幅，并给出物块的运动方程

解：物块于弹簧的自然位置A处碰上弹簧。若物块平衡时，由于斜面的影响，弹簧应有变形量

$$\delta_0 = \frac{mg\sin\beta}{k} \qquad \text{(a)}$$



物块在任意位置 x 处受重力mg，斜面约束力 F_N 和弹性力 F 作用

物块沿 x 轴的运动微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\beta - k(\delta_0 + x)$$

代入式(a) ⇒ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 则系统通解为

$$x = A\sin(\omega_0 t + \theta)$$

得固有频率 ⇒ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{0.8\text{N/m}\times1000}{0.5\text{kg}}} = 40\,\text{rad/s}$

显然固有频率与斜面倾角无关

当物块碰上弹簧时，取时间t = 0作为振动的起点，此时物块的初位移

$$x_0 = -\delta_0 = -\frac{0.5\text{kg}\times9.8\,\text{m/s}^2\times\sin30^{\circ}}{0.8\,\text{N/m}\times1000} = -3.06\times10^{-3}\,\text{m}$$

物块碰上弹簧时，初速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9.8\,\text{m/s}^2\times0.1\text{m}} = 1.4\,\text{m/s}$$

⇒ 振幅与初相角

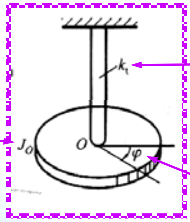
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 35.1\text{mm}\,,\ \theta = \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_0} = -0.087\text{rad}$$

此物块的运动方程为，式中 t 以 s 计

$$x = 35.1\sin(40t - 0.087)\,\text{mm}$$

其它类型的单自由度振动系统

- 除弹簧与质量组成的振动系统外，工程中还有很多振动系统，如扭振系统等，这些系统形式上虽然不同，但它们的运动微分方程却具有相同的形式

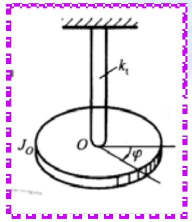


扭杆的扭转刚度系数表示使圆盘产生单位扭角所需的力矩

圆盘对于中心轴的转动惯量

圆盘相对于固定端的扭转角度

- 圆盘转动的运动微分方程



$$J_O\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-k_t\varphi$$

令 $\omega_0^2=\dfrac{k_t}{J_O}$ ，则上式变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega_0^2\varphi=0$$

1.2 单自由度系统的有阻尼自由振动

阻尼 ⟹ 振动过程中的阻力

- 实际中的自由振动多是随时间不断减小着的，直到最后振动停止，说明在振动过程中，系统除受恢复力的作用外，还存在着某种影响振动的阻力

阻尼的类型 ⟹
- 介质阻尼 ⟸ 在介质中振动
- 内阻尼 ⟸ 结构材料变形
- 干摩擦阻尼 ⟸ 接触面摩擦

粘性阻尼 ⟹ 振动速度不大时，由于介质粘性引起的阻力近似与速度一次方成正比

- 设振动质点的运动速度为 v，则粘性阻尼的阻力 F_D

$$F_D=-cv$$

c 为粘性阻尼系数，负号表示阻力与速度的方向相反

- 一般的机械振动系统都可以简化为由惯性元件 (m) 弹性元件 (k) 和阻尼元件 (c) 组成的系统

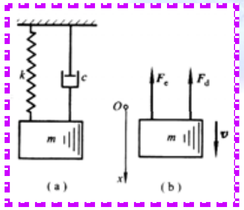
振动微分方程

- 恢复力 F_e，方向指向平衡位置

$\Rightarrow$ $F_e = -kx$

- 粘性阻尼力 F_d，方向与速度方向相反，大小与速度成正比

$\Rightarrow$ $F_d = -cv_x = -c\dfrac{dx}{dt}$



- 物块的运动微分方程 $\Rightarrow$ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\dfrac{dx}{dt}$

上式两端除以 m，令 $\omega_0^2 = k/m$，$\delta = c/2m$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$

其解可设为 $x = e^{rt}$

由此可得本征方程 $\Rightarrow$ $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$

- 方程的通解为 $\Rightarrow$ $\boxed{x = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}}$

其中 $r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$，$r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

- 本征根为实数和复数时，运动规律有很大不同

欠阻尼状态 $\boxed{\delta < \omega_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{c < 2\sqrt{mk}}$

- 本征方程的两个根为共轭复数

$r_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$，$r_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

根据欧拉公式 $\Rightarrow$ $x = Ae^{-\delta t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + \theta\right)$

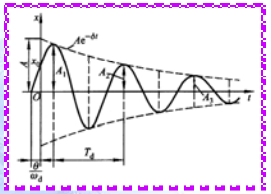
或 $\boxed{x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \theta)}$

有阻尼自由振动的固有角频率

- 阻尼自由振动中的初始幅值和初相角

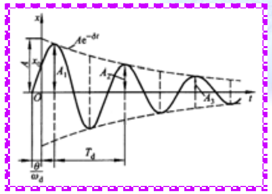
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \delta x_0)^2}{\omega_0^2 - \delta^2}} \qquad \tan\theta = \frac{x_0\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{v_0 + \delta x_0}$$

