



# 第4章 平面势流

4.1 速度势函数与流函数

4.2 复位势和复速度

4.3 基本流动

4.4 圆柱绕流

4.5 布拉休斯公式

4.6 镜像法

4.7 保角变换

4.8 茹科夫斯基变换

4.9 茹科夫斯基翼型

4.10 施瓦茨-克里斯托弗尔变换



# 理想不可压缩流体流动1

## 基本方程组

$$\mu = 0$$

① 连续方程

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

② 运动方程

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$$

$$\rho = \text{const}$$



4 个方程包含 4 个未知数  
 $\vec{u}$ 、 $p$ ，方程组封闭

③ 流体力学问题和热力学问题可分开求解, 但压强和速度仍然耦合在一起



# 理想不可压缩流体流动2

## 边界条件

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

① 法向无穿透条件  $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n}$  允许切向滑移

固壁静止时  $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

② 无穷远边界条件  $\Rightarrow \vec{r} \rightarrow \infty, \vec{u} \rightarrow \vec{u}_\infty$

③ 粘性流动采用固壁上的无滑移条件，由于理想流体动量方程中没有高阶粘性项，欧拉方程比 N-S 方程低一阶，不需要象粘性流方程组那样多的边界条件



# 理想不可压缩流体流动3

势流



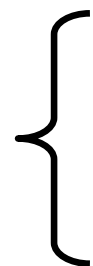
不可压缩流动，速度势函数满足  
拉普拉斯方程

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

基本方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + G = f(t) \end{array} \right.$$

边界条件



固壁静止时



$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

无穷远处



$$\vec{r} \rightarrow \infty, \nabla \phi \rightarrow \vec{u}_\infty$$



# 理想不可压缩流动4

势流方程组与一般理想不可压缩流动方程组相比在数学上有了较大的简化

$$\nabla^2 \phi = 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + G = f(t)$$

