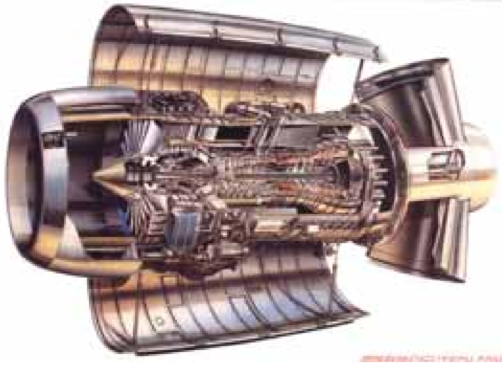
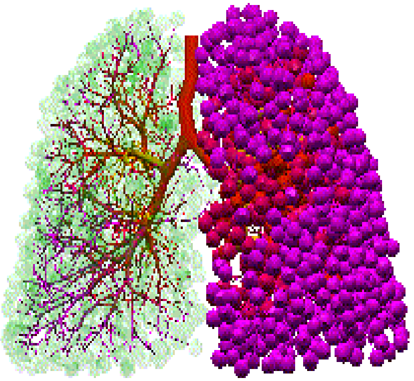
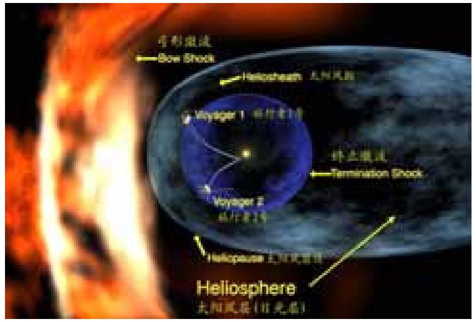




高等流体力学

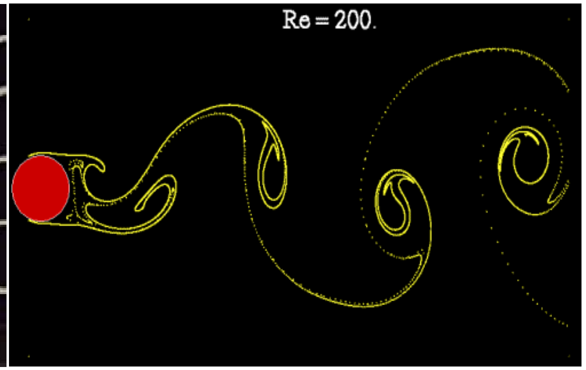
主讲教师： 张荻

东三楼乙107 Tel: 82668728

zhang_di@mail.xjtu.edu.cn



第一部分 流体力学的控制方程

教科书：高等工程流体力学，张鸣远、景思睿、李国君编著，西安交通大学出版社，2006年7月，西安

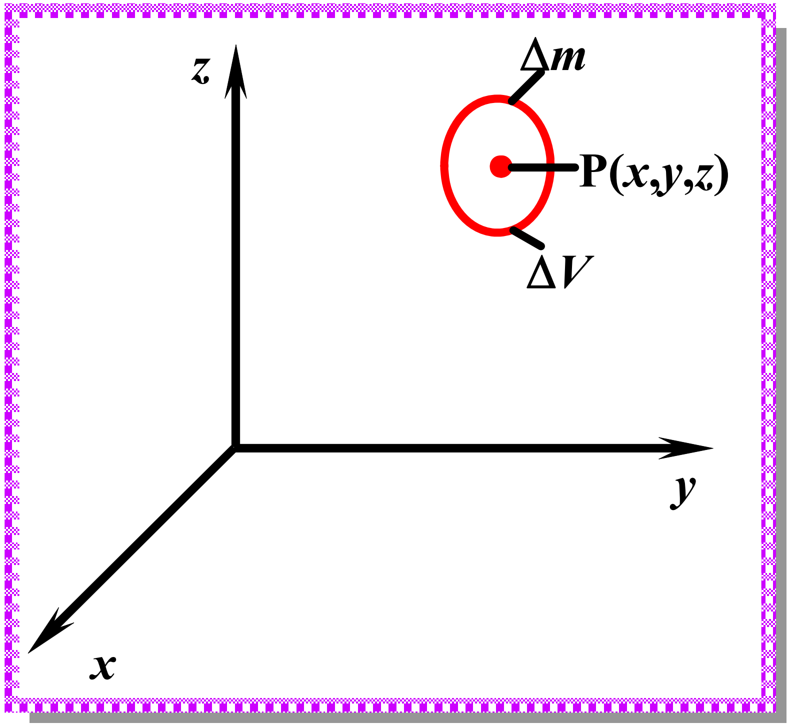
流体力学，吴望一编著，北京大学出版社2009，北京

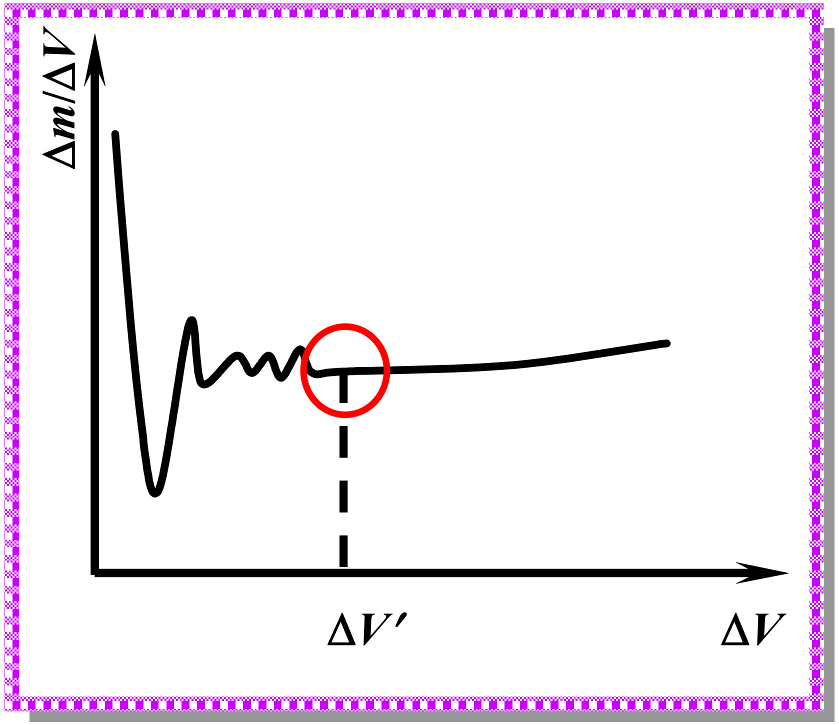
流体力学，周光炯等编著，高教出版社，2002，北京

Fundamental Mechanics of Fluids, I.G.Curries, 3rd Edition, Marcel Dekker, Inc., 2003，New York

第一部分 流体力学的控制方程

第一章 流体力学的基本概念





$\Delta V'$ → **特征体积**

流体质点

流体质点 → 由确定流体分子组成的流体团

- 宏观上充分小 → 流体质点尺寸 << 流场宏观特性尺寸

  ☞ 在数学上可近似地看成一个几何上没有维度的点

- 微观上充分大 → 分子平均自由程 <<流体质点尺寸

  ☞ 包含大量的分子，对分子团进行统计平均后可以得到稳定数值，少数分子的进出不影响稳定的平均值

连续介质假说

- 流体由无穷多的流体质点连续无间隙地组成，速度、压强及流体物性从一点到另一点连续变化
- 当讨论流体速度、密度等变量时，实际上是指流体质点的速度和密度

适用条件

分子平均自由程 << 流场宏观特性尺寸

拉格朗日参考系1

拉格朗日参考系—着眼于流体质点

流体的物理量表示为流体质点和时间的函数

- **设 $t = t_0$ 时刻流体质点的空间位置坐标 $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 作为流体质点的标号，则该质点的物理量可表示为**

$$\eta = \eta(x_0, y_0, z_0, t)$$

其中 x_0, y_0, z_0, t 为拉格朗日变数

拉格朗日参考系2

- 任意时刻流体质点的位置矢量

$$\vec{r}=\vec{r}(r_0,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=x(x_0,y_0,z_0,t) \\ y=y(x_0,y_0,z_0,t) \\ z=z(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases}$$

- 其它物理量

$$p=p(\vec{r}_0,t)\ ,\ \rho=\rho(\vec{r}_0,t)\ ,\ T=T(\vec{r}_0,t)$$

- 任意时刻流体质点的速度 $\Rightarrow$ $\vec{u}(\vec{r},t)=\dfrac{d\vec{r}(\vec{r}_0,t)}{dt}$

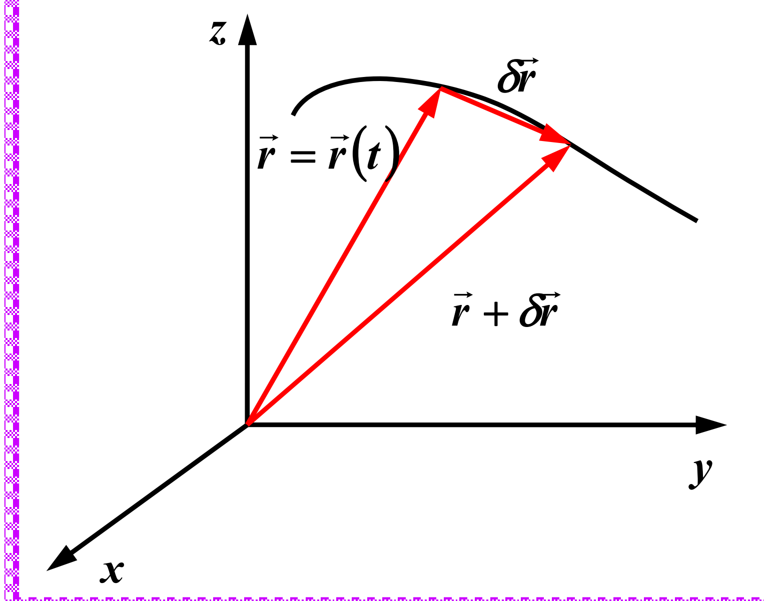
拉格朗日参考系3

- 任意时刻流体质点的加速度 $\Rightarrow$ $\vec{a}=\dfrac{d^2\vec{r}(\vec{r}_0,t)}{\partial t^2}$

- 固定 t，变化 $\vec{r}_0$ ，同一时刻不同流体质点的参数分布

- 固定 $\vec{r}_0$，变化 t，某确定流体质点随时间的运动规律

- 拉格朗日参考系中，流体质点的空间位置随时间变化，因此x, y, z 是时间 t 的函数，x, y, z, t 不是相互独立的



欧拉参考系1

欧拉参考系—着眼于空间点

流体的物理量是空间点和时间的函数

- 空间点位置为 (x, y, z)，则物理量 η 的空间分布

$$\eta = \eta(x, y, z, t)$$

x, y, z, t 为欧拉变数

欧拉参考系2

- 空间中的速度分布

$$\vec{u}=\vec{u}(x,y,z,t)=\vec{u}(\vec{r},t)$$

固定*xyz*，变化*t*

某确定空间点参数随时间的变化规律

- 空间中的压强分布、温度等的分布

$$\begin{cases} p=p(x,y,z,t)=p(\vec{r},t) \\ T=T(x,y,z,t)=T(\vec{r},t) \end{cases}$$

固定*t*，变化*xyz*

同一时刻不同空间点的参数分布

场—分布着某种物理量的空间区域

流场

欧拉参考系3

欧拉参考系中 x, y, z, t 是相互间无函数关系的独立变量。在拉格朗日参考系中 x, y, z 不再是独立变量，他们都是时间 t 和 $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 的函数

$$x - x_0 = u(t - t_0)$$
$$y - y_0 = v(t - t_0)$$
$$z - z_0 = w(t - t_0)$$

拉格朗日向欧拉参考系的转换1

方法

已知 $\eta=\eta[\vec{r}_0,t]$ 将 $\vec{r}_0=\vec{r}_0(\vec{r},t)$ 代入左式

$\Rightarrow$ $\boxed{\eta=\eta[\vec{r}_0(\vec{r},t),t]}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\eta=\eta[\vec{r},t]}$

例：拉格朗日变数 (x_0, y_0, z_0) 给出的流体运动规律为：$x=x_0e^{-2t}$，$y=y_0(1+t)^2$，$z=z_0e^{2t}(1+t)^{-2}$，求 (1) 以欧拉坐标表示的速度场；(2) 试确定流动是否为定常；(3) 求加速度

拉格朗日向欧拉参考系的转换2

$$x = x_0 e^{-2t} \;,\; y = y_0(1+t)^2 \;,\; z = z_0 e^{2t}(1+t)^{-2}$$

(1) 以欧拉坐标表示的速度场

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = -2x_0 e^{-2t}$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = 2y_0(1+t) = \frac{2y_0(1+t)^2}{(1+t)}$$

$$w = 2z_0 e^{2t}\left[(1+t)^{-2} - (1+t)^{-3}\right] = \frac{2z_0 e^{2t}(1+t)^{-2}t}{(1+t)}$$

由题中给出的运动规律，可得

$$\underline{\underline{u = 2x \;,\; v = \frac{2y}{(1+t)} \;,\; w = \frac{2zt}{(1+t)}}}$$

拉格朗日向欧拉参考系的转换3

定常场与非定常场

流场中每一点的物理量都不随时间变化，称为定常场；否则，为非定常场

- **定常场数学描述**

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

或

$$\eta = \eta(x, y, z)$$

拉格朗日向欧拉参考系的转换4

均匀场与非均匀场

流场中各空间点上的物理量都一样，称为均匀场；否则，为非均匀场

均匀场数学描述

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial z}=0$$

或

$$\eta=\eta(t)$$

拉格朗日向欧拉参考系的转换5

(2) 流动是否定常

$$u = 2x \ , \ v = \frac{2y}{(1+t)} \ , \ w = \frac{2zt}{(1+t)}$$

速度的欧拉表达式包含变量 t，所以是非定常流动

(3) 加速度

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = 4x_0 e^{-2t} = \underline{\underline{4x}}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = 2y_0 = \underline{\underline{\frac{2y}{(1+t)^2}}}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2z_0 e^{2t}}{(1+t)^3} + \frac{4z_0 e^{2t} t}{(1+t)^3} - \frac{6z_0 e^{2t} t}{(1+t)^4} = \frac{2z_0 e^{2t}(1+2t^2)}{(1+t)^4} = \underline{\underline{\frac{2z(1+2t^2)}{(1+t)^2}}}$$

欧拉参考系转换为拉格朗日参考系1

由速度求流体质点的运动轨迹 ⇐ $d\vec{r}=\vec{u}dt \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}(c_1,c_2,c_3,t)$

⇓

代入初始条件 ⇐ $t=t_0$, $\vec{r}=\vec{r}_0$

⇒ $c_1=c_1(\vec{r}_0)$, $c_2=c_2(\vec{r}_0)$, $c_3=c_3(\vec{r}_0)$ ⇒ $\vec{r}=\vec{r}(\vec{r}_0,t)$

⇓

代入欧拉参考系表达式 ⇒ $\vec{u}=\vec{u}[\vec{r}(\vec{r}_0,t),t]=\vec{u}(\vec{r}_0,t)$

如已知欧拉参考系中的其他变量 ⇒ $\eta=\eta[\vec{r}(\vec{r}_0,t),t]=\eta(\vec{r}_0,t)$

欧拉参考系转换为拉格朗日参考系2

例：已知速度场 $u=\dfrac{x}{1+t}$ ，$v=\dfrac{2y}{1+t}$ ，$w=\dfrac{3z}{1+t}$ ，求矢径表达式 $\vec{r}=\vec{r}(x_0,y_0,z_0,t)$ 及加速度的拉格朗日描述

(1) 矢径表达式

$$dx=udt=\frac{x}{1+t}dt \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x=\ln(1+t)+c$$

$$\Rightarrow x=c_1(1+t)$$

同理 $y=c_2(1+t)^2$ $z=c_3(1+t)^3$

欧拉参考系转换为拉格朗日参考系3

由 $t=0$ 时 $c_1=x_0$ ，$c_2=y_0$ ，$c_3=z_0$ 得

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r}=x_0(1+t)\vec{i}+y_0(1+t)^2\vec{j}+z_0(1+t)^3\vec{k}}}$$

(2) 加速度的拉格朗日描述

$$a_x=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[x_0(1+t)\right]=\underline{\underline{0}}$$

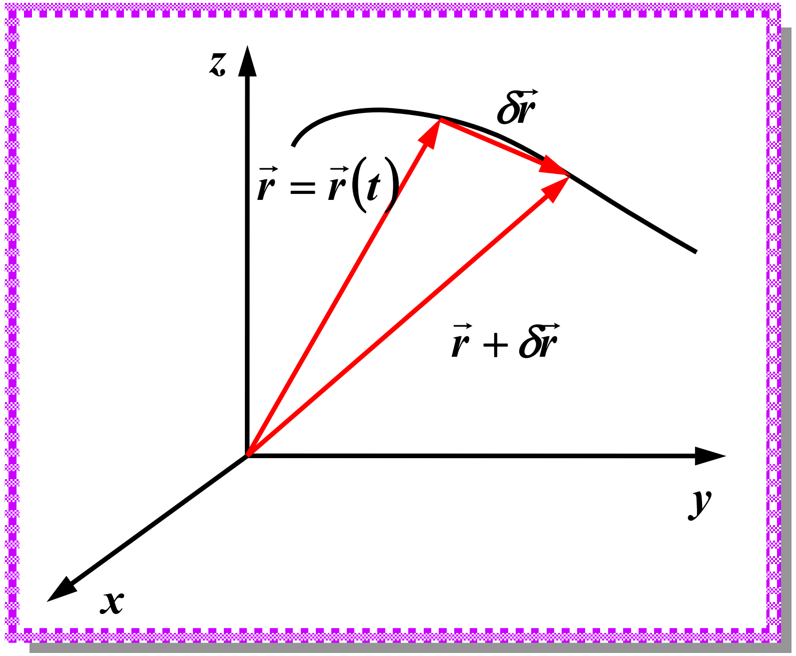
$$a_y=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[y_0(1+t)^2\right]=\underline{\underline{2y_0}}$$

$$a_z=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[z_0(1+t)^3\right]=\underline{\underline{6z_0(1+t)}}$$