- 欠阻尼状态下，振动的振幅随时间不断衰减，所以又称为衰减振动



这种振动不符合周期振动的定义，所以不是周期振动

质点从一个最大偏离位置到下一个最大偏离位置所需的时间称为衰减振动的周期，记为 T_d



$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

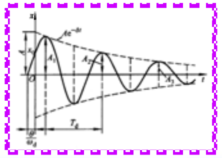
其中 $\zeta=\dfrac{\delta}{\omega_0}=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$ 阻尼比，欠阻尼状态下，$\zeta<1$

- 有阻尼自由振动的周期 T_d、频率 f_d 和角频率 ω_d 与无阻尼自由振动的 T、f、ω 的关系

$$T_d=\frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}}，f_d=f\sqrt{1-\zeta^2}，\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 在空气中的振动系统阻尼比都比较小，对振动频率的影响不大，一般可以认为$\omega_d=\omega_0$， $T_d=T$
- 两相邻振幅的比

$$\frac{A_i}{A_{i+1}}=\frac{Ae^{-\delta t_i}}{Ae^{-\delta(t_i+T_d)}}=e^{\delta T_d}$$ 减缩因数



欠阻尼状态下，阻尼对自由振动的频率影响较小，但阻尼对自由振动的振幅影响较大

$\zeta=0.5$ ⟹
- 振动频率比无阻尼自由振动下降 0.125%
- 减缩因数为0.7301
- 经过10个周期后，振幅只有原振幅的4.3%

- 对数减缩 ⟹ $\Lambda=\ln\dfrac{A_i}{A_{i+1}}=\delta T_d$
- 与阻尼比的关系

⟹ $\Lambda=\dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\approx 2\pi\zeta$

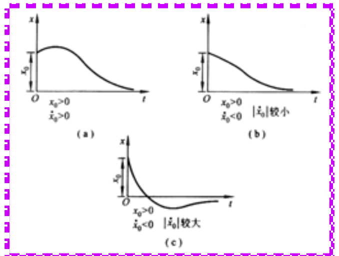
对数减缩也是反映阻尼特性的参数

临界阻尼状态 $\delta=\omega_0(\zeta=1)$ ⟹ $c_{cr}=2\sqrt{mk}$

- 本征方程的根为两个相等的实根，微分方程的解为

$$x=e^{-\delta t}(C_1+C_2t)$$

- 物体的运动随时间的增长而无限地趋向于平衡位置，因此运动已不具有振动的特点

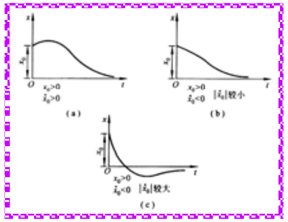


过阻尼状态 $\delta > \omega_0 (\zeta > 1)$ ⇒ $c > 2\sqrt{mk}$

- 本征方程的根为两个不等的实根，微分方程的解为

$$x = -e^{-\delta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t}\right)$$

- 不再具有振动性质



1.3 单自由度系统的无阻尼受迫振动

受迫振动 ⇒ 外加激振力作用下的振动

- 工程中的自由振动，都会由于阻尼的存在而逐渐衰减，最后完全停止
- 实际中存在大量持续振动，这是由于外界有能量输入以补充阻尼的损耗，一般都承受外加的激振力
- 工程中常见的激振力多是周期变化的；一般回转机械、往复式机械、交流电磁铁等会引起周期激振力

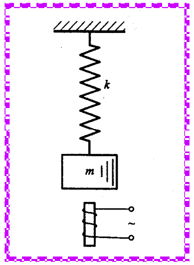
简谐激振力 ⇒ 一种典型的周期变化的激振力

- 简谐力随时间变化的关系

$$F = H\sin(\omega t + \varphi)$$

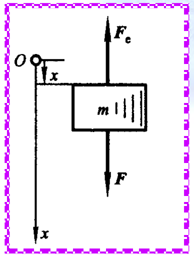
振动微分方程

如图所示振动系统，其中物块质量为 m。物块所受的力有恢复力 F_e 和激振力 F



如图，恢复力 F_e 在坐标轴上的投影

$$F_e = -kx$$



- 质点的运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + H\sin(\omega t + \varphi)$$

上式两端除以，并设 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}, h = \frac{H}{m}$

⇒ $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = h\sin(\omega t + \varphi)$$

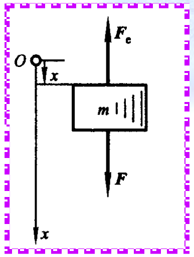
无阻尼受迫振动微分方程的标准形式

由1-1节知齐次方程的通解为

$$x_1 = A\sin(\omega_0 t+\theta)$$

设特解形式为

$$x_2 = b\sin(\omega t+\varphi) \qquad b=\frac{h}{\omega_0^2-\omega^2}$$



- 无阻尼受迫振动微分方程的全解

$$\Rightarrow\quad x = A\sin(\omega_0 t+\theta)+\frac{h}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x = A\sin(\omega_0 t+\theta)+\frac{h}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t+\varphi)$$