2 个方程

拉普拉斯方程线性

分开求解，先求解速度势函数，再由速度势函数求解速度，最后求解压强

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$$

4 个方程

欧拉方程非线性

速度、压强耦合求解



# 理想不可压缩流动5

## 拉氏方程解的可叠加性

$$\nabla^2 \phi = 0$$

若  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  是上式的解，则这些解的任意线性组合

$$c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + \dots + c_n \phi_n$$

也是上式的解。 $c_1, c_2, \dots, c_n$  是一组不全为零的任意常数



# 4.1 速度势函数与流函数

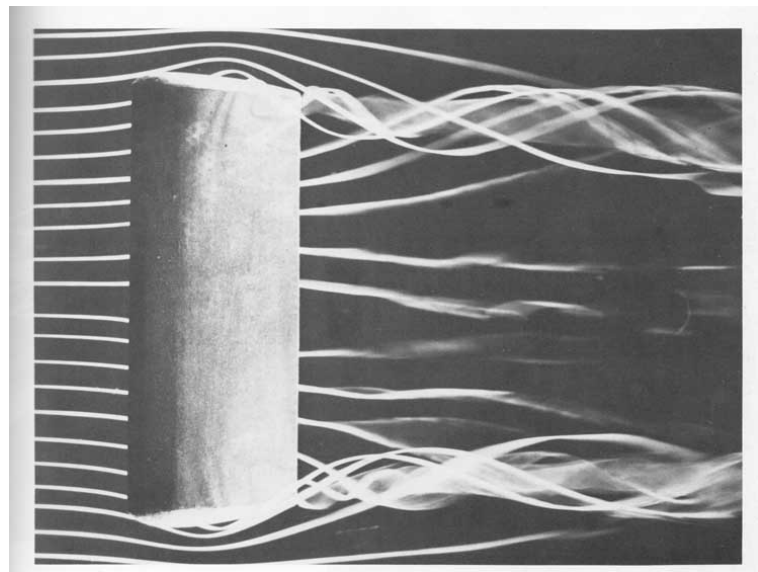
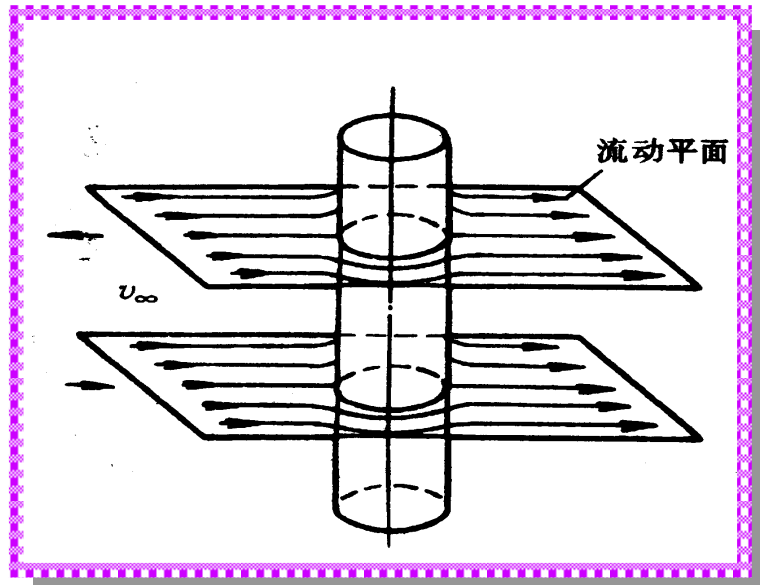
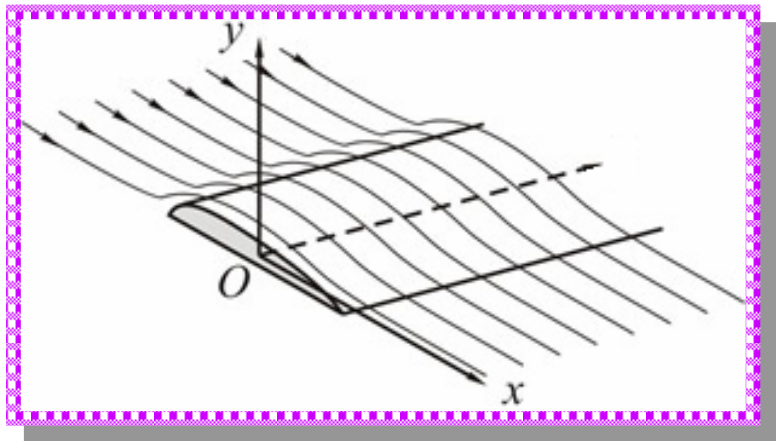
## 平面流动

- ① 流场中各点的流体速度都平行于  $xoy$  平面，即

$$w = 0$$

- ② 各物理量在  $z$  方向没有变化

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$





# 速度势函数1

## 速度势函数



$$\vec{u} = \nabla \phi \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- ② 速度势函数允许相差一个任意常数，不影响其对流场的描述
- ② 等势线的法线方向与速度矢量方向重合
- ② 速度沿任意曲线的线积分与路径无关，等于两端点势函数之差

$$\Gamma = \int_{M_0}^M \vec{u} \cdot d\vec{r} = \phi(M) - \phi(M_0)$$






# 速度势函数2

- 速度势函数从无旋流动条件出发定义的，只适用于势流，当流体为不可压时，满足拉氏方程

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

由  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$    $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$



# 流函数1

不可压缩平面流动连续方程



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

流函数

直角坐标系



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

极坐标系



$$u_R = \frac{\partial \psi}{R \partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial R}$$