1.2 迹线、流线和脉线

迹线 → 流体质点在空间运动时所描绘出来的轨迹 *pathline*

- **迹线方程** $$\vec{u}(\vec{r},t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$$



- 一个流体质点的速度矢量总是和该质点的迹线相切
- 迹线也可以定义为始终与同一个流体质点的速度矢量相切的曲线

迹线方程

迹线方程 $\vec{u}(\vec{r},t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ⟹ $\dfrac{dx}{u}=\dfrac{dy}{v}=\dfrac{dw}{w}=dt$

积分得 $d\vec{r}=\vec{u}dt \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}(c_1,c_2,c_3,t)$

$t=t_0$, $\vec{r}=\vec{r}_0$

⟹ $c_1=c_1(\vec{r}_0)$, $c_2=c_2(\vec{r}_0)$, $c_3=c_3(\vec{r}_0)$

⟹ $\vec{r}=\vec{r}(\vec{r}_0,t)=\vec{r}(x_0,y_0,z_0,t)$

- t 是自变量，x, y, z 是流体质点的空间坐标，因此是 t 的函数，求解是在拉格朗日参考系中进行的

迹线方程例题

例：已知平面流动速度场：$u = x(1+2t)$，$v = y$，$w = 0$

求：$t = 0$时刻通过(1, 1)点的流体质点的迹线

微分方程 ⇒ $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1+2t) \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

满足上述速度分布的流场中有无数个流体质点于是有无数条迹线，本题只求其中一条

积分 ⇒ $x = c_1 e^{t(1+t)}$，$y = c_2 e^t$

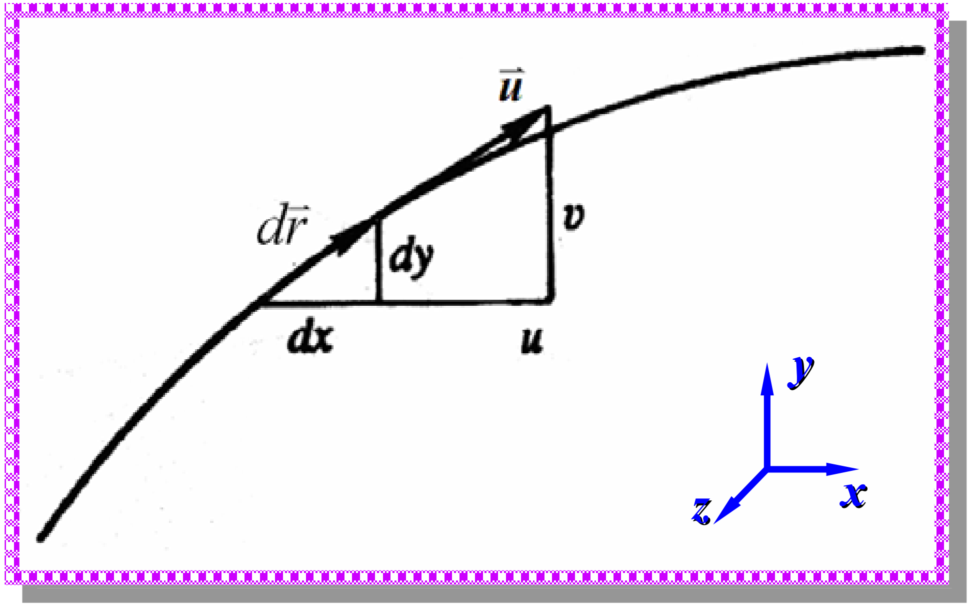
初始条件 $t = 0$ ⇒ $x = y = 1$ ⇒ $c_1 = c_2 = 1$

⇒ $x = e^{t(1+t)}$，$y = e^t$ ⇒ $\underline{\underline{x = y^{1+\ln y}}}$

流线

流线 → 某瞬时流场中一条假想曲线该曲线上各点速度方向和曲线在该点切线方向重合

- 非定常流动，空间给定点的速度大小和方向随时间而变化，因此流线总是指某一给定时刻的流线



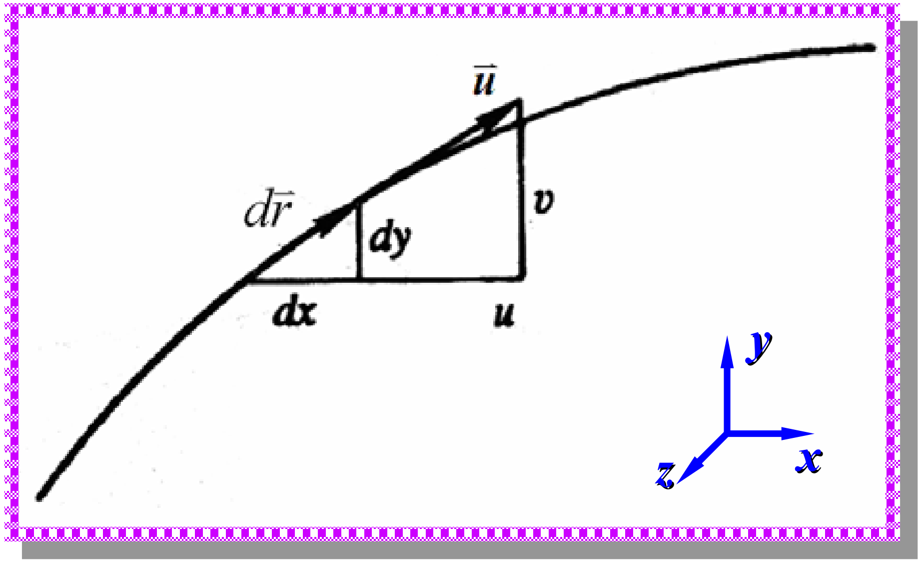
流线方程

流线微分方程

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$d\vec{l} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}}$$

- t 为常数，x，y，z，t 相互独立

流线方程例题

例：已知平面流动速度场：$u = x(1+2t)$，$v = y$，$w = 0$

求：$t = 0$时刻通过(1, 1)点的流体质点的流线

微分方程 ⇒ $$\frac{dx}{x(1+2t)} = \frac{dy}{y}$$

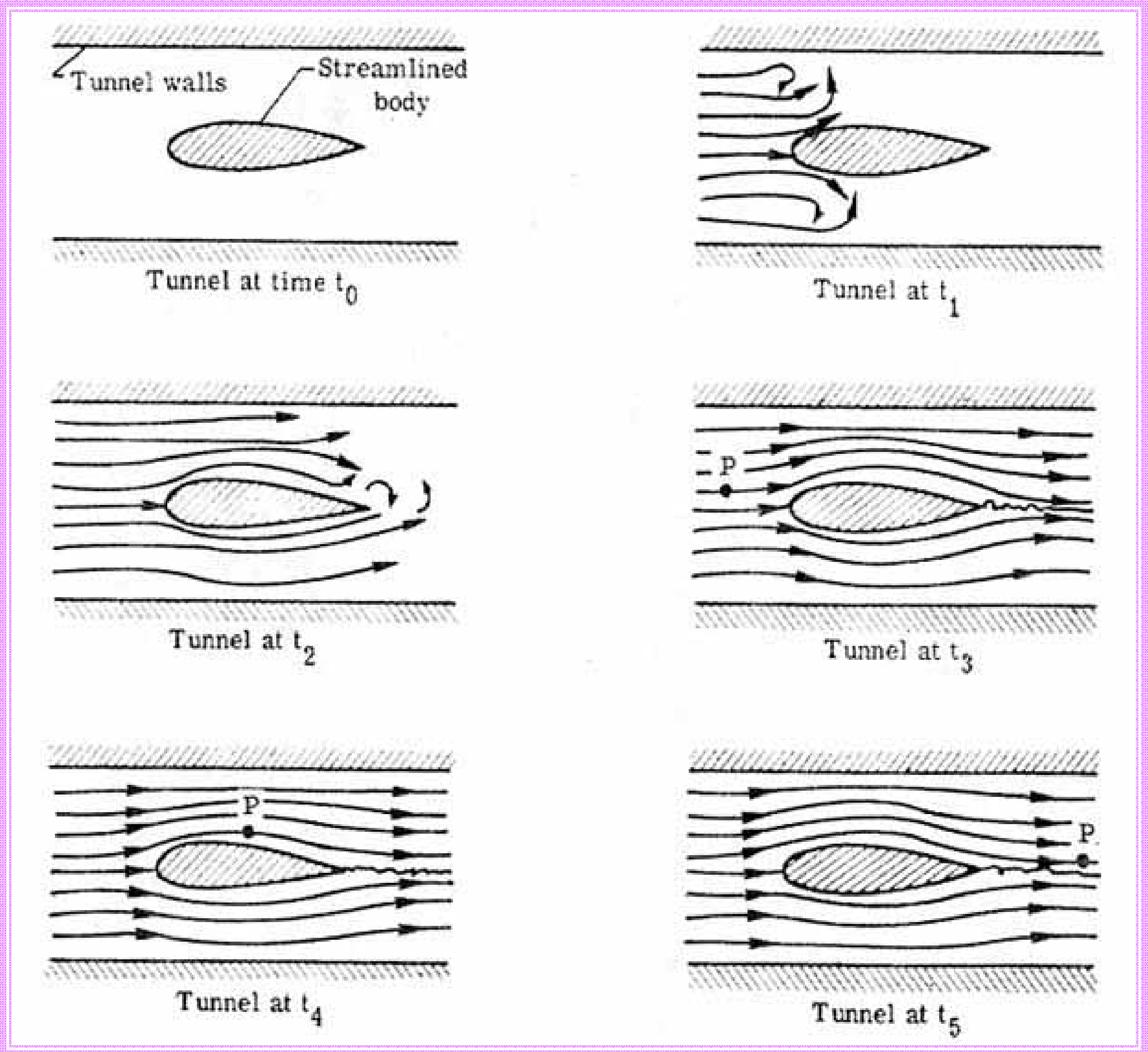
积分 ⇒ $\ln x = \ln y^{(1+2t)} + c$ ⇒ $x = c_1 y^{(1+2t)}$

定解条件 $t = 0$ ⇒ $x = y = 1$ ⇒ $c_1 = 1$

⇒ $x = y^{(1+2t)} \xrightarrow{t=0} \underline{\underline{x = y}}$

非定常流动，流线随时间不同而不同

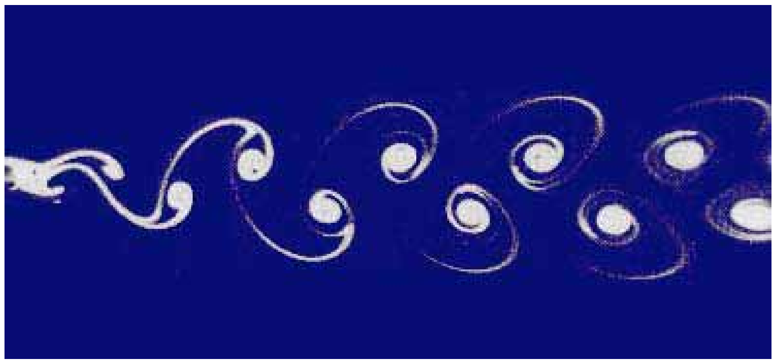
非定常到定常流动流线示意

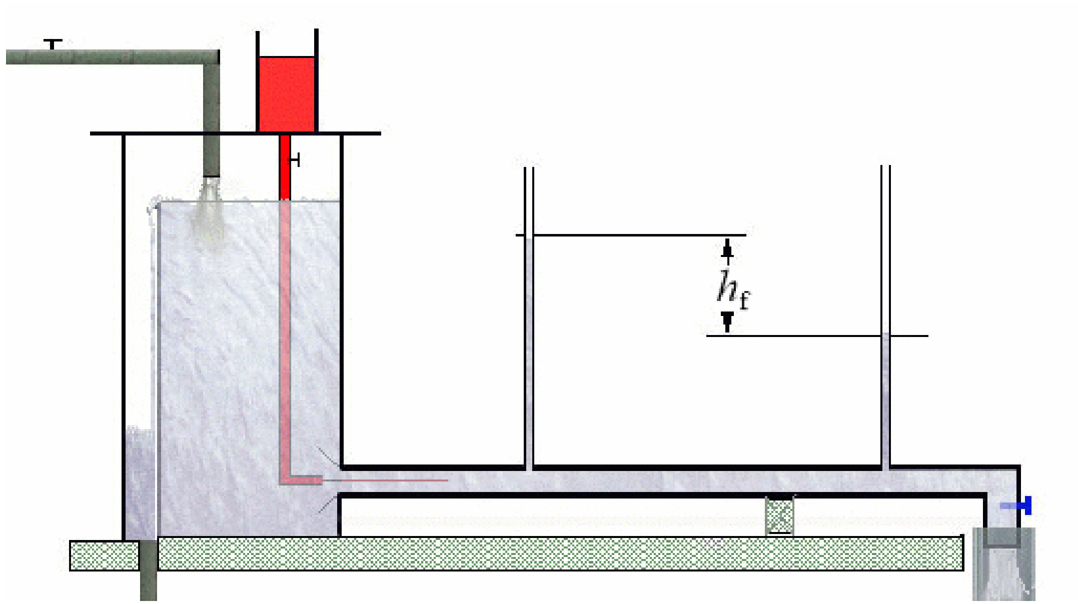


- 定常流动时流线、迹线、脉线重合，流线一般不相交或转折

脉线 → 相继通过流场同一空间点的流体质点在同一瞬时的连线

- **流场显示技术，反映流场结构、流动特点**





脉线方程1

- 求 τ 时刻从 x_*、y_*、z_* 进入流场的流体质点的迹线方程，即τ时刻通过x_*、y_*、z_* 的迹线

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dw}{w}=dt$$

- 初始条件 ⇨ $t=\tau$ 时，$x=x_*$ ，$y=y_*$ ，$z=z_*$

- 积分上述方程 ⇨

$$\begin{cases} x=x(x_*,y_*,z_*,t,\tau,) \\ y=y(x_*,y_*,z_*,t,\tau,) \\ z=z(x_*,y_*,z_*,t,\tau,) \end{cases}$$

或

$$\vec{r}=\vec{r}(\vec{r}_*,t,\tau)$$

脉线切线与速度矢量方向不一定相同

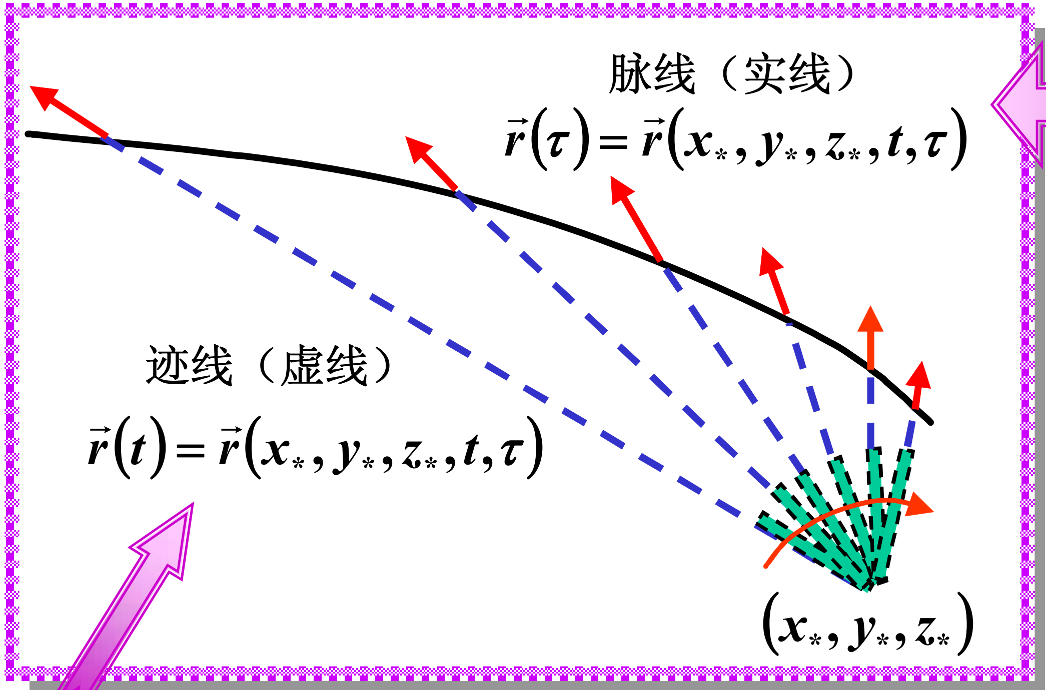
脉线方程2

$$\vec{r}(\tau)=\vec{r}(\vec{r}_*,t,\tau)$$

t 瞬时前不同时刻 τ 经由 (x_*, y_*, z_*) 点注入流场的不同流体质点在 t 时刻的空间位置

固定 t

τ 在 $-\infty \le \tau \le t$ 内取值



τ 时刻由点 (x_*, y_*, z_*) 注入流场的一个流体质点的迹线；不同的 τ 表示不同的迹线

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(\vec{r}_*,t,\tau)$$

固定 τ，t 在 $t \ge \tau$ 内取值

脉线方程例题1

例：已知平面流动速度场：$u = x(1+2t)$，$v = y$，$w = 0$

求：$t = 0$时刻通过(1, 1)点的流体质点的脉线

微分方程 $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1+2t) \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