频率为固有频率的自由振动

频率为激振力频率的受迫振动

- 由于实际的振动系统中总有阻尼存在，自由振动部分总会逐渐衰减下去，因而我们着重研究第二部分受迫振动，它是一种稳态的振动

受迫振动的振幅 ⇒ 受迫振动的振幅与激振力频率之间的关系

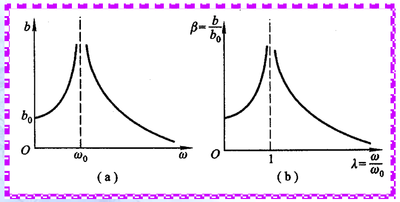
$\omega\to 0$ ⇒ 激振力的周期趋近于无穷大，即激振力为一恒力，此时并不振动，所谓的振幅 b_0 实为静力 H 作用下的静变形

$$b_0=\frac{h}{\omega_0^2}=\frac{H}{k}$$

$0<\omega<\omega_0$ ⇒ ω 值越大，振幅 b_0 越大，即振幅 b_0 随着频率 ω 单调上升，当 ω 接近 ω_0 时，振幅 b_0 将趋于无穷大

$\omega>\omega_0$ ⇓ $\qquad x_2 = b\sin(\omega t+\varphi)$

b 为负值，但习惯上把振幅都取为正值，因而此时 b 取其绝对值，而视为受迫振动 x_2 与激振力反向，上式的相位角应加（或减）180°，这时，随着激振力频率 ω 增大，振幅 b 减小。当 ω 趋于 ∞，振幅 b 趋于零



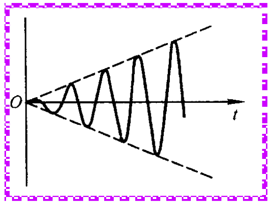
振幅频率曲线
（共振曲线）

共振现象 → 激振力频率等于系统的固有频率时，振幅 b 在理论上应趋于无穷大，这种现象称为共振

- 共振时受迫振动的运动规律

$$x_2 = \frac{h}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

幅值 $b = {}^{h}\!/_{2\omega_0}\, t$



$\omega = \omega_0$ → 系统共振，受迫振动振幅随时间无限增大

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = h\sin(\omega t + \varphi)$$

齐次方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ 特征方程 $r^2 + \omega_0^2 = 0$

→ $r = \pm i\omega_0$

当 $\omega = \omega_0$ → $\pm i\omega = \pm i\omega_0$ 是特征方程的根

→ $x^* = t[a_1\cos(\omega_0 t + \varphi) + b_1\sin(\omega_0 t + \varphi)]$

将其代入微分方程

$$-2a_1\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) + 2b_1\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) - ta_1\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$-tb_1\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 t[a_1\cos(\omega_0 t + \varphi) + b_1\sin(\omega_0 t + \varphi)]$$
$$= h\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

→ $-2a_1\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) + 2b_1\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) = h\sin(\omega_0 t + \varphi)$

→ $a_1 = -\frac{h}{2\omega_0}$ ，$b_1 = 0$

→ $$\boxed{x^* = -\frac{h}{2\omega_0} t\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

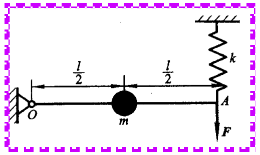
- 实际上，由于系统存在有阻尼，共振时振幅不可能达到无限大

例：如图所示为一长 l 无重刚杆OA，其一端O铰支，另一端A水平悬挂在刚度系数为 k 的弹簧上，杆的中点装有一质量为 m 的小球。若在点A加一激振力 $F = F_0\sin\omega t$，其中激振力的频率 $\omega = 0.5\,\omega_0$，ω_0 为系统的固有频率。忽略阻尼，求系统的受迫振动规律。

解：设任一瞬时刚杆的摆角为φ，根据刚体定轴转动微分方程可以建立系统的运动微分方程，为

$$m\left(\frac{l}{2}\right)^2\ddot{\varphi} = -kl^2\varphi + F_0 l\sin\omega t$$

令 $\omega_0^{\ 2} = \dfrac{kl^2}{m\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{4k}{m}, h = \dfrac{F_0 l}{m\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{4F_0}{ml}$



则上述微分方程可以整理为

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^{\ 2}\varphi = h\sin\omega t$$

可得上述方程的特解，即受迫振动为

$$\varphi = \frac{h}{\omega_0^{\ 2} - \omega^2}\sin\omega t$$

将 $\omega = 0.5\,\omega_0$ 代入上式，可解得

$$\varphi = \frac{h}{\frac{3}{4}\omega_0^{\ 2}}\sin\omega t = \frac{\frac{4F_0}{ml}}{\frac{3}{4}\frac{4k}{m}}\sin\omega t = \frac{4F_0}{3kl}\sin\omega t$$