- ④ 不可压缩平面流动满足连续方程，必然存在流函数，无论是否为势流



# 流函数2

- ④ 流函数可以相差一个任意常数而不影响其对流场的描述（不影响速度分布）

等流函数线



$$\psi = \text{const}$$



$$d\psi = 0$$



$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{v}{u}$$

- ④ 等流函数线就是二元流线
- ④  $\psi = \text{const}$  表示一个流线族



# 流函数3

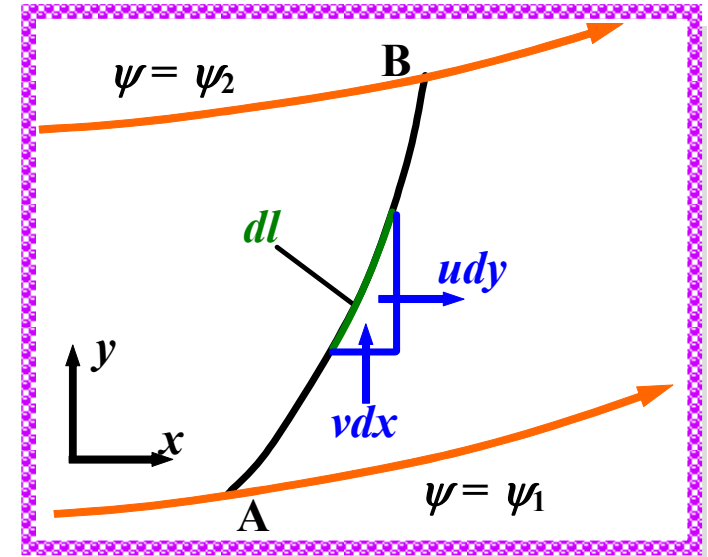
## 流函数与流量的关系

$$dQ = -vdx + udy$$

$$Q = \int_A^B (-vdx + udy) = \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right)$$



$$Q_{AB} = \psi_2 - \psi_1$$



- ④ 通过两流线间任意单位厚度曲线的体积流量等于两条流线上的流函数之差，与该曲线形状无关

若曲线本身为流线



$$Q_{AB} = 0$$



# 流线和等势线—流网

等势函数线



$$\phi = \text{const}$$



$$d\phi = 0$$



$$u dx + v dy = 0$$



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{u}{v}$$

等流函数线

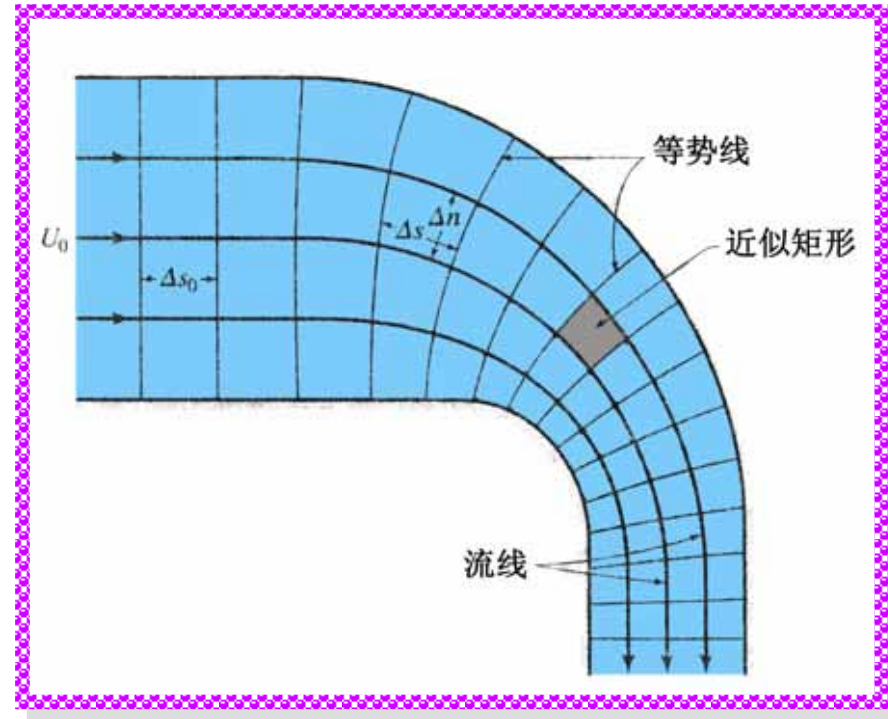


$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = \frac{v}{u}$$



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi \left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{u}{v} \frac{v}{u} = -1$$

④ 流线与等势线正交





# $\psi - \Omega$ 方程

对于  $xoy$  平面的二维不可压缩运动

$$\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{k} \Rightarrow \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \searrow$$

$$\Omega_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = -\nabla^2 \psi \vec{k}}$$