积分 $\Longrightarrow$ $x = c_1 e^{t(1+t)}$，$y = c_2 e^t$

初始条件 $t = \tau$ $\Longrightarrow$ $x = y = 1$

$\Longrightarrow$ $c_1 = e^{-\tau(1+\tau)}$，$c_2 = e^{-\tau}$

脉线方程例题2

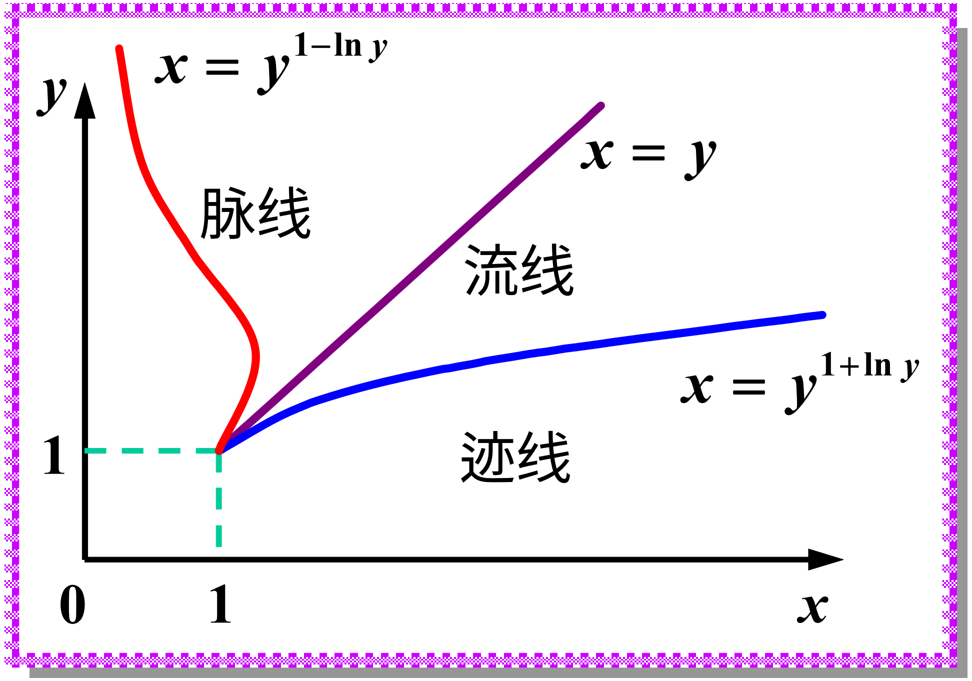
$$\Rightarrow \quad x = e^{t(1+t)-\tau(1+\tau)} \ , \ y = e^{t-\tau}$$

上式即通过 (1, 1) 点的脉线方程，式中 $-\infty \le \tau \le t$

显然不同时刻，脉线形状不同，令 $t = 0$

$$\Rightarrow \quad x = e^{-\tau(1+\tau)} \ , \ y = e^{-\tau}$$

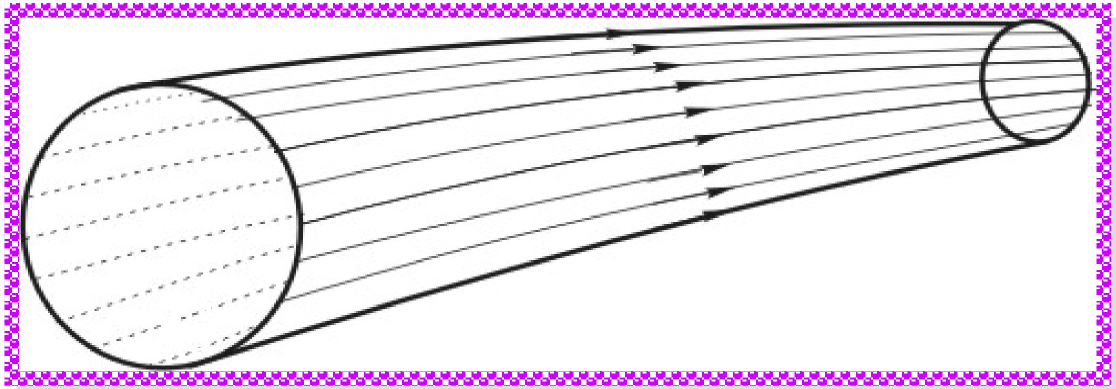
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = y^{1-\ln y}}}$$



流管

在流场中做一封闭且不自相交的曲线 C，在某瞬时通过该曲线上的流线构成的管状表面称为流管

- **有限流管**
- **流管元**



- **流体不能从侧壁穿入穿出**
- **定常流动时，定常流动时流管形状不变，类似于固定管道**

欧拉参考系和拉格朗日参考系中的时间导数

欧拉参考系

$$\vec{u}=\vec{u}(x,y,z,t)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_{x,y,z}$$

某一空间点上的流体速度随时间的变化，称当地导数或局部导数

拉格朗日参考系

$$\vec{u}=\vec{u}(x_0,y_0,z_0,t)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0}$$

流体质点速度随时间的变化率，即加速度

欧拉法描述流体质点的加速度1

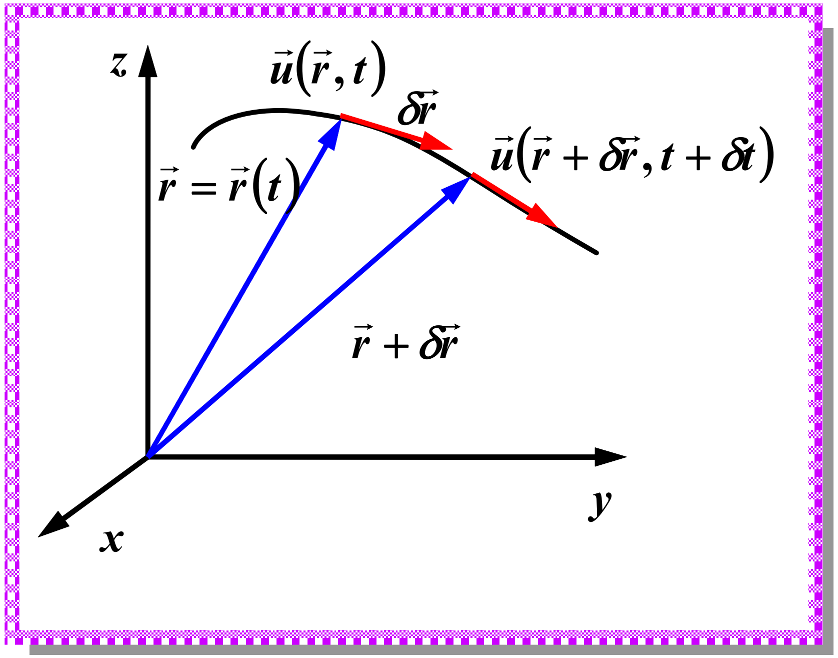
物质导数是流体质点的物理量随时间的变化率
又称质点导数，随体导数

$\frac{D\vec{u}}{Dt}$ ⇒ 欧拉参考系下某流体质点的速度随时间的变化率

t 时刻 ⇒ $\vec{u}(x, y, z, t)$

$t + \delta t$ 时刻 ⇒

$\vec{u}(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$



欧拉法描述流体质点的加速度2

$$\vec{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{u}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) - \vec{u}(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{u}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\delta t - \vec{u}(\vec{r},t)}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}}$$

流体质点的加速度

$\Rightarrow$ 流体质点的速度随时间的变化率

欧拉法描述流体质点的加速度3

$\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ → 空间点上的速度随时间的变化率，由速度场的非定常性引起

$\partial \vec{u}/\partial t = 0$ ⇕ 速度场定常

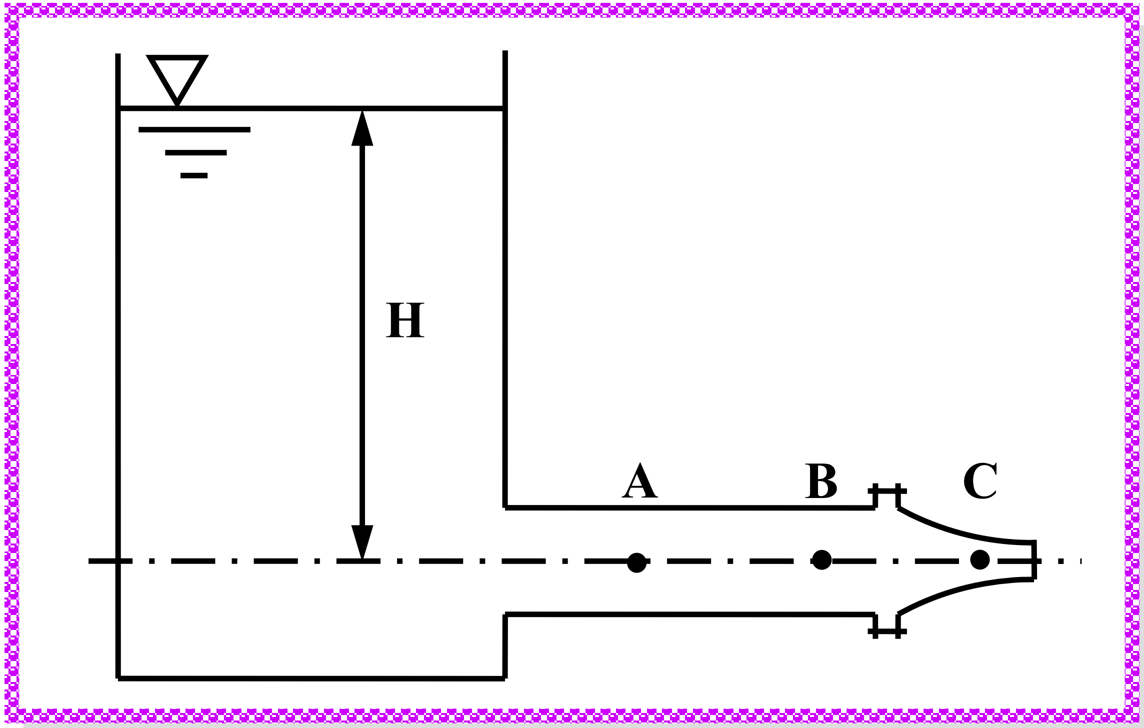
当地加速度或局部加速度

$u\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial z}$ → 由流体质点在非均匀的速度场中运动引起

迁移加速度或对流加速度

速度场均匀 → $u\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$

欧拉法描述流体质点的加速度4



定常

A⇒B

匀速直线运动

无当地和对流加速度

B⇒C

加速运动，存在对流加速度

非定常

A⇒B 速度变化，存在当地加速度

B⇒C 速度变化，存在当地和对流加速度

物质导数1

任意物理量 η 的物质导数

$$\frac{D\eta}{Dt}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}+w\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\eta$$

$\dfrac{D\eta}{Dt}$ ⇒ 流体质点的物理量 η 随时间的变化率

物质导数（质点导数或随体导数）

物质导数2

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}$$ → 空间点上的 η 随时间的变化率
由物理量场的非定常性引起

局部导数或当地导数

$$u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y}+w\frac{\partial \eta}{\partial z}$$ → 由流体质点在非均匀的
物理量场中运动引起的
η 的变化率

位变导数或对流导数 $(\vec{u}\cdot\nabla)\eta$

物质导数例题1-1

例：为研究城市的空气污染情况，需测量某项污染指标 s 随时间的变化率，采用了三种方法：1) 把测量探头安装在一高塔上；2) 把探头安装在一直升飞机上，直升飞机速度为 $\vec{U}$ ；3)把探头安装在一气球上，设气球随气流运动，气流速度为 $\vec{u}$ 。试用数学公式分别表示上述三种方法的测量结果。

(1) 测量探头安装在一高塔上，测得的是在流场某一固定点上 s 的随时间的变化率，即 s 的当地导数

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial t}$$

物质导数例题1-2

(2) 直升飞机上探头测得的 s 变化率应等于 s 的当地变化率加上 s 的空间变化率与直升飞机速度的乘积

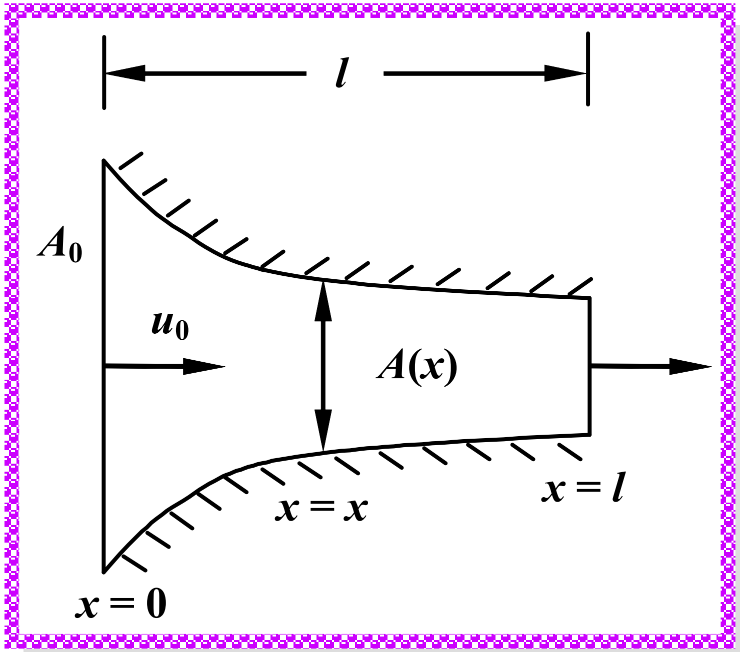
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial t}+U_x\frac{\partial s}{\partial x}+U_y\frac{\partial s}{\partial y}+U_z\frac{\partial s}{\partial z}$$

(3) 由于气球与空气速度相同，气球上探头测得的 s 变化率就是 s 的随体导数或物质导数

$$\Rightarrow \quad \frac{Ds}{Dt}=\frac{\partial s}{\partial t}+u_x\frac{\partial s}{\partial x}+u_y\frac{\partial s}{\partial y}+u_z\frac{\partial s}{\partial z}$$

物质导数例题2-1

例：考虑图示收缩通道内理想不可压缩流体的一维定常流动，分别求欧拉和拉格朗日参考系内的速度和加速度表达式



$$A(x)=A_0/(1+x/l)$$

解：欧拉参考系，不可压缩流体根据连续方程

$$u_0A_0=u(x)A(x)$$

$$u(x)=\frac{u_0A_0}{A(x)}=u_0(1+x/l)$$

$$a_x=\frac{Du}{Dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_0^2}{l}\left(1+\frac{x}{l}\right)$$

物质导数例题2-2

在拉格朗日参考系中，$u=u(t)$是 $t=0$时刻从 $x=0$出发的流体质点的速度表达式，由

$$u=u_0(1+x/l) \Longrightarrow \frac{dx}{dt}=u_0(1+x/l) \Longrightarrow \int_0^x \frac{dx}{1+x/l}=\int_0^t u_0 dt$$

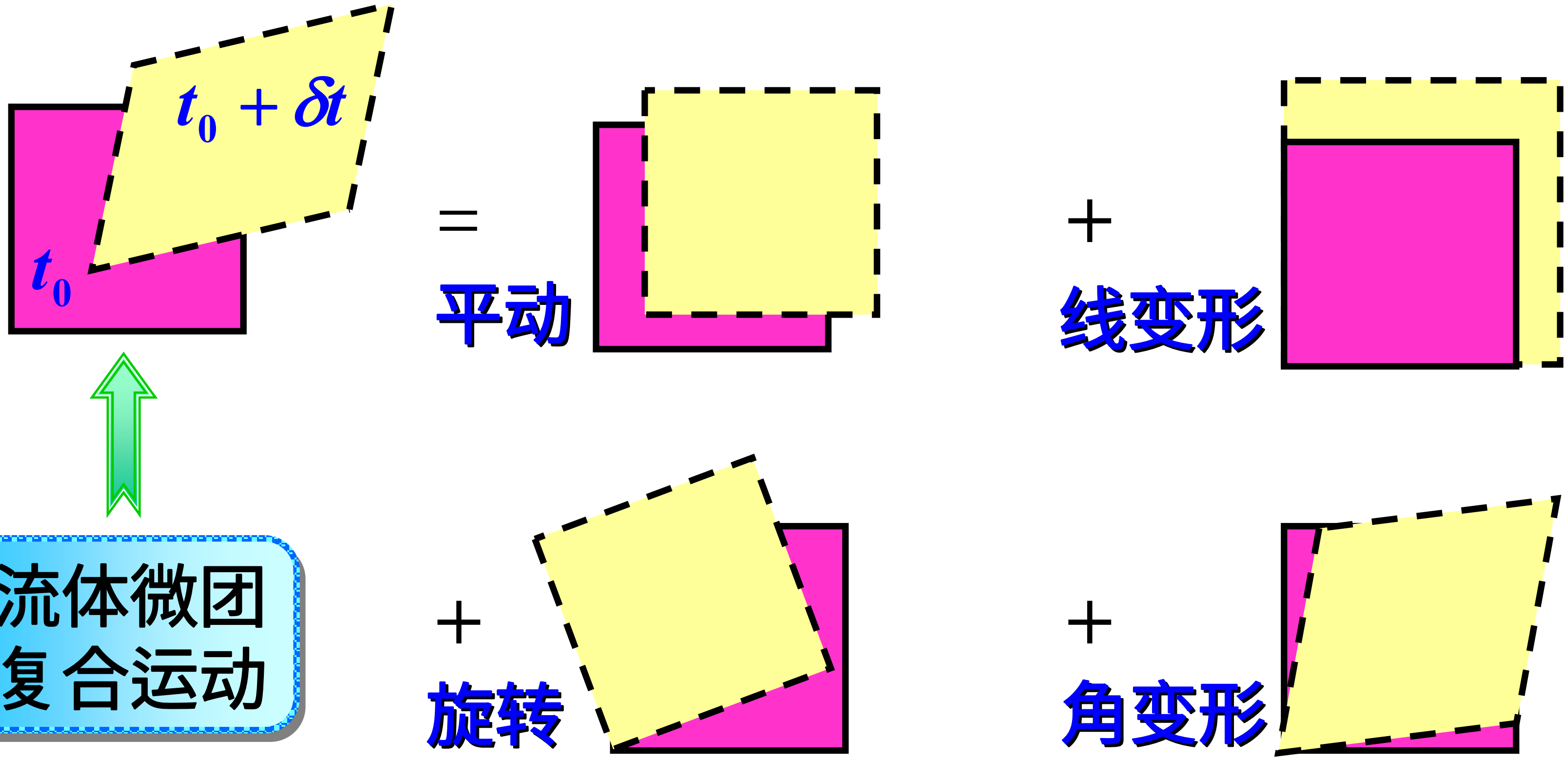
$$\Longrightarrow l\ln(1+x/l)=u_0 t \Longrightarrow x=l\left[\exp\left(\frac{u_0 t}{l}\right)-1\right]$$