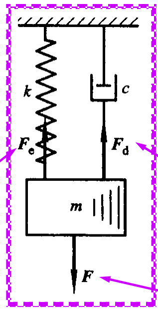
1.4 单自由度系统的有阻尼受迫振动

若选平衡位置 O 为左边原点，坐标轴铅直向下，则各力在坐标轴上的投影为

$$F_e = -kx$$

$$F_d = -cv = -c\frac{dx}{dt}$$

$$F = H\sin\omega t$$



可建立质点运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + H\sin\omega t$$

- 有阻尼受迫振动微分方程的标准形式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\ 2}x = h\sin\omega t$$

- 方程的通解为

$$x = Ae^{-\delta t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2}\,t + \theta\right) + b\sin(\omega t - \varepsilon)$$

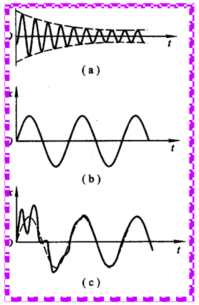
其中 $b = \dfrac{h}{\sqrt{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$　　$\tan\varepsilon = \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^{\ 2} - \omega^2}$

A 和 θ 为积分常数，由运动的初始条件确定

$$x = Ae^{-\delta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t+\theta)+b\sin(\omega t-\varepsilon)$$

衰减振动（图a）　受迫振动（图b）

- 由于阻尼的存在，第一部分振动随时间的增加，很快地衰减了
- 衰减振动有显著影响的这段过程为过渡过程（或称瞬态过程）
- 一般来说，过渡过程很短暂，以后系统基本上按第二部分受迫振动的规律进行振动，过渡过程以后的过程称为稳态过程

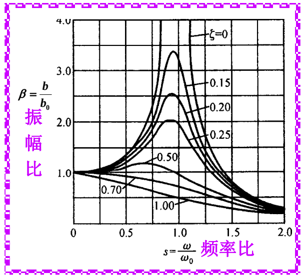


- 受迫振动的振幅不仅与激振力的力幅有关，还与激振力的频率以及振动系统的参数 m，k 阻力系数 c 有关
- 不同阻尼条件下的振幅频率关系

$$\beta=\frac{b}{b_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+4\zeta^2s^2}}$$

其中 $\zeta=\dfrac{c}{c_{cr}}=\dfrac{\delta}{\omega_0}$

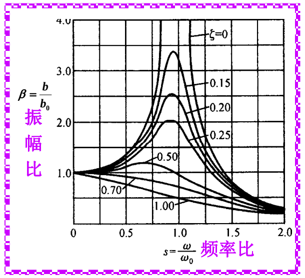
$$\tan\varepsilon=\frac{2\zeta s}{1-s^2}$$



- 阻尼对振幅的影响程度与频率有关

$\omega \ll \omega_0$ → 阻尼对振幅的影响甚微，这时可忽略系统的阻尼而当做无阻尼受迫振动处理

$\omega \to \omega_0$ → 振幅显著地增大。这时阻尼对振幅有明显的影响，即阻尼增大，振幅显著地下降



$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

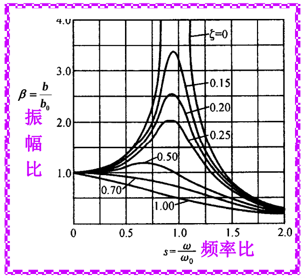
振幅 b 具有最大值 b_{max}，这时的频率称为共振频率。

- 共振频率下的振幅

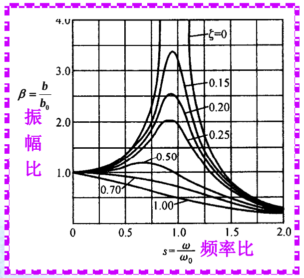
$$b_{max}=\frac{h}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