若流动无旋

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \psi = 0}$$

流函数  $\psi$  是从满足不可压缩流体平面流动的连续方程出发而定义，因此适用于无旋和有旋流动，在无旋条件下  $\psi$  满足拉氏方程



## 4.2 复位势和复速度

柯西—黎曼条件



$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}$$

- ④ 满足柯西—黎曼条件的速度势函数和流函数必然满足拉氏方程，它们是一对共轭的调和函数

复位势

- ④  $\phi$ 、 $\psi$  满足柯西—黎曼条件且可微，则可构造解析函数

$$F(z) = \phi + i\psi$$

$$z = x + iy \quad i = \sqrt{-1}$$



# 复位势和复速度2

## 复速度

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial(iy)} = -i \frac{\partial F}{\partial y}$$

- ④  $F(z)$  是解析函数，其导数值与求导方向无关，只是平面点的函数

$$W = \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \longrightarrow W = u - iv$$

## 共轭复速度



$$\bar{W} = u + iv$$

- ④ 复速度与共轭复速度的乘积等于速度矢量与其自身点乘



$$W\bar{W} = (u - iv)(u + iv) = u^2 + v^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$





# 复位势与复速度3

## 柱坐标下的复速度

由

$$u = u_R \cos \theta - u_\theta \sin \theta$$
$$v = u_R \sin \theta + u_\theta \cos \theta$$

$$W = u - iv$$

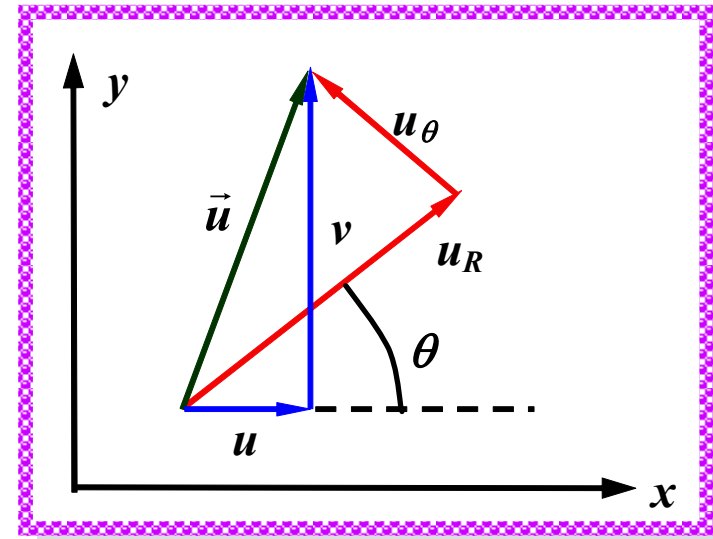
$$= (u_R \cos \theta - u_\theta \sin \theta) - i(u_R \sin \theta + u_\theta \cos \theta)$$

$$= u_R (\cos \theta - i \sin \theta) - i u_\theta (\cos \theta - i \sin \theta)$$



$$W = (u_R - i u_\theta) e^{-i\theta}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$





# 复位势与复速度4

## 复位势的性质

- ① 复位势可以相差一个常数而不影响其所代表的流场性质

$$\textcircled{2} \quad F(z) = \text{const} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \phi(x, y) = \text{const} \Rightarrow \text{等势线} \\ \psi(x, y) = \text{const} \Rightarrow \text{流线} \end{matrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \oint_L W dz = \oint_L \frac{dF}{dz} dz = \oint_L dF = \oint_L d\phi + i \oint_L d\psi = \oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} + i \oint_L dQ$$

$$\begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \oint_L \frac{dF}{dz} dz = \Gamma + iQ$$

复速度沿封闭曲线的积分，实部等于绕该封闭曲线的环量，虚部表示穿过该封闭曲线流出的流体体积流量



# 平面无旋流动与复位势1

平面无旋运动和解析函数之间存在一一对应的关系

平面无旋运动  $\rightleftarrows$   $\phi, \psi$