两边对 t 求导 $\Longrightarrow$ $u=\dfrac{dx}{dt}=u_0\exp\left(\dfrac{u_0 t}{l}\right)$

再对 t 求导 $\Longrightarrow$ $a=\dfrac{du}{dt}=\dfrac{u_0^2}{l}\exp\left(\dfrac{u_0 t}{l}\right)$

Helmholtz速度分解定理

流体微团的运动可分解为平动、转动、变形三部分之和



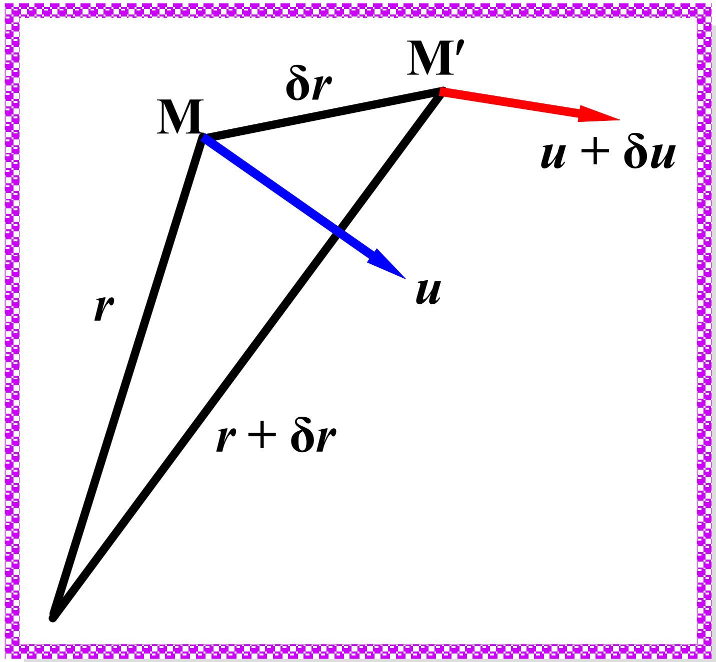
流体微团复合运动

速度分解定理2

M (x, y, z) 处的速度 ⟹ $\vec{u}$

M′ ($x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$) 处速度

⟹ $\vec{u}+\delta u$



以 x 方向速度为例由泰勒级数展开，略去高阶小项

⟹ $$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

$$\begin{pmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix}$$

上式分别加、减 $\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\delta y$ ，$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\delta z$

速度分解定理3

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta z-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y$$

令

$$s_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\text{，}s_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\text{，}s_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

应变率张量的各分量

旋转角速度

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\text{，}\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

速度分解定理4

$$\delta u = s_{xx}\delta x + s_{xy}\delta y + s_{xz}\delta z + \omega_y \delta z - \omega_z \delta y$$

同理，对于 y 方向和 z 方向速度分量也可得

$$\delta v = s_{xy}\delta x + s_{yy}\delta y + s_{yz}\delta z + \omega_z \delta x - \omega_x \delta z$$

$$\delta w = s_{xz}\delta x + s_{yz}\delta y + s_{zz}\delta z + \omega_x \delta y - \omega_y \delta x$$

其中

$$s_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad s_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad s_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

速度分解定理5

平动速度 ⇒ $\vec{u}(x, y, z, t)$

线变形率 ⇒ $\dot{\gamma}_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dot{\gamma}_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dot{\gamma}_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$

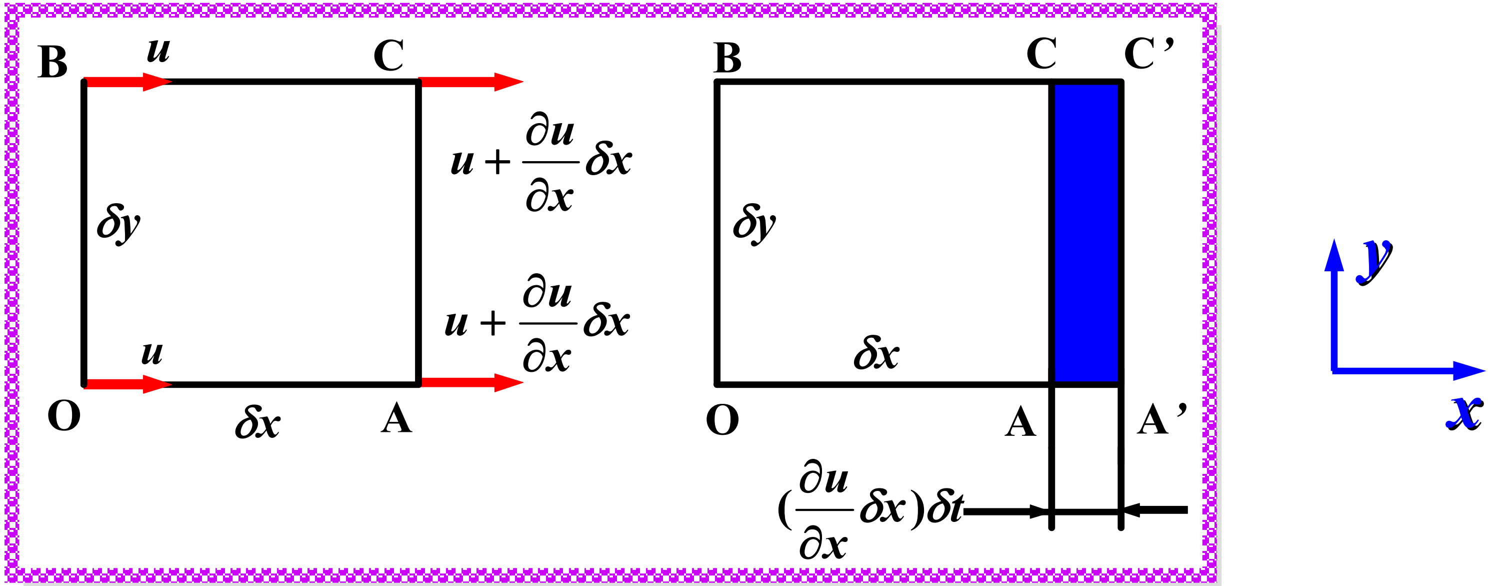
角变形率

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

旋转角速度

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

线变形 —— 体积发生变化



- x 方向相对变形率 $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}$
- y 方向和 z 方向相对变形率 $\Rightarrow$ $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$

线变形2—散度

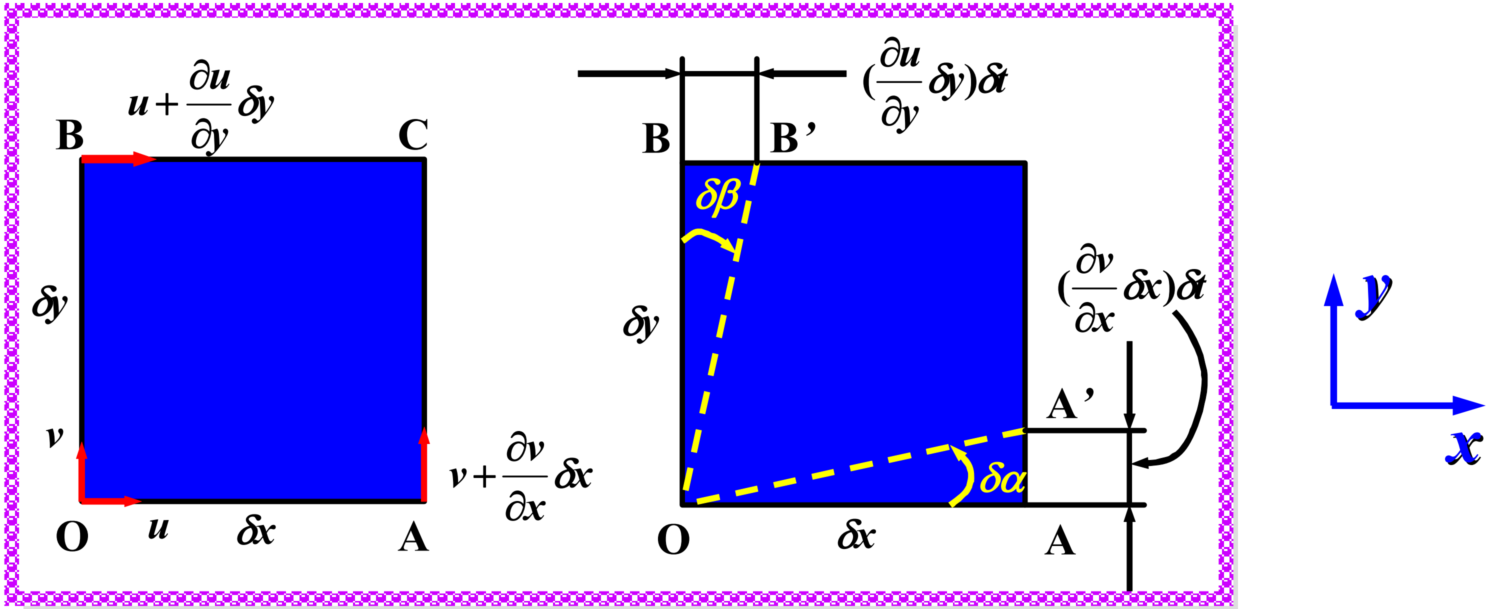
线变形引起总的相对体积膨胀率

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{u}$$

单位体积流体单位时间内增加/减少了多少体积，或单位时间有多少流体体积从单位体积内流入/流出

- **不可压缩流体** → $\boxed{\nabla\cdot\vec{u}=0}$ 速度散度为零

存在交叉导数



- OA边旋转角速度 ⇒ $$\omega_{OA}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t}=\frac{\partial v}{\partial x}$$
- OB边旋转角速度 ⇒ $$\omega_{OB}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\beta}{\delta t}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

旋转2

- 规定相互垂直的流体线OA和OB的角速度ω_{OA}和ω_{OB}的平均值为流体团绕 z 轴的旋转角速度，且逆时针方向为正

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- 流体团绕 x 和 y 轴的旋转角速度

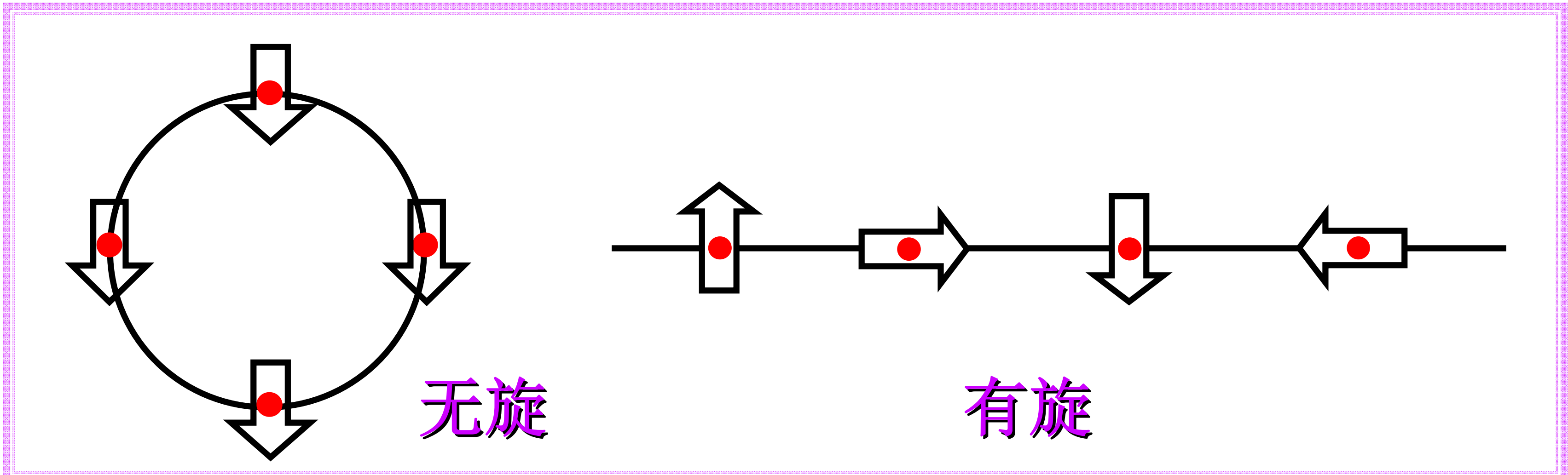
$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

旋转3－角速度矢量、旋度

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}$$

涡量

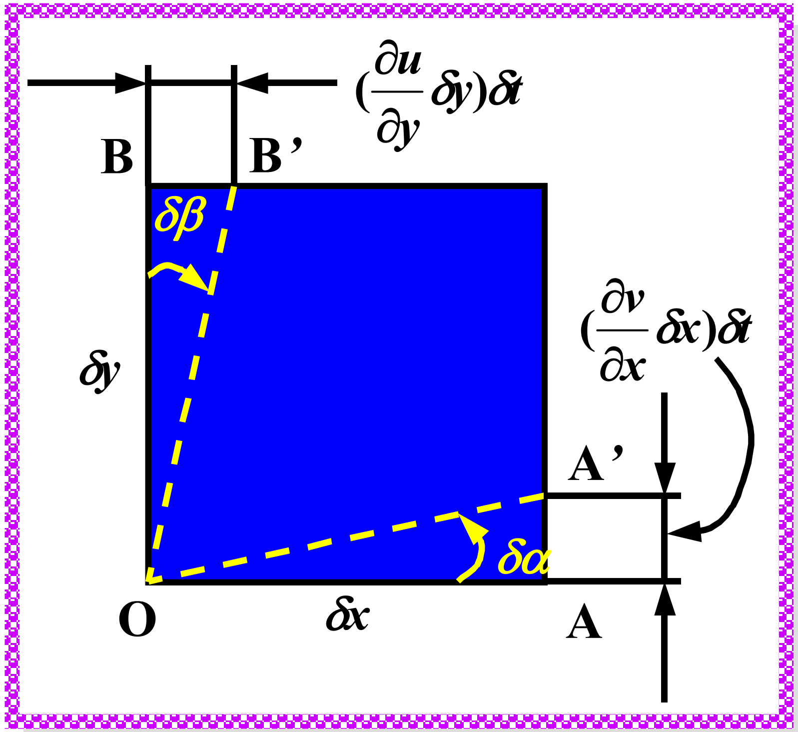
无旋流动 ⇒ $\vec{\omega}=0$ 流体微团本身是否旋转



角变形

- OA、OB（x、y轴）间的角变形率

$$\dot{\gamma} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \gamma}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \alpha + \delta \beta}{\delta t}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2s_{xy} = 2s_{yx}}$$

- y、z 轴及 z、x轴间的角变形率

$$\Rightarrow \boxed{2s_{xz} = 2s_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}} \quad \boxed{2s_{yz} = 2s_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} u_{M'} \\ v_{M'} \\ w_{M'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_M \\ v_M \\ w_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

应变率张量

旋转率张量

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix}$$

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

补：笛卡尔张量1

标量

- 一维的量，只有大小，没有方向，它只需1个数来表示，如温度 T、密度 ρ 等

矢量

- 不仅有数量的大小，而且有指定的方向
- 必需由沿某一空间坐标系的 3 个坐标轴方向的 3 个分量来表示，是三维的量
- 如力 $\vec{F}$，速度 $\vec{u}$，加速度 $\vec{a}$，动量 $m\vec{u}$ 等

补：笛卡尔张量2

张量

- 除有大小外，有两个方向，如应力 τ_{ij} ：力的方向和力作用面的方向，因此需要 9 个分量来表示，称为二阶张量

三维空间中的 n 阶张量由 3^n 个分量组成

- 标量和矢量是低阶张量，标量为零阶张量，而矢量为一阶张量

二阶张量 → 有 9 个分量

- 以矩阵形式可表示为

$$P = p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

- 应变率张量和旋转率张量均为二阶张量

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} \qquad A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

补：笛卡尔张量4

对称张量 $\Longrightarrow$ $p_{ij} = p_{ji}$

- 应变率张量为二阶对称张量

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & \underline{s_{12}} & \underline{s_{13}} \\ \underline{s_{21}} & s_{22} & \underline{s_{23}} \\ \underline{s_{31}} & \underline{s_{32}} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix}$$