$$b_{max}=\frac{b_0}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

一般情况下阻尼比 $\zeta \ll 1$，这时可以认为共振频率 $\omega=\omega_0$

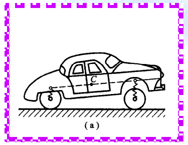


$\omega >> \omega_0$ ⟹ 阻尼对受迫振动的振幅影响也较小，这时又可以忽略阻尼，将系统当做无阻尼系统处理

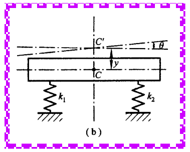


1.5 两个自由度系统的自由振动

只研究车身作为刚体的上下平移的振动 ⟹ 单自由度系统



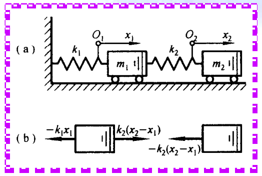
还需研究车身在铅垂面内相对重心的摆动 ⟹ 两个自由度系统



再要研究车身的左右晃动 ⟹ 多自由度系统

两个自由度系统的无阻尼自由振动

质量 m_1 与一端固定的刚度系数为 k_1 的弹簧连接



质量 m_2 用刚度系数为为 k_2 的弹簧与 m_1 连接

物块可以在水平方向运动，摩擦等阻力都忽略不计

- 两物块的运动微分方程 ⟹

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)$$

为简化上式，令 $b=\frac{k_1+k_2}{m_1}$，$c=\frac{k_2}{m_1}$，$d=\frac{k_2}{m_2}$

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)$$

⟹

$$\ddot{x}_1+bx_1-cx_2=0$$
$$\ddot{x}_2-dx_1+dx_2=0$$

微分方程理论，可设上列方程组的解为

$$x_1=A\sin(\omega t+\theta) \qquad x_2=B\sin(\omega t+\theta)$$

其中 A、B 是振幅，ω 是角频率，θ 为初相角

系统发生振动时，方程具有非零解，则方程的系数行列式必须等于零，即

$$\begin{vmatrix} b-\omega^2 & -c \\ -d & d-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

频率行列式

- 展开行列式后得系统的本征方程，称为频率方程

$$\omega^4 - (b+d)\omega^2 + d(b-c) = 0$$

- 频率方程的两个根

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{b+d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 + cd}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{b+d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 + cd}$$

ω_1 较小 → 第一固有频率

ω_2 较大 → 第二固有频率

两个自由度系统具有两个固有频率，这两个固有频率只与系统的质量和刚度等参数有关，而与振动的初始条件无关

- 振幅 A，B 具有两组确定的比值，即对应于第一固有频率

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{c}{b-\omega_1^2} = \frac{d-\omega_1^2}{d} = \frac{1}{\gamma_1}$$

- 对应于第二固有频率

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{c}{b-\omega_2^2} = \frac{d-\omega_2^2}{d} = \frac{1}{\gamma_2}$$

其中 γ_1 和 γ_2 为比例常数。从上面两式可以看出：这两个常数只与系统的质量、刚度等参数有关。

- 两组振幅 A，B 的比值是两个定值，对应于第一固有频率 ω_1 的振动称为第一主振动，其运动规律为

$$x_1^{(1)} = A_1\sin(\omega_1 t + \theta_1)\text{，}x_2^{(1)} = \gamma_1 A_1\sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

- 对应于第二固有频率 ω_2 的振动称为第二主振动，其运动规律为

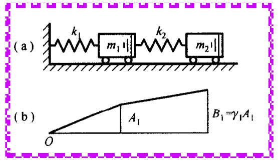
$$x_1^{(2)} = A_2\sin(\omega_2 t + \theta_2)\text{，}x_2^{(2)} = \gamma_2 A_2\sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

- 各个主振动中两个物块的振幅比

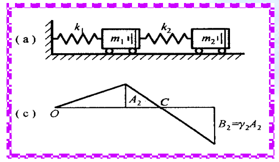
$$\gamma_1=\frac{B_1}{A_1}=\frac{b-\omega_1^2}{c}=\frac{1}{c}\left[\frac{b-d}{2}+\sqrt{\left(\frac{b-d}{2}\right)^2+cd}\right]>0$$

$$\gamma_2=\frac{B_2}{A_2}=\frac{b-\omega_2^2}{c}=\frac{1}{c}\left[\frac{b-d}{2}-\sqrt{\left(\frac{b-d}{2}\right)^2+cd}\right]<0$$

- 当系统作第一主振动时，振幅比 γ_1 为正，表示 m_1 和 m_2 总是同相位，即作同方向的振动
- 当系统作第二主振动时，振幅比 γ_2 为正，表示 m_1 和 m_2 反相位，即作反方向的振动



在第一主振动中振动的形状，称为第一主振型



在第二主振动中振动的形状，称为第一主振型

- 对于确定的系统，振幅比 γ_1 和 γ_2 只与系统参数有关，是确定的值

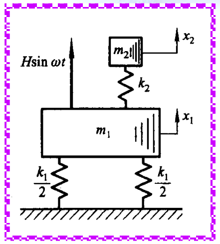
各阶主振型具有确定的形状

- 因此，主振型和固有频率一样都只与系统本身的参数有关而与振动的初始条件无关

主振型也叫固有振型

1.6 两个自由度系统的受迫振动

右图所示是一个无阻尼系统，在主质量 m_1 上作用有激振力 $H\sin\omega t$



- 两个质量的运动微分方程

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)+H\sin\omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)$$

其中 x_1 和 x_2 两个质量相对于各自平衡位置的位移

令 $b=\dfrac{k_1+k_2}{m_1}$ ， $c=\dfrac{k_2}{m_1}$ ， $d=\dfrac{k_2}{m_2}$ ， $h=\dfrac{H}{m_1}$

则上式可简化为

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1+bx_1-cx_2&=h\sin\omega t\\ \ddot{x}_2-dx_1+dx_2&=0\end{aligned}$$

- 其中齐次通解是上一节的自由振动，在阻尼作用下将很快衰减掉
- 下面着重分析其特解，即受迫振动部分

设上述方程的一组特解为

$$x_1=A\sin\omega t \qquad x_2=B\sin\omega t$$

解上述代数方程组得

$$A=\frac{h(d-\omega^2)}{(b-\omega^2)(d-\omega^2)-cd} \qquad B=\frac{hd}{(b-\omega^2)(d-\omega^2)-cd}$$