- 一个对称张量，只有6个独立的分量

$$s_{12} = s_{21} \;,\; s_{13} = s_{31} \;,\; s_{23} = s_{32}$$

补：笛卡尔张量5

反对称张量 → $p_{ij} = -p_{ji}$

- 应变率张量为二阶对称张量

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

- 一个对称张量，只有3个独立的分量

$$a_{12} = -a_{21} \text{ ， } a_{13} = -a_{31} \text{ ， } a_{23} = -a_{32}$$

补：笛卡尔张量6

指标表示法

- 直角坐标的 3 个方向记作 1、2、3
- x、y、z 分别记作 x_1、x_2、x_3 ⇒ x_i
- a_x、a_y、a_z 分别记作 a_1、a_2、a_3 ⇒ a_i
- $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 分别记作 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$

⇒ $$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

补：笛卡尔张量7

求和约定 在同一项中有两个指标相同表示对该指标从 1 到 3 求和

j：哑指标 $$\tau_{ji}n_j = \tau_{1i}n_1 + \tau_{2i}n_2 + \tau_{3i}n_3$$ i：自由指标

- 改变哑指标的字母不改变表达式内容
- 同一方程所有项中的自由指标必须相同
- 同一项中同一指标出现的次数不能多于2

举例

$$\vec{u}=\vec{u}(x,y,z,t)=\vec{u}(\vec{r},t) \Rightarrow \boxed{u_i=u_i(x_j,t)}$$

$$\vec{a}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_j=\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}$$

补：笛卡尔张量9

- **应变率张量用指标表示** ⇒ $$s_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$S=s_{ij}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

旋转率张量用指标表示

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$A=a_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

补：笛卡尔张量11

$$\begin{pmatrix} u_{M'} \\ v_{M'} \\ w_{M'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_M \\ v_M \\ w_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

由于流体微团变形产生的速度变化

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

变形速度

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

由于流体微团绕瞬时轴旋转而产生的速度变化

旋转速度

$$\boxed{s_{ij}\delta x_j}$$

$$s_{xx}\delta x + s_{xy}\delta y + s_{xz}\delta z$$
$$s_{xy}\delta x + s_{yy}\delta y + s_{zz}\delta z$$
$$s_{xz}\delta x + s_{yz}\delta y + s_{zz}\delta z$$

$$\omega_y\delta z - \omega_z\delta y$$
$$\omega_z\delta x - \omega_x\delta z$$
$$\omega_x\delta y - \omega_y\delta x$$

$$\boxed{a_{ij}\delta x_j}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{当}i\neq j\text{时}\\ 1 & \text{当}i=j\text{时}\end{cases}$$

Kronecker符号的重要性质

$$\boxed{\delta_{ij}=\delta_{ji}} \Rightarrow \delta_{12}=\delta_{21}\quad \delta_{13}=\delta_{31}\quad \delta_{23}=\delta_{32}$$

$$\boxed{\delta_{ij}a_j=a_i} \Rightarrow \begin{array}{l}\delta_{1j}a_j=\delta_{11}a_1+\delta_{12}a_2+\delta_{13}a_3=a_1\\ \delta_{2j}a_j=a_2\ ,\ \delta_{3j}a_j=a_3\end{array}$$

- δ_{ij} 的作用相当于把a_j 的下标由 j 置换为 i

补：笛卡尔张量13

$$\boxed{\delta_{ii}=3} \Longrightarrow \delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$$

$$\boxed{\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}} \Longrightarrow \delta_{1j}\delta_{j1}=\delta_{11}\delta_{11}+\delta_{12}\delta_{21}+\delta_{13}\delta_{31}=\delta_{11}$$

- 把下标由 j 置换为 i

$$\boxed{\delta_{ij}\delta_{ji}=\delta_{ii}=\delta_{jj}=3}$$

补：笛卡尔张量14

置换符号

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 & i、j、k\text{中有两个以上指标相同}\\ 1 & i、j、k\text{偶排列，}123，231，312\\ -1 & i、j、k\text{奇排列，}213，321，132\end{cases}$$

- 将首位指标移至末位，或将末位指标移至首位，奇偶性不变

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}$$

- 任意两个相邻的指标交换位置，会改变奇偶性；

$$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}$$

置换符号的性质

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 & i、j、k\text{中有两个以上指标相同}\\1 & i、j、k\text{偶排列，}123，231，312\\-1 & i、j、k\text{奇排列，}213，321，132\end{cases}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks}}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijt}=\delta_{jj}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{kj}=3\delta_{kt}-\delta_{kt}=\underline{\underline{2\delta_{kt}}}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{kk}=\underline{\underline{6}}$$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{ij}=\underline{\underline{0}}$$

旋转率张量与旋转角速度的关系

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ \underline{a_{21}} & 0 & \underline{a_{23}} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = -a_{21} = -\omega_3 \;,\; a_{23} = -a_{32} = -\omega_1 \;,\; a_{31} = -a_{13} = -\omega_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k}$$

速度分解定理例题1

例：平面简单剪切运动的速度分布为：$u = ay$ ，$v = w = 0$

求：(1) 流体微团的旋转角速度；(2) 应变率张量s_{ij}；(3) 旋转率张量a_{ij}；(4) 变形速度$s_{ij}\,\delta x_j$及旋转速度$a_{ij}\,\delta x_j$

(1) 旋转角速度

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{u} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}a\vec{k}}}$$

速度分解定理例题2

(2) 应变率张量

$$s_{ij}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & a/2 & 0\\ a/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}}$$

(4) 变形速度

$$s_{ij}\delta x_j=\begin{pmatrix}0 & a/2 & 0\\ a/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}a\delta y/2\\ a\delta x/2\\ 0\end{pmatrix}}}$$

速度分解定理例题3

(3) 旋转率张量

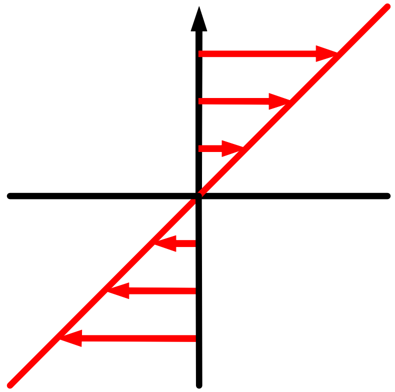
$$a_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ -a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

(4) 旋转速度

$$a_{ij}\delta x_j=\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ -a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} a\delta y/2 \\ -a\delta x/2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

速度分解定理例题4

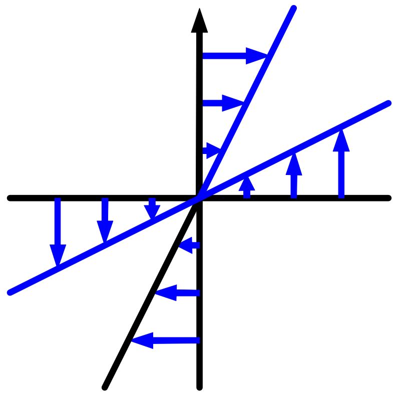
以上结果表明一个平面剪切运动可以分解为一个剪切变形运动和一个旋转运动,可以用下图直观的表示



$$u = ay$$

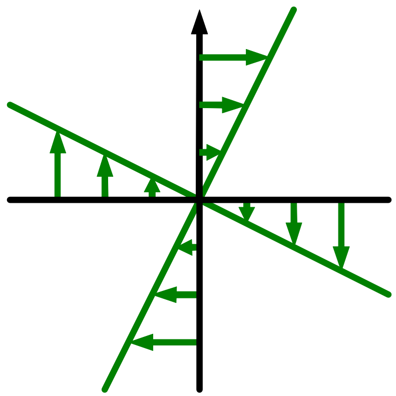
$$\begin{pmatrix} a\delta y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta u = a\delta y$$



$$s_{ij}\delta x_j = \begin{pmatrix} a\delta y/2 \\ a\delta x/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta u = a\delta y/2$$
$$\delta v = a\delta x/2$$



$$a_{ij}\delta x_j = \begin{pmatrix} a\delta y/2 \\ -a\delta x/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta u = a\delta y/2$$
$$\delta v = -a\delta x/2$$

1.5 有旋运动的基本概念

涡量 → $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u} = 2\vec{\omega}$

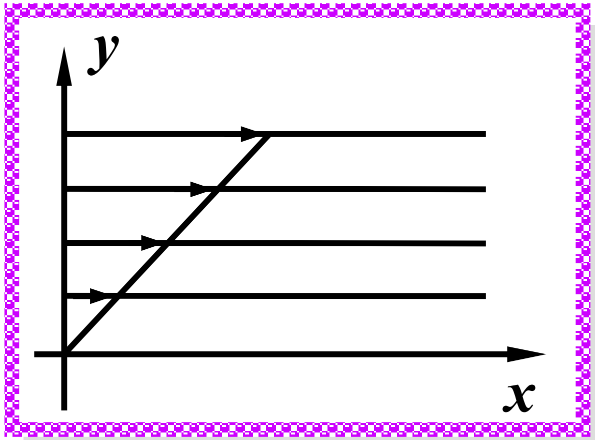
$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

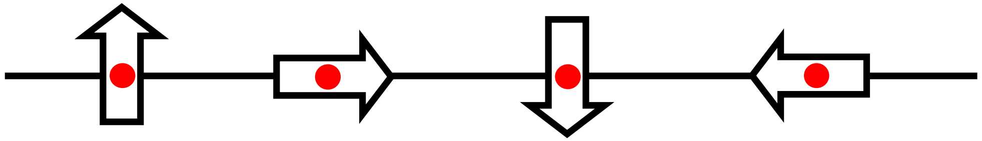
方向和大小分别代表流体微团瞬时转动轴的方向和旋转角速度的 2 倍

势流 → $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u} = 0$

流场中处处涡量为零，称为无旋流动或势流；流动有旋与否由流体微团本身是否旋转来判断

平面剪切运动





$$u = ay\ ,\ v = w = 0$$

有旋

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\underline{-a}}$$

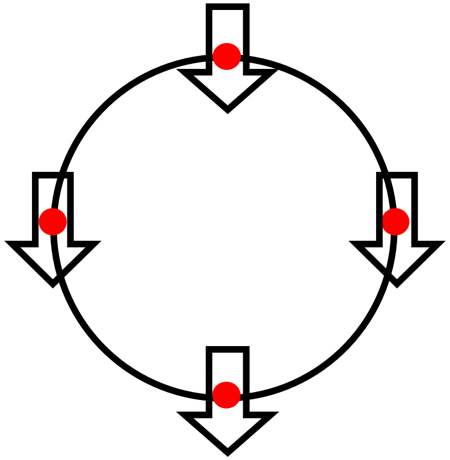
平面点涡

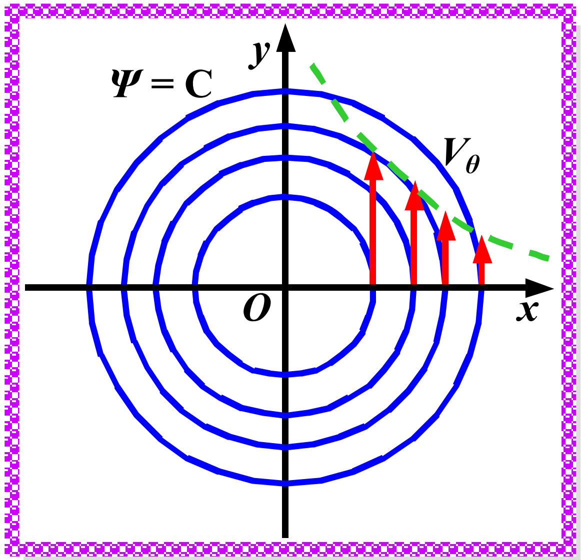
$$u_\theta = b/R\ ,\ u_R = u_z = 0$$

$$\Omega_z = \frac{1}{R}\frac{\partial(Ru_\theta)}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \theta}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

无旋





速度势函数1

速度势函数

$$\boxed{\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u} = 0} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

上式即 $udx + vdy + wdz$ 为某标量函数全微分的充要条件

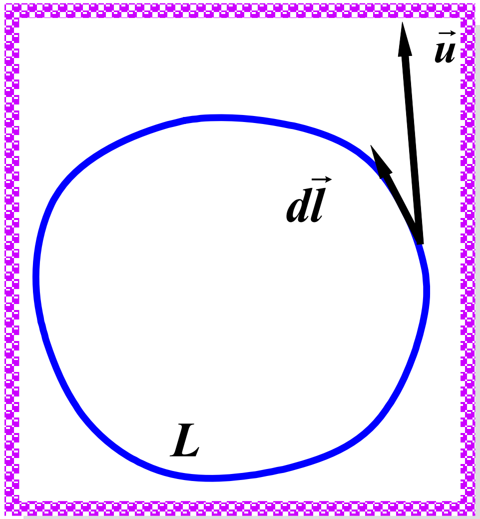
$$d\phi = udx + vdy + wdz = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \nabla \phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times \nabla \phi = 0}$$

速度环量

速度环量 → $\Gamma = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$



- 速度环量是流体绕封闭曲线旋转强度的度量，线积分沿逆时针方向进行

无旋 → $\int_A^P \vec{u} \cdot d\vec{l} = \Phi_P - \Phi_A$ $= \int_{ABP} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_{ACP} \vec{u} \cdot d\vec{l}$

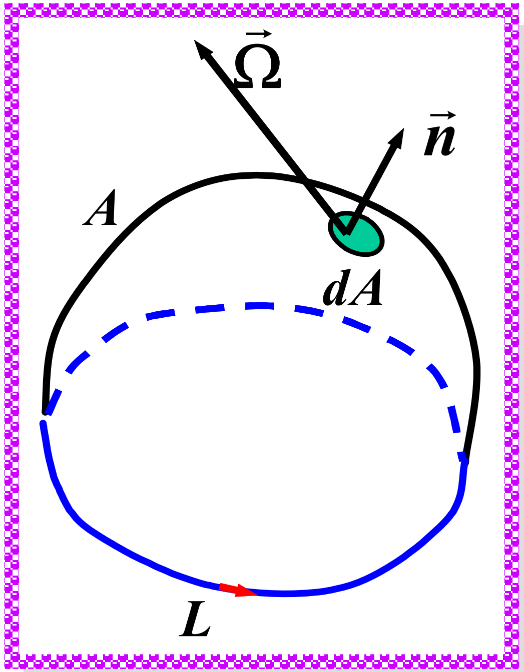
- 速度沿曲线的线积分与路径无关 → 速度场有势

斯托克斯公式

涡通量 $\Rightarrow$ $$\int_A \vec{\Omega}\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{\Omega}\cdot \vec{n}\,dA$$

斯托克斯定理

$\Rightarrow$ $$\oint_L \vec{u}\cdot d\vec{l} = \int_A \vec{\Omega}\cdot d\vec{A}$$

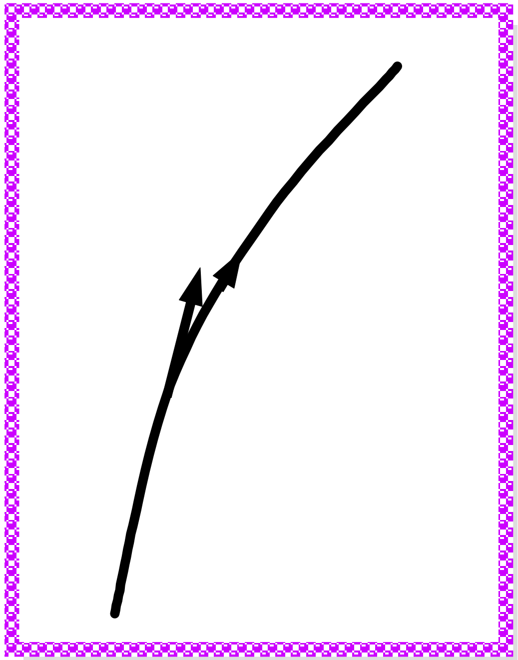


- 速度环量为零，涡量为零；反之亦然
- 速度环量是线积分，被积函数是速度本身；涡通量是面积分，被积函数是速度的偏导数；利用速度环量更方便

涡线、涡面和涡管1

涡线 → 曲线上各点的涡量矢量方向和曲线在该点的切线方向相同

$$\frac{dx}{\Omega_x}=\frac{dy}{\Omega_y}=\frac{dz}{\Omega_z}$$

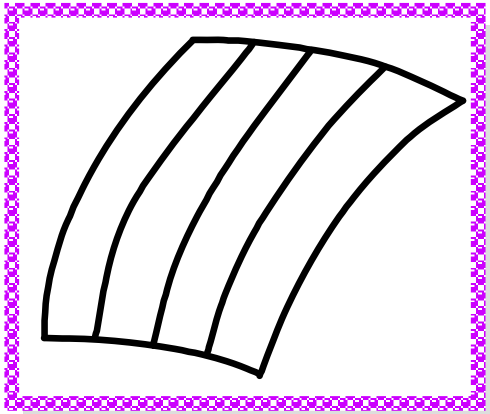


- 涡线上各流体质点都围绕涡线的切线方向旋转
- 某给定时刻，通过空间同一点的流线和涡线，一般来说方向不同
- 在平面流动和轴对称流动中，流线与涡线正交

涡线、涡面和涡管2

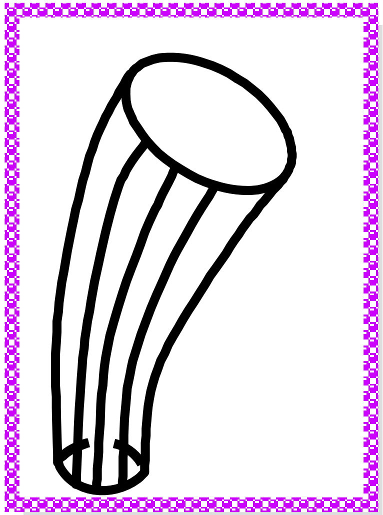
涡面

在涡量场内取一非涡线的曲线，过曲线每一点作涡线，这些涡线组成的曲面称涡面



涡管

在流场内作一非涡线且不自相交的封闭曲线，某瞬时通过该曲线上各点的涡线组成一管状表面，称涡管



- 涡管横截面无限小时称**微元涡管**

涡量场的运动学性质1

涡量场是无源场

矢量恒等式(P.393) ⟹ $\nabla\cdot\vec{\Omega}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{u}\right)=0$

$\nabla\cdot\vec{u}=0$ ⟸ 流体微团的相对体积膨胀率为零
流出单位体积控制体的体积流量为零

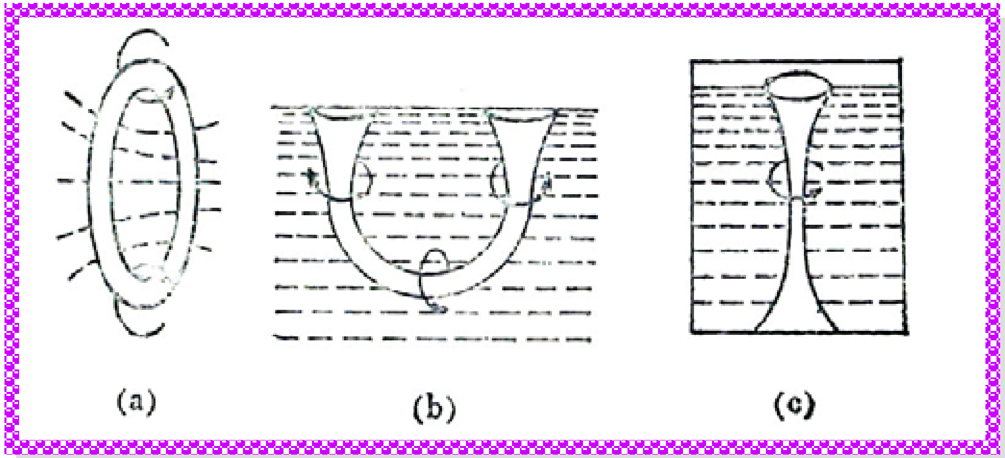
- 意味着流场内无源和无汇，不可压缩流体的速度场称为无源场

- 涡量的散度也为零，因此涡量场也是无源场

涡量场的运动学性质2

涡线和涡管都不能在流体内部中断

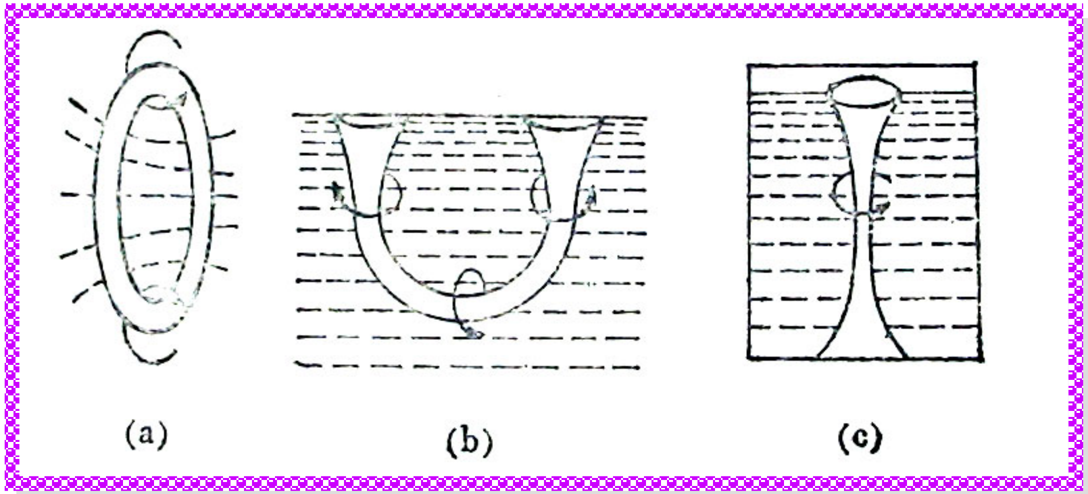
- 如果发生中断，取封闭曲面，将中断处包含在其中，则通过封闭曲面的涡通量将不为零，与无源场矛盾



- 不可压缩流体的速度场是无源场，因此流线和流管也不能在流体内部终止

涡量场的运动学性质3

- 涡线和涡管只能在流体中自行封闭，形成涡环
- 或将其头尾搭在固壁或自由面
- 或延伸至无穷远



- 流线和流管也必须自行封闭，或延伸至无穷远，或将其头尾搭在固壁或自由面上

涡量场的运动学性质4

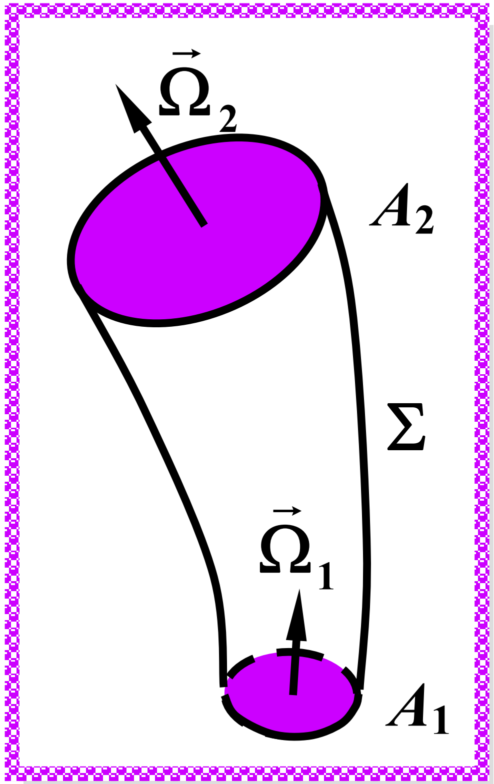
涡管强度

由 $\nabla\cdot\vec{\Omega}=0$ 对于图示涡管有

$$\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{\Omega}d\tau=0\Rightarrow\int_{A_1+\Sigma+A_2}\vec{n}\cdot\vec{\Omega}dA=0$$

$$=-\int_{A_1}\vec{n}\cdot\vec{\Omega}dA+\int_{A_2}\vec{n}\cdot\vec{\Omega}dA=0$$

$$\boxed{\int_{A_1}\vec{n}\cdot\vec{\Omega}dA=\int_{A_2}\vec{n}\cdot\vec{\Omega}dA}$$

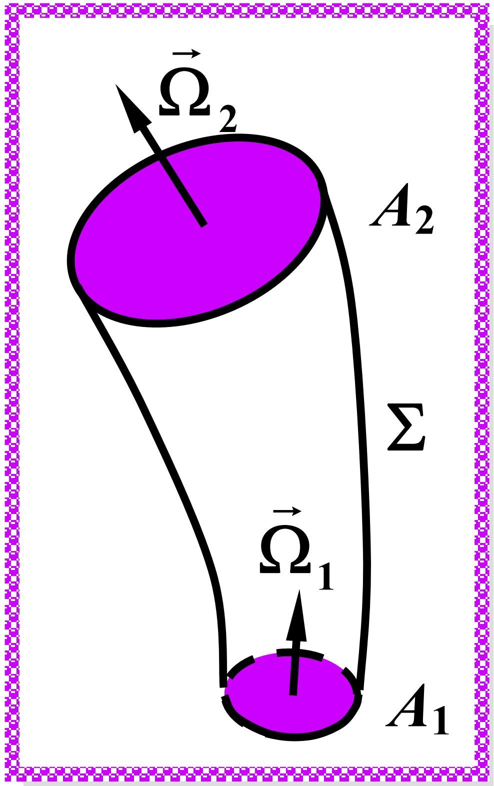


对一个确定的涡管，它的任一横截面上的涡通量相等。该常数称为涡管强度

涡量场的运动学性质5

引用斯托克斯公式

$$\Gamma_1 = \int_{A_1} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA \qquad \Gamma_2 = \int_{A_2} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA$$



$$\boxed{\int_{A_1} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA = \int_{A_2} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} dA}$$

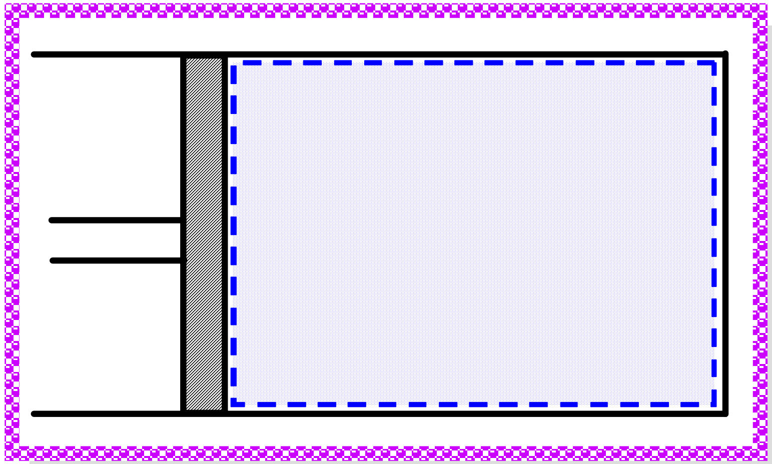
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_1 = \Gamma_2}$$

在同一时刻围绕A_1周界的速度环量与围绕A_2周界的速度环量相等，即涡管任意横截面上的环量相等

系统 → 某一确定流体质点集合的总体

system

- 与外界无质量交换
- 随流体质点的运动而运动
- 边界形状、包围空间大小随流体质点的运动而变化



- 拉格朗日参考系中，通常把注意力集中在流动的系统上

拉格朗日参考系中的物理定律

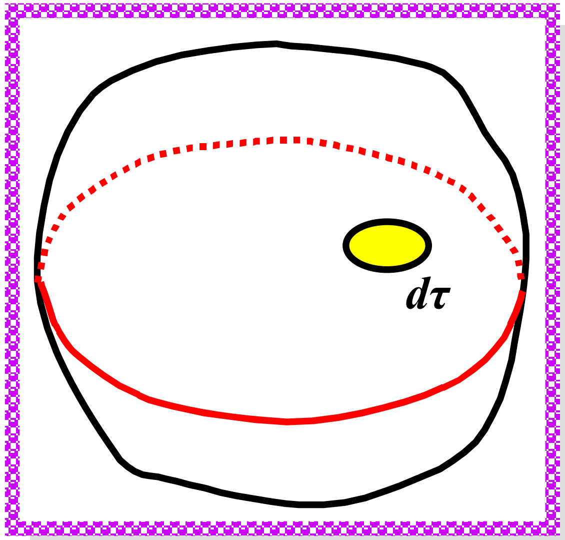
物理定律通常应用于系统

- 质量守恒方程 ⟹ $m_{sys}=\text{const}$ 或 $\dfrac{dm}{dt}=0$
- 动量方程 ⟹ $\vec{F}=m\vec{a}=m\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\dfrac{d\left(m\vec{u}\right)}{dt}$
- 动量矩方程 ⟹ $\vec{T}=\dfrac{d\vec{H}}{dt}\qquad \vec{H}=\sum\left(\vec{r}\times\vec{u}\right)\delta m$
- 能量守恒方程 ⟹ $dE/dt=\dot{Q}+\dot{W}$

系统体积分的随体导数

系统体积分的随体导数

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \phi d\tau$$



N ⟹ 系统体积内包含的总物理量

ϕ ⟹ 单位体积流体的物理量分布函数

质量 ⟹ $N = m$, $\phi = \rho$

动量 ⟹ $N = \vec{k} = m\vec{u}$, $\phi = \rho\vec{u}$

控制体1

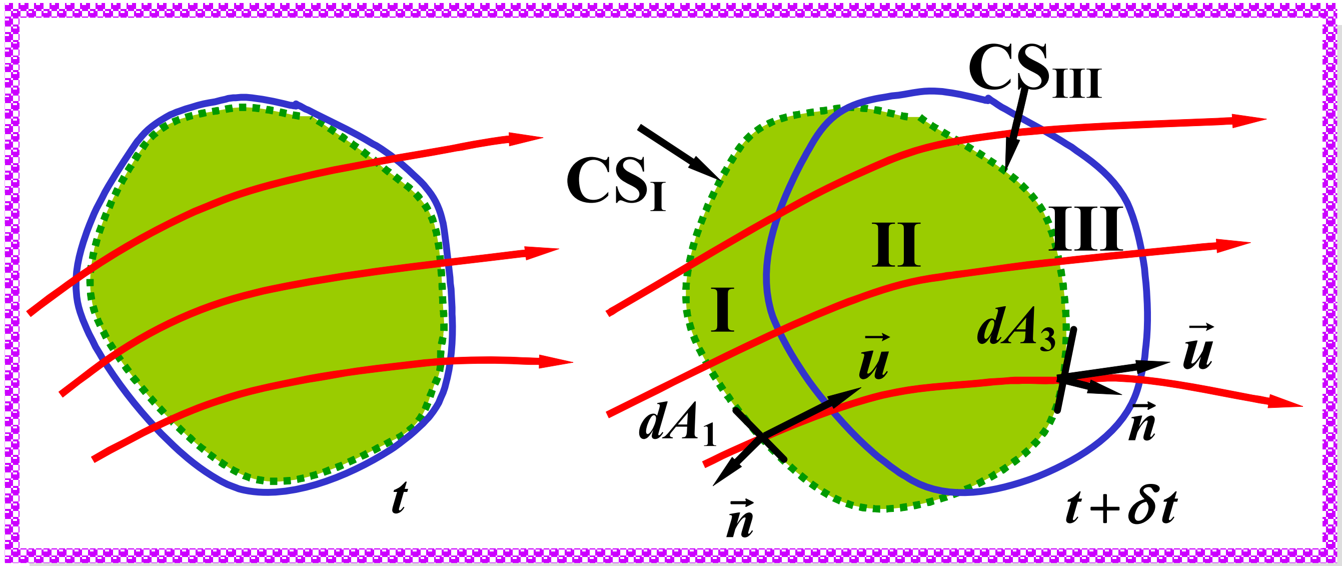
控制体 ⇒ 流场中某一确定的空间区域

- 与外界有质量交换
- 空间位置相对于某参照系不变
- 边界形状、包围空间大小一般是确定的
- 欧拉参考系中通常把注意力集中在通过控制体的流体上

雷诺输运定理1

欧拉方法描述系统物理量随时间的变化率，即采用与控制体相关的物理量描述系统体积分的随体导数

初始时刻系统与控制体重合

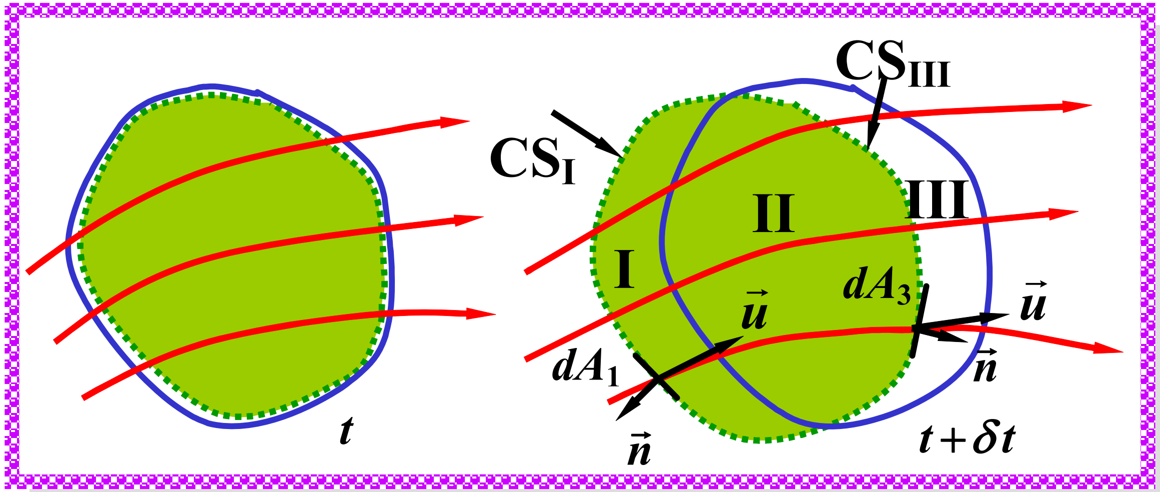


$$\frac{DN_{\mathrm{sys}}}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{\mathrm{sys}}(t+\delta t)-N_{\mathrm{sys}}(t)}{\delta t}$$

δt 时刻后：

系统：II + III

控制体：I + II



$$\frac{DN_{sys}}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{sys}(t+\delta t)-N_{sys}(t)}{\delta t}$$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\{N_{CV}(t+\delta t)-N_{I}(t+\delta t)+N_{III}(t+\delta t)\}-N_{CV}(t)}{\delta t}$$

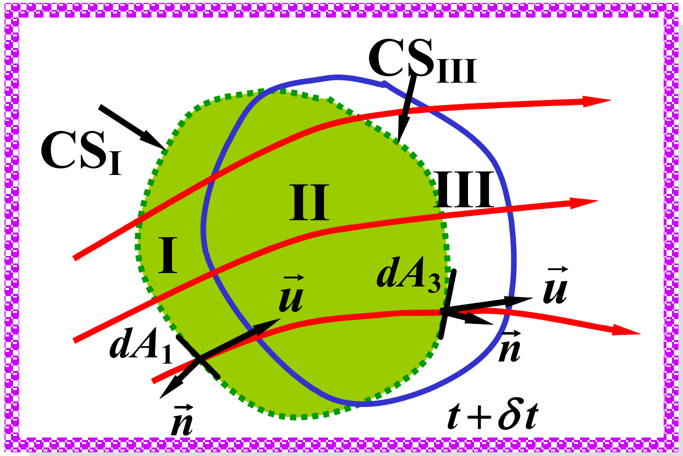
$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{CV}(t+\delta t)-N_{CV}(t)}{\delta t}-\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{I}(t+\delta t)}{\delta t}+\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{III}(t+\delta t)}{\delta t}$$