- 可见，此振动系统中两个物体的受迫振动都是谐振动，其频率都等于激振力的频率 ω
- 受迫振动的两个振幅 A、B 与激振力的大小、激振力的频率和系统的参数有关

受迫振动的振幅与激振频率之间的关系

$\boxed{\omega\to 0}$ ⟹ $\boxed{T\to\infty}$

- 激振力变化极其缓慢，实际上相当于静力作用

$$A=B=\frac{h}{b-c}=\frac{H}{k_1}=b_0$$

式中 b_0 相当于在力的大小等于力幅 H 的作用下主质量 m_1 的静位移，这时两个质量有相同的位移

- 系统频率方程

$$\begin{vmatrix} b-\omega_0^2 & -c \\ -d & d-\omega_0^2\end{vmatrix}=(b-\omega_0^2)(d-\omega_0^2)-cd=0$$

由此可解得系统的固有频率 ω_1 和 ω_2

$\boxed{\omega=\omega_1\text{或}\omega=\omega_2}$ ⟹

振幅A和B都成为无穷大，即系统发生共振

1.7 多自由度系统的振动

用大于一的有限个独立坐标描述的振动系统称为多自由度系统

- 实际的工程结构将分布的质量以及分布的弹性和阻尼简化为自由度系统讨论
- 本章主要讨论线性多自由度系统。线性多自由度系统存在与自由度数 相等的多个固有频率
- 每个固有频率对应系统的一种特定振动形态，称为模态。系统以任一固有频率所做的振动称为主振动

多自由度系统的动力学方程 ⇒ 系统的势能和动能

设系统具有 n 个自由度，以 n 个广义坐标 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示系统的位形。系统的势能 $V(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 为广义坐标的函数，在平衡位置处满足

$$(\frac{\partial V}{\partial q_i})_0=0(i=1,2,\cdots,n)$$

设势能 V 在平衡位置处也取零值，将 V 在平衡位置附近展开泰勒级数，只保留广义坐标的二阶微量，考虑上式，得

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}q_iq_j \qquad (1)$$

设系统受定常约束，其动能为广义速度的二次齐次函数

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad (2)$$

引入广义坐标列阵 $q=(q_i)$ 、质量矩阵 $M=(m_{ij})$ 和刚度矩阵 $K=(k_{ij})$ ，则式 (1) 和 (2) 可用矩阵表示为

$$V=\frac{1}{2}q^TKq, T=\frac{1}{2}\dot{q}^TM\dot{q}$$

其中，K、M 均为 n 阶对称正定矩阵

动力学方程

- 动力学方程可写作矩阵形式

$$M\ddot{q}+Kq=Q$$

弹性恢复力 $-Kq$、惯性力 $-M\ddot{q}$ 与非保守力 Q 平衡

其中 $Q=(Q_i)$ 为非保守力构成的矩阵。讨论保守系统的自由振动时，令 $Q=0$，方程简化为

$$M\ddot{q}+Kq=0$$

多自由度系统的自由振动 → 固有频率

将线性动力学方程 $M\ddot{q}+Kq=0$ 中的广义力坐标列阵 q 改用 $x=(x_j)$ 表示，得

$$\boxed{M\ddot{x}+Kx=0}$$

此方程有以下特解

$$x_j=A_j\sin(\omega t+\theta)(j=1,2,\cdots,n)$$

也可写作矩阵形式 ⟹ $x=A\sin(\omega t+\theta)$

其中 $A=(A_j)$ 为各坐标振幅组成的 n 阶列阵。将上式代入方程 $M\ddot{x}+Kx=0$，化作矩阵 K 和 M 的广义本征值问题

⟹ $$(K-\omega^2M)A=0$$

A 有非零解的充分与必要条件为系数行列式等于零

⟹ $$\left|K-\omega^2M\right|=0$$

即
$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2m_{11} & k_{12}-\omega^2m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2m_{1n} \\ k_{21}-\omega^2m_{21} & k_{22}-\omega^2m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega^2m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2m_{n1} & k_{n2}-\omega^2m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega^2m_{nn} \end{vmatrix}=0$$