雷诺输运定理3

第一项

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{CV}(t+\delta t)-N_{CV}(t)}{\delta t}$$

$$=\frac{\partial N_{CV}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi d\tau$$



第二项： δt 时间内由CS$_I$流入CV的流体所包含的 N

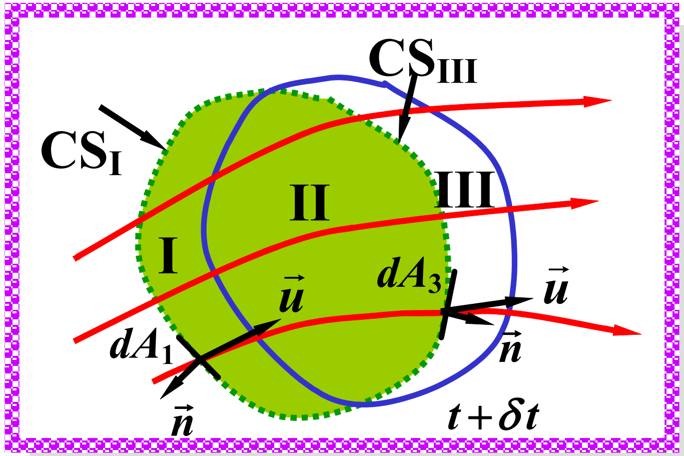
δt 时间由dA_1流入CV的流体体积为： $\delta\tau=-\vec{u}\cdot\vec{n}dA_1\delta t$

$$\Longrightarrow\quad -\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_I(t+\delta t)}{\delta t}=-\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_{I(t+\delta t)}\phi d\tau$$

$$=-\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_{CS_I}-\phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA\delta t=\int_{CS_I}\phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA$$

雷诺输运定理4

第三项：δt 时间由CS_{III}流出CV的流体所包含的 N



$$\delta\tau = \vec{u}\cdot\vec{n}dA_3\delta t$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{N_{III}(t+\delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_{III(t+\delta t)}\phi d\tau$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_{CS_{III}}\phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA\delta t = \int_{CS_{III}}\phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA$$

$$\boxed{\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi d\tau + \int_{CS_I}\phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA + \int_{CS_{III}}\phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA}$$

雷诺输运定理5

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} \phi d\tau + \int_A \phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA$$

$\dfrac{DN_{sys}}{Dt}$ → 系统的物理量 N 随时间的变化率

$\dfrac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} \phi d\tau$ → 控制体物理量 N 随时间的变化率，反应流场的非定常性

$\int_A \phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA$

→ 物理量 N 流出控制体的净流率，反应流场不均匀性，系统位置、体积随时间的改变

雷诺输运定理6

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \phi d\tau + \int_A \phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA = \int_\tau \frac{\partial \phi}{\partial t}d\tau + \int_A \phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA$$

通过高斯定理将面积分转换成体积分

$$\int_A \phi\vec{u}\cdot\vec{n}dA = \int_\tau \nabla\cdot\left(\phi\vec{u}\right)d\tau$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_\tau \phi d\tau = \int_\tau\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\phi\vec{u}\right)\right]d\tau}$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_\tau \phi d\tau = \int_\tau\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial\left(\phi u_k\right)}{\partial x_k}\right]d\tau}$$

张量形式

雷诺输运定理例题1

例：给定一流场的速度分布和密度分布为

$$u = x/r^3 \ , \ v = y/r^3 \ , \ w = z/r^3 \ , \ \rho = k\left(r^3 - 3t\right)$$

其中，$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ，k 为非零常数。求：(1) 流场中某空间点的流体密度随时间的变化率；(2) 流体质点的密度在运动过程中随时间的变化率；(3) 初始时刻在体积 $0 \le r \le a$ 中的流体质量的随体导数

(1) 流场中某空间点的流体密度随时间的变化率

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \underline{\underline{-3k}}$$

(2) 流体质点的密度在运动过程中随时间的变化率

$$\Rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

雷诺输运定理例题2

$$u = x/r^3$$
$$v = y/r^3$$
$$w = z/r^3$$
$$\rho = k\left(r^3 - 3t\right)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

$$= -3k + \frac{x}{r^3}3kr^2\frac{x}{r} + \frac{y}{r^3}3kr^2\frac{y}{r} + \frac{z}{r^3}3kr^2\frac{z}{r}$$

$$= -3k + 3k\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right) = -3k + 3k = \underline{\underline{0}}$$

密度的当地导数、对流导数均不为零，但密度的随体导数为零，即每个流体质点在运动过程中密度保持不变，为不可压缩流体

(3) 在体积 $0 \le r \le a$ 中的流体质量的随体导数

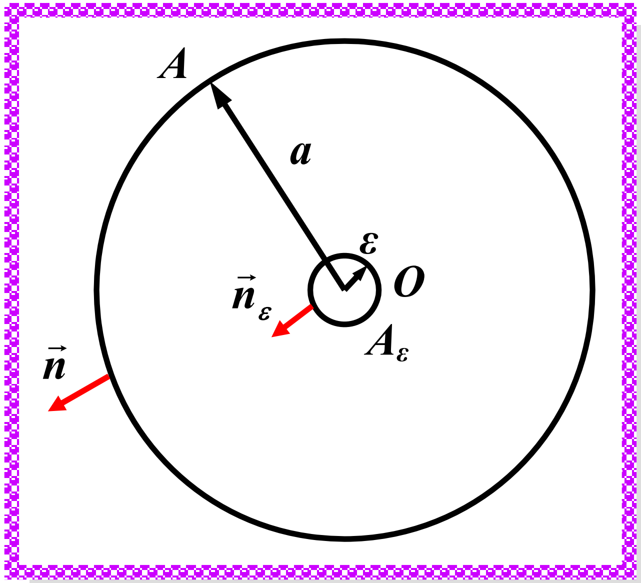
流体质量 $\Longrightarrow$ $M = \int_\tau \rho d\tau = \int_\tau k\left(r^3 - 3t\right)d\tau$

雷诺输运定理例题3

$$u = x/r^3$$
$$v = y/r^3$$
$$w = z/r^3$$
$$\rho = k\left(r^3 - 3t\right)$$

流体质量的随体导数

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} k\left(r^3 - 3t\right) d\tau + \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{A + A_\varepsilon} k\left(r^3 - 3t\right) \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA$$



M 的当地导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} k\left(r^3 - 3t\right) d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}\left[k\left(r^3 - 3t\right)\right] d\tau$$

$$= \int_{\tau} -3k\, d\tau = -4k\pi a^3$$

M 的对流导数

$$\int_{A + A_\varepsilon} k\left(r^3 - 3t\right) \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{A} k\left(r^3 - 3t\right) \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA + \int_{A_\varepsilon} k\left(r^3 - 3t\right) \vec{u} \cdot \vec{n}\, dA$$

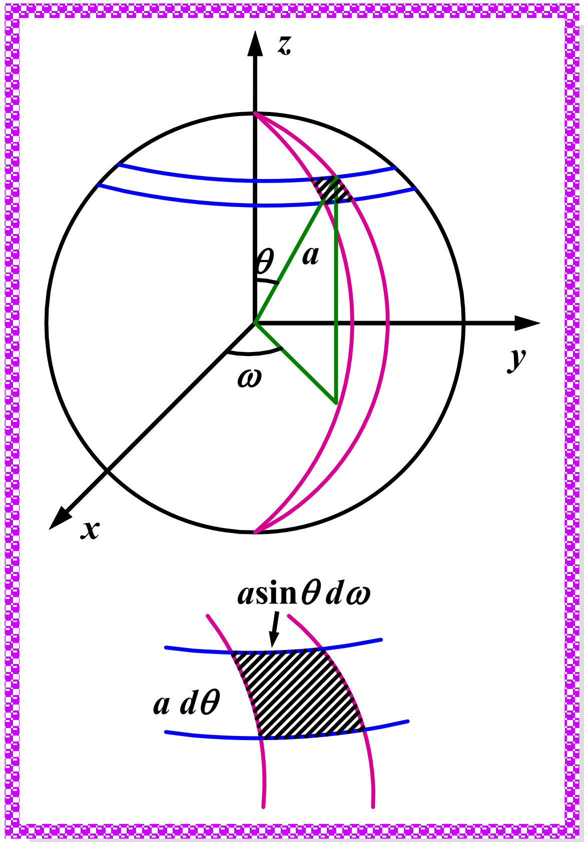
雷诺输运定理例题4

由于 $\vec{u}=\dfrac{x}{r^3}\vec{i}+\dfrac{y}{r^3}\vec{j}+\dfrac{z}{r^3}\vec{k}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

$u=x/r^3$
$v=y/r^3$
$w=z/r^3$
$\rho=k\left(r^3-3t\right)$

在 A 表面上 $\vec{u}\cdot\vec{n}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}=\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{a^2}$

在 A_ε 表面上 $\vec{u}\cdot\vec{n}=-\vec{u}\cdot\vec{n}_\varepsilon=-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$



$$\int_A k\left(r^3-3t\right)\vec{u}\cdot\vec{n}dA$$

$$=\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^{\pi}k\left(a^3-3t\right)\frac{1}{a^2}a^2\sin\theta d\theta$$

$$=4\pi k\left(a^3-3t\right)$$

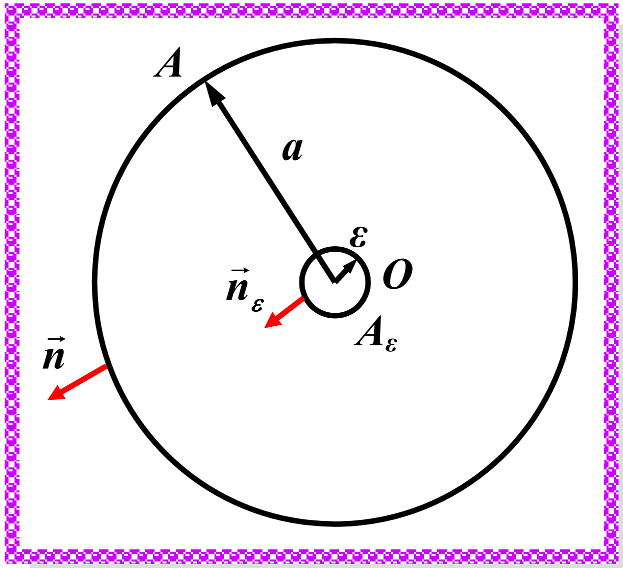
雷诺输运定理例题5

$$\int_{A_\varepsilon} k\left(r^3-3t\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dA=-4\pi k\left(\varepsilon^3-3t\right)$$

$$u=x/r^3$$
$$v=y/r^3$$
$$w=z/r^3$$
$$\rho=k\left(r^3-3t\right)$$

$$\int_{A+A_\varepsilon} k\left(r^3-3t\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dA=4\pi k\left(a^3-\varepsilon^3\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A+A_\varepsilon} k\left(r^3-3t\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dA=4\pi k a^3$$

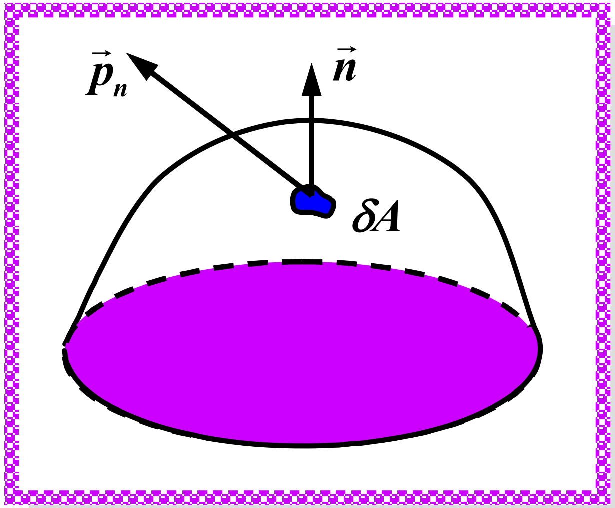


则流体质量的随体导数

$$\frac{DM}{Dt}=-4\pi k a^3+4\pi k a^3=0$$

应力矢量

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$



下标 n 表示面元 ΔA 的法线方向

- 应力矢量方向与法线方向不一定重合
- 作用在方位各异的面上的应力矢量一般并不相同

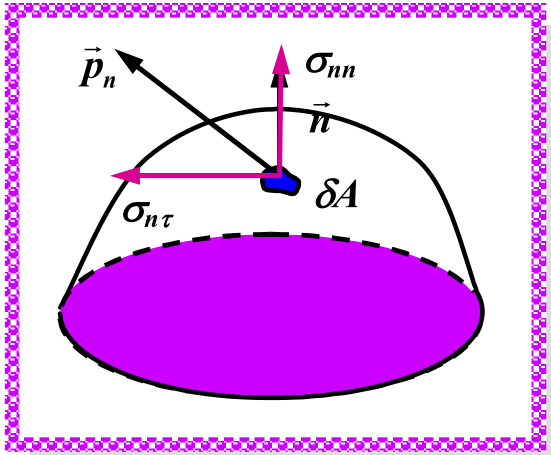
$$\vec{p}_n = \vec{p}_n(\vec{r}, t, \vec{n})$$

应力矢量

- 应力矢量方向与法线方向不一定重合

$$\vec{p}_n = (\sigma_{nn}, \sigma_{n\tau})$$

$$\sigma_{nn} = \vec{p}_n \cdot \vec{n} \qquad \sigma_{n\tau} = \sqrt{|\vec{p}_n|^2 - \sigma_{nn}^2}$$

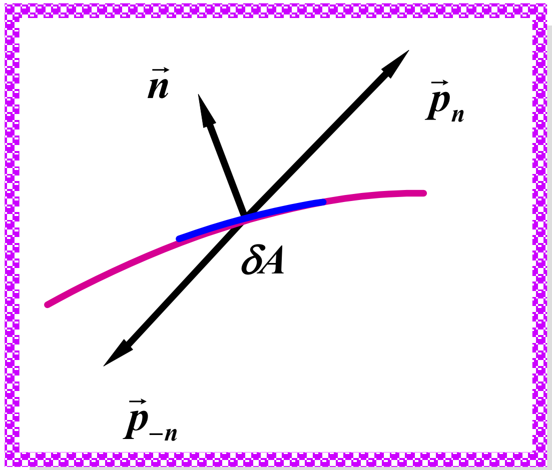


- 应力矢量可以向三个坐标方向分解

$$\vec{p}_n = \sigma_{nx}\vec{i} + \sigma_{ny}\vec{j} + \sigma_{nz}\vec{k}$$

- 作用在流体两侧的应力矢量大小相等，方向相反

$$\vec{p}_{-n} = -\vec{p}_n$$



应力张量1

过空间一点的三个相互垂直平面上的应力矢量或它们的九个分量完全描写了一点的应力状态

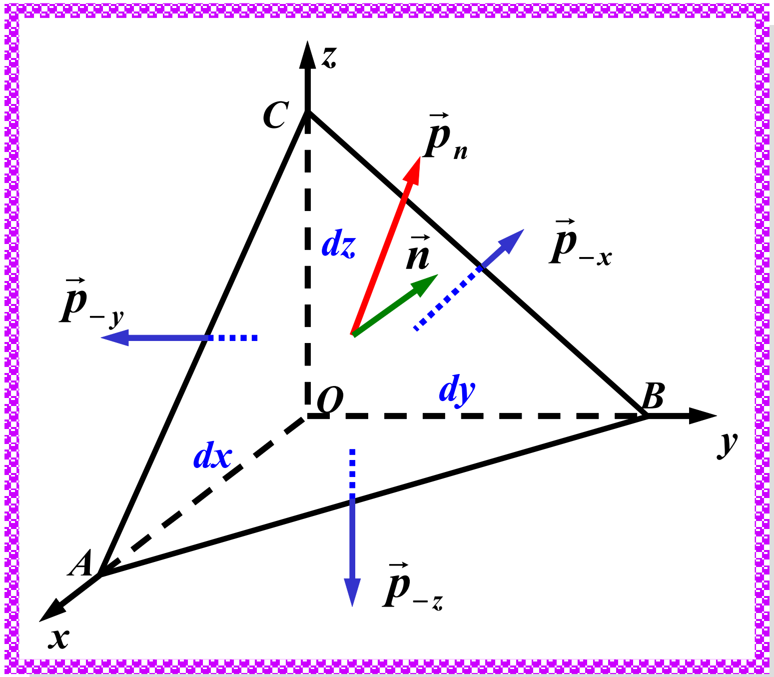
倾斜面外法线单位矢量

$$\vec{n}=\cos(n,x)\vec{i}+\cos(n,y)\vec{j}+\cos(n,z)\vec{k}$$
$$=n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k}$$