展开后得到 ω^2 的 n 次代数方程，即系统的本征方程

⟹ $$\boxed{\omega^{2n}+a_1\omega^{2(n-1)}+\cdots a_{n-1}\omega^2+a_n=0}$$ 频率方程

- 对于平衡状态稳定的正定系统，各坐标只能在平衡值附近做微振幅简谐振动
- 上式存在 ω^2 的 n 个正实根，即系统的本征值。每个本征值所对应的 ω_i ($i=1,2,\dots,n$) 为系统的 n 个固有频率，将其从小到大按序排列为

$$\omega_1<\omega_2<\dots<\omega_{n-1}<\omega_n$$

$$\boxed{\omega^{2n}+a_1\omega^{2(n-1)}+\cdots a_{n-1}\omega^2+a_n=0}$$

- 上式也称作频率方程
- 与单自由度相同，多自由度的固有频率也是由系统本身的物理参数决定，与起始运动状态无关

模态

- 满足下式的非零 n 阶列阵 A 也视为 n 维向量称为系统的本征向量

$$(K-\omega^2 M)A=0$$

- 每个本征值 ω_i^2 对应于一个本征向量 $A^{(i)}$，n 个本征向量分别满足

$$(K-\omega_i^2 M)A^{(i)}=0(i=1,2,\cdots,n)$$

解出的解 $A_j^{(i)}(j=1,2,\cdots n-1)$ 记作 $\phi_j^{(i)}(j=1,2,\cdots n-1)$

- 则第 i 阶固有频率对应的自由振动振幅 $A^{(i)}$ 为

$$A^{(i)}=\phi^{(i)}=(\phi_1^{(i)}\phi_2^{(i)}\cdots\phi_n^{(i)})^T(i=1,2,\cdots n-1)$$

其中 $\phi_n^{(i)}=1(i=1,2,\cdots n)$

系统按第 i 阶固有频率所做的振动称为系统的第 i 阶主振动，写作 $x^{(i)}(i=1,2,\cdots n-1)$

$$x^{(i)}=\alpha_i\phi^{(i)}\sin(\omega_i t+\theta_i)$$

其中 α_i、θ_i 为任意常数，取决于初始运动状态

$$x^{(i)}=\alpha_i\phi^{(i)}\sin(\omega_i t+\theta_i)$$

列阵 ϕ_i 表示系统作第 i 阶主振动时，各坐标振幅的相对比值

- 此相对比值完全由系统的物理性质确定，与初始运动状态无关，称作系统的第 i 阶模态，或第 i 阶主振型
- 系统的固有频率和对应的模态完全由系统的物理参数矩阵 K 和 M 确定，为系统的固有特征

模态的正交性

设两个固有频率 ω_i 和 ω_j 所对应的模态分别为 $\phi^{(i)}$ 和 $\phi^{(j)}$，它们均满足式 $(K-\omega_i^2 M)A^{(i)}=0(i=1,2,\cdots,n)$ 即

$$K\phi^{(i)}=\omega_i^2 M\phi^{(i)} \qquad K\phi^{(j)}=\omega_j^2 M\phi^{(j)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi^{(i)^T}M\phi^{(j)}=0(i\neq j)} \quad \boxed{\phi^{(i)^T}K\phi^{(j)}=0(i\neq j)} \quad (1)$$

- 上两式分别表示不同固有频率的模态关于质量矩阵的正交性和关于刚度矩阵的正交性

主质量和主刚度

当 $i=j$ 时，$\omega_i=\omega_j$，式 $(\omega_i^2-\omega_j^2)\phi^{(i)^T}M\phi^{(j)}=0$ 恒成立引入参数 M_{pi} 和 K_{pi} 为以下 $\phi^{(i)}$ 的二次型

$$M_{pi}=\phi^{(i)^T}M\phi^{(i)},\ Kpi=\phi^{(i)^T}K\phi^{(i)} \qquad (2)$$

利用克罗内克 (Kronecker) 符号将正交性条件(1)和(2)综合为

$$\phi^{(i)^T}M\phi^{(j)}=\delta_{ij}M_{pi},\ \phi^{(i)^T}K\phi^{(j)}=\delta_{ij}K_{pi}$$

M_{pi} 和 K_{pi} 分别称作第 i 阶主质量和第 i 阶主刚度

固有频率与主质量和主刚度的关系式

$$\omega_i=\sqrt{\frac{K_{pi}}{M_{pi}}}\ (i=1,2,\cdots n)$$

此关系式与单自由度系统的的固有频率公式类似

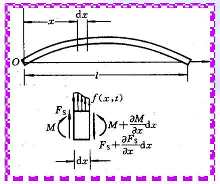
1.8 梁的弯曲振动

动力学方程 ⟹ 欧拉-伯努利梁

- 将未变形时梁的轴向，即各截面形心连成的直线取作 x 轴
- 设梁具有对称面，将对称面内与 x 轴垂直的方向取作 y 轴，梁在对称面内作弯曲振动时，梁的轴线只有横向位移
- 不考虑剪切变形和截面绕中性轴转动对弯曲振动的影响

厚度为 dx 的微元体受力状况如图所示

其中 Fs 和 M 分别表示剪力和弯矩，箭头指向为正方向，利用达朗伯原理列出微元体沿 y 方向的动力学方程为



$$\rho_l(x)dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Fs-(Fs+\frac{\partial Fs}{\partial x}dx)+f(x,t)dx \qquad (1)$$