倾斜面和其余三个面的面积

$$\delta A\ ,\ n_x\delta A\ ,\ n_y\delta A\ ,\ n_z\delta A$$

倾斜面和其余三个面上作用的应力矢量 $\vec{p}_n\ ,\ \vec{p}_{-x}\ ,\ \vec{p}_{-y}\ ,\ \vec{p}_{-z}$



四面体流体微元

应力张量2

达朗贝尔原理：作用于四面体上的质量力（重力），表面力和惯性力及其力矩应该平衡

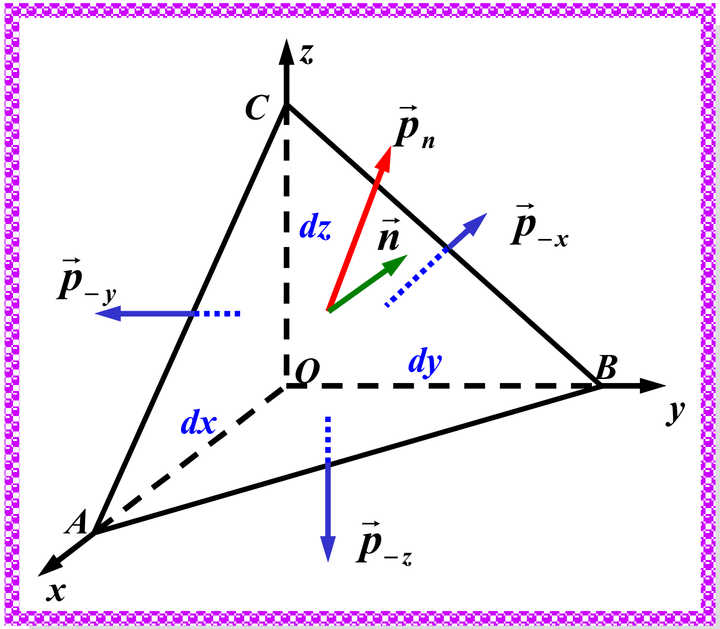
惯性力 ⟹ $-\rho\vec{a}\,\delta\tau$

重力 ⟹ $\rho\vec{g}\,\delta\tau$

三阶无穷小量

表面力 ⟹ 二阶无穷小量

$$\left(\vec{p}_n + n_x\vec{p}_{-x} + n_y\vec{p}_{-y} + n_z\vec{p}_{-z}\right)\delta A$$



$\delta\tau \to 0$ ⟹ **忽略惯性力、重力，只考虑表面力**

应力张量3

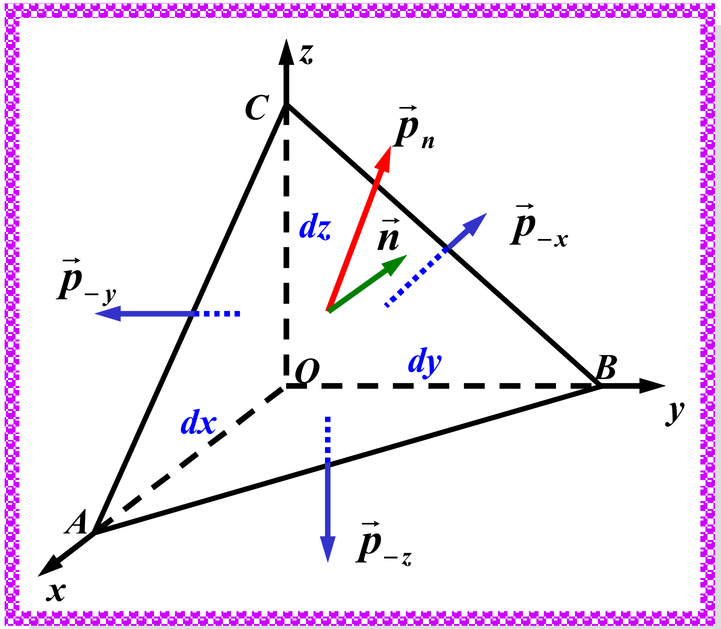
$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\vec{p}_n + n_x \vec{p}_{-x} + n_y \vec{p}_{-y} + n_z \vec{p}_{-z} = 0$$

由

$$\vec{p}_{-x} = -\vec{p}_x \ , \ \vec{p}_{-y} = -\vec{p}_y \ , \ \vec{p}_{-z} = -\vec{p}_z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z}$$



- 一点的应力状态可由过空间一点的三个相互垂直平面上的应力矢量描述

应力张量4

由 $\vec{p}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}$

$$\vec{p}_n = n_x\vec{p}_x + n_y\vec{p}_y + n_z\vec{p}_z$$
$$\vec{p}_n = \sigma_{nx}\vec{i} + \sigma_{ny}\vec{j} + \sigma_{nz}\vec{k}$$

$$\vec{p}_y = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k} \qquad \vec{p}_z = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_n = \underbrace{\left(n_x\sigma_{xx} + n_y\sigma_{yx} + n_z\sigma_{zx}\right)}_{\sigma_{nx}}\vec{i} + \underbrace{\left(n_x\sigma_{xy} + n_y\sigma_{yy} + n_z\sigma_{zy}\right)}_{\sigma_{ny}}\vec{j}$$

$$+ \underbrace{\left(n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} + n_z\sigma_{zz}\right)}_{\sigma_{nz}}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left(\sigma_{nx} \quad \sigma_{ny} \quad \sigma_{nz}\right) = \left(n_x \quad n_y \quad n_z\right)\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ni} = n_j\sigma_{ji}$$
$$\vec{p}_n = \vec{n} \cdot \Sigma$$

应力张量5

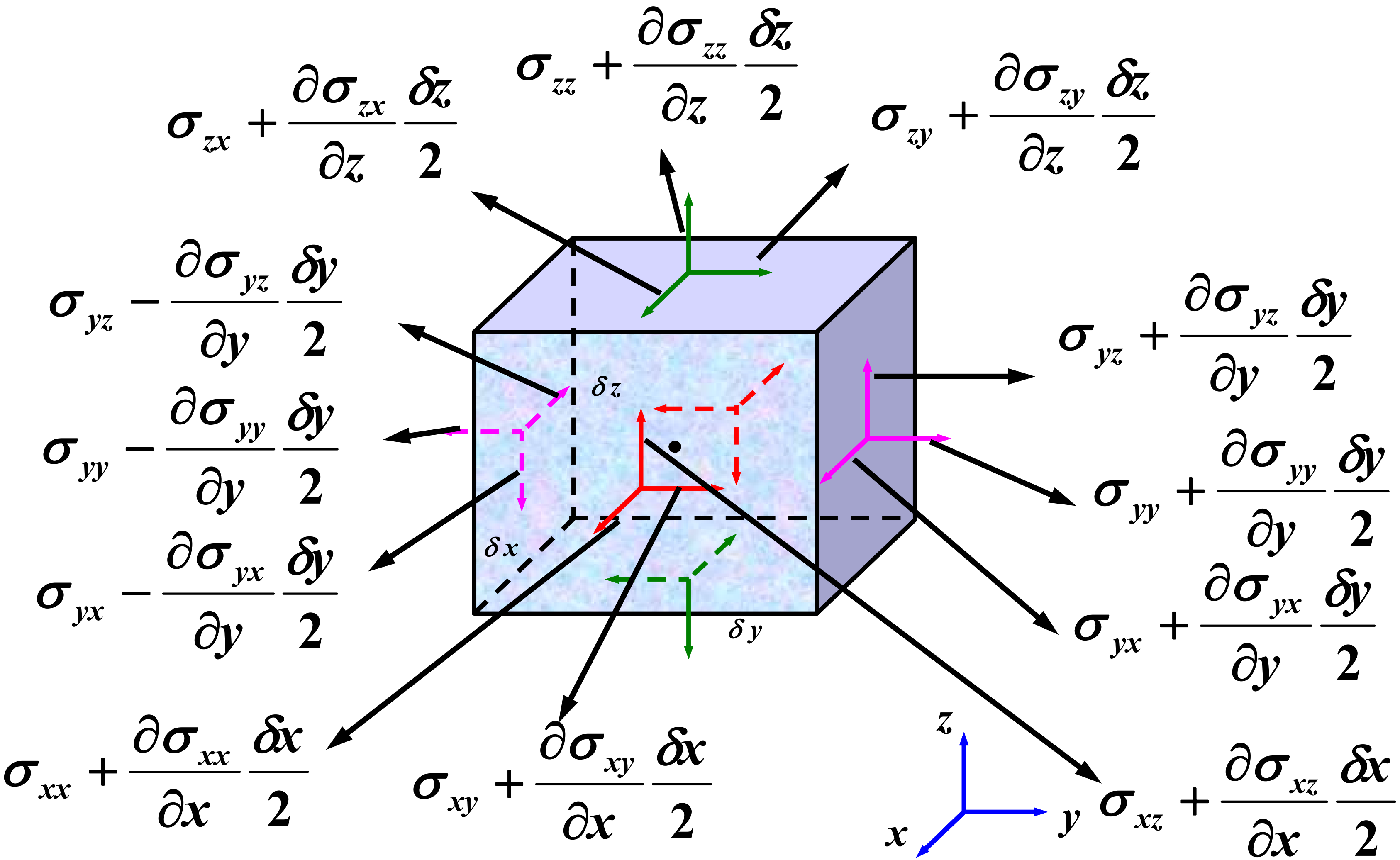
应力张量σ_{ij} ⇒ $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

- 应力张量完全表达了一点应力状态，对角线元素为法向应力分量，非对角线元素为切向应力分量

- 应力张量与作用面方位无关，只是空间点位置和时间的函数 $\sigma_{ni}(\vec{r},t,\vec{n}) = n_j\sigma_{ji}(\vec{r},t)$

- 求一点沿某个方位的应力矢量，只需用作用面的单位矢量与该点的应力张量点乘即可

应力张量的 9 个分量中只有 6 个是独立的



应力张量7

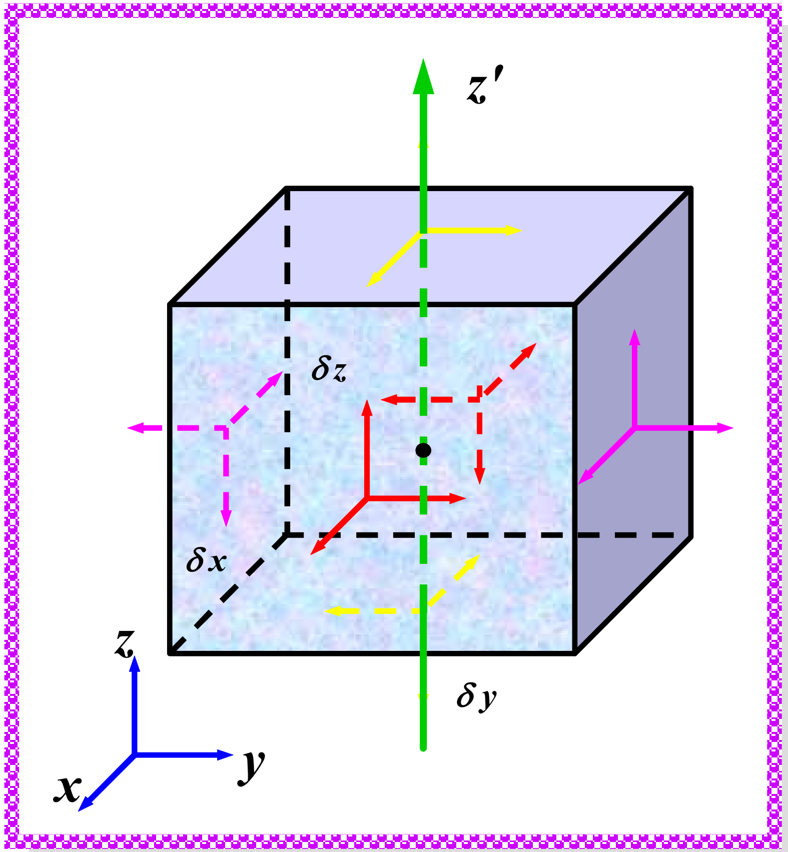
上下表面

表面力对 z' 轴的力矩为0

侧面的四个表面

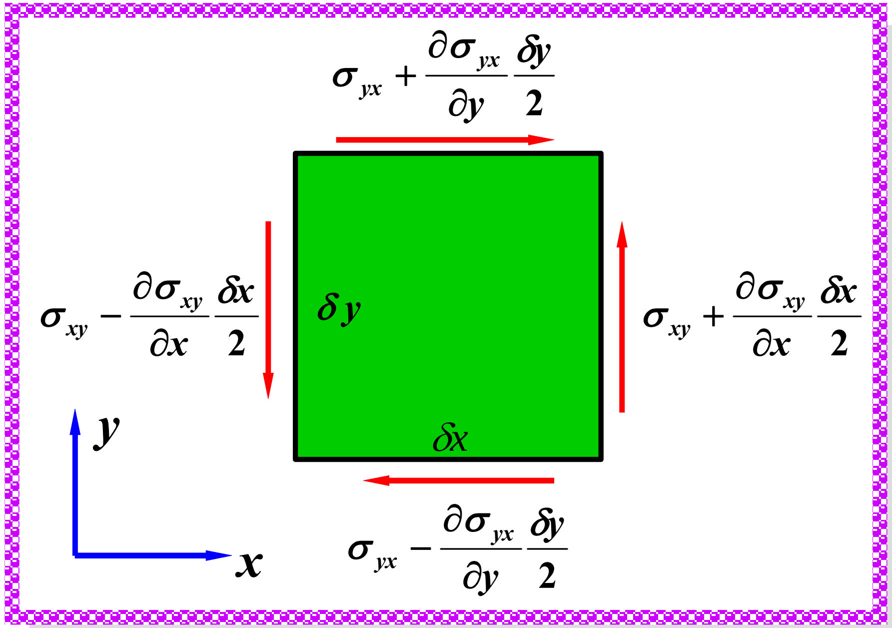
法向应力作用线的延长线通过 z' 轴，力矩为0

与 z' 轴平行的四个切向应力，力矩为0



应力张量8

只有四个切向应力对 z' 轴有矩，合力矩为零



$$\left(\sigma_{xy}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\delta z\frac{\delta x}{2}$$

$$+\left(\sigma_{xy}-\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\delta z\frac{\delta x}{2}$$

$$=\left(\sigma_{yx}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\frac{\delta x}{2}\right)\delta z\delta x\frac{\delta y}{2}+\left(\sigma_{yx}-\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\frac{\delta x}{2}\right)\delta z\delta x\frac{\delta y}{2}$$

$\Rightarrow$ $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ 同理 $\sigma_{xz}=\sigma_{zx}$ $\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$

应力张量是二阶对称张量

理想流体与静止流体的应力张量

- 理想流体或静止流体中切应力为零，只有法向应力且同一点各个不同方向上的法向应力相等

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{nn}=-p$$

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$$

- 负号是强调压强与作用面的法线方向相反

- 在理想流体或静止流体中，只用一个标量函数即压强便完全地描述了一点上的应力状态

应力张量例题1

例：流体内某处的应力张量可表示如下，试求作用于平面 $x+3y+z=1$外侧（离开原点一侧）的应力矢量及应力矢量的法向和切向分量

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 平面外侧的法线单位矢量，令

$$F = x + 3y + z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_n = \vec{n} \cdot \Sigma = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

应力张量例题2

(2) 应力矢量的法向和切向分量

$$\vec{p}_n = \frac{1}{\sqrt{11}}(5\ \ 7\ \ 3)$$

$$\sigma_{nn} = \vec{n}\cdot\vec{p}_n = \frac{1}{\sqrt{11}}(1\ \ 3\ \ 1)\begin{pmatrix}\dfrac{5}{\sqrt{11}}\\ \dfrac{7}{\sqrt{11}}\\ \dfrac{3}{\sqrt{11}}\end{pmatrix} = \frac{29}{11}$$

$$\sigma_{n\tau} = \sqrt{\left|\vec{p}_n\right|^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{\frac{5^2+7^2+3^2}{11} - \left(\frac{29}{11}\right)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{11}$$

1.8 本构方程

牛顿流体的本构方程 ⇐ 应力与应变率之间的关系

Stokes假设

- 应力张量是应变率张量的线性函数
- 流体是各向同性的，即流体的性质与方向无关
- 当流体静止时，应变率为零，流体中的应力就是流体静压强

本构方程2

根据假设 (1)，应力张量可写为

$$\boxed{\Sigma = aS + bI}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由牛顿内摩擦定律 ⇒ $\sigma_{xy} = \mu \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\mu s_{12}$ ⇒ $\boxed{a = 2\mu}$

本构方程3

由右式可得

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + b$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + b$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + b$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 3b = 2\mu \nabla \cdot \vec{u} + 3b$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{u}}$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = 2\mu S + \left[\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{u}\right] I$$

根据假设 (2) (3)，静止流体 $\boxed{\Sigma = -pI}$

$$\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) = -p + K\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\Sigma = \left[-p + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\vec{u}\right]I + 2\mu S$$

取 $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$ $\boxed{\Sigma = \left[-p + \lambda\nabla\cdot\vec{u}\right]I + 2\mu S}$

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

本构方程5

写成分量形式 广义牛顿应力公式

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

- 压强，各向同性
- 由体积膨胀或收缩引起的各向同性粘性应力
- 由运动流体微团变形引起的粘性应力

粘性系数1

体积粘性系数 K 和第二粘性系数 λ

$$\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)=-p+K\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\lambda=K-\frac{2}{3}\mu$$

定义平均法向应力

$$\bar{p}=-\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \bar{p}=p-K\nabla\cdot\vec{u}=p-\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\vec{u}$$

不可压缩流体 $\xrightarrow{\nabla\cdot\vec{u}=0}$ $\boxed{\bar{p}=p}$

☞ 平均法向应力等于平衡态压强，应力张量中 λ 自动不出现

粘性系数2

可压缩流体 $\xrightarrow{\nabla\cdot\vec{u}\neq 0}$ $\bar{p} = p - \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)}_{K}\nabla\cdot\vec{u}$

☞ 流体发生膨胀或压缩时，平均法向应力不等于平衡态压强，且 λ 出现在与相对体积膨胀率有关的项中

体积膨胀引起粘性应力与体积变化时的能量耗散机制有关，除高温和高频声波等极端情况，一般气体运动可近似认为

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad \text{即} \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

⟸ 斯托克斯假设

粘性系数3

$$\Sigma = 2\mu S + \left[-p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{u} \right] I$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\vdots$$

斯托克斯假设下，本构方程中只出现一个粘性系数 μ

作业

作业：P.39～41

- 1.2
- 1.5
- 1.8
- 1.11
- 1.17
- 1.19
- 1.23