$\rho_l(x)=\rho S(x)$ ⟹ 单位长度质量　　$S(x)$ ⟹ 截面积

$EI(x)$ ⟹ 梁的抗弯刚度　　$I(x)$ ⟹ 截面二次矩

$f(x,t)$ ⟹ 作用在梁上的分布载荷

不考虑剪切变形和截面转动的影响时，微元体满足力矩平衡条件，以右截面上任意点为矩心列出

$$(M+\frac{\partial M}{\partial x}dx)-M-Fsdx-f(x,t)dx\frac{dx}{2}=0 \quad (2)$$

略去高阶小量，从上式导出

$$\Rightarrow \quad Fs=\frac{\partial M}{\partial x}$$

根据材料力学的分析，弯矩与挠度的关系为

$$M(x,t)=EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

- 将上两式代入式(1)，可得梁的弯曲振动方程

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}]+\rho_l(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}-f(x,t)$$

- 若梁为等截面，则化作

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}]+\rho_l\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t)$$

此方程含对空间变量 x 的四阶偏导数和对时间变量 t 的二阶偏导数，求解时必须列出4个边界条件和2个初始条件

固有频率和模态函数

讨论梁的自由振动。令梁的弯曲振动方程中 $f(x, t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}]+\rho_l(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0$$

将方程的解分离变量，写作

$$y(x,t)=\phi(x)q(t) \xrightarrow{\text{代入上式}} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}=-\frac{[EI(x)\phi''(x)]''}{\rho_l(x)\phi(x)}$$

上式的左边与 x 无关，右边与 t 无关，只可能等于常数，记作 $-\omega^2$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}(t)+\omega^2 q(t)=0$$

其通解为 $\Rightarrow$ $q(t)=\alpha\sin(\omega t+\theta)$

对于等截面梁，ρ_l 为常数，则简化为常系数微分方程

$$\phi^{(4)}(x)-\beta^4\phi(x)=0 \qquad \text{其中} \quad \beta^4=\frac{\rho_l}{EI}\omega^2$$

上式通解可写为

$$\phi(x)=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3 ch\beta x+C_4 sh\beta x$$

可解出无穷多个固有频率 ω_i，及对应的 ϕ_i 模态函数，构成系统的第 i 个主振动

$$y^{(i)}(x,t)=a_i\phi_i(x)\sin(\omega_i t+\theta_i)(i=1,2,\cdots)$$

系统的自由振动是无穷多个主振动的叠加

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i(x)\sin(\omega_i t+\phi_i)$$

其中积分常数 a_i 和 θ_i 由系统的初始条件确定

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i(x)\sin(\omega_i t+\phi_i)$$

常见的约束状况与边界条件

- 固定端处梁的挠度 y 和转角 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 均等于零。即

$$\phi(x_0)=0,\phi'(x_0)=0(x_0=0\text{或}l)$$

- 简支端处梁的挠度 y 和弯矩 M 均等于零，可利用式 $M(x,t)=EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ 写出

$$\phi(x_0)=0,\phi''(x_0)=0(x_0=0\text{或}l)$$

常见的约束状况与边界条件

- 自由端处梁的弯矩 M 和剪力 Fs 均等于零，可利用

$$Fs=\frac{\partial M}{\partial x} \qquad M(x,t)=EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi''(x_0)=0,\phi'''(x_0)=0(x_0=0\text{或}l)$$

例：求简支梁的固有频率和模态函数

解：利用式 $\phi(x_0)=0,\phi''(x_0)=0(x_0=0\text{或}l)$ 列出边界条件

$$\left.\begin{array}{l}\phi(0)=0,\ \phi''(0)=0\\ \phi(l)=0,\ \phi''(l)=0\end{array}\right\}$$

将式 $\phi(x)=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3 ch\beta x+C_4 sh\beta x$ 代入后，得到

$$C_1=0,C_3=0$$

以及

$$\left.\begin{array}{r}C_2\sin\beta l+C_4 sh\beta l=0\\ -C_2\sin\beta l+C_4 sh\beta l=0\end{array}\right\}$$

因 $sh\beta l \neq 0$，由上式解出 $C_4 = 0$，频率方程简化为

$$\sin \beta l = 0$$

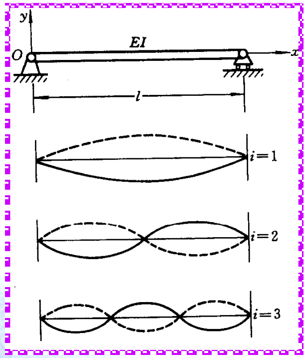
解出 $\beta_i l = i\pi (i = 1,2,\cdots)$

对应的固有频率为 $\omega_i = (\frac{i\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_l}} (i = 1,2,\cdots)$

代回式 $\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 ch\beta x + C_4 sh\beta x$ 计算模态函数，将任意常数取作1，得到

$$\phi_i(x) \sin \frac{i\pi}{l} x (i = 1,2,\cdots)$$

$$\phi_i(x) \sin \frac{i\pi}{l} x (i = 1,2,\cdots)$$



本章参考书籍

- 哈尔滨工业大学理论力学教研室编，理论力学，北京：高等教育出版社, 2002
- 刘延柱，陈文良，陈立群编著，振动力学，北京：高等教育出版社，1998年10月第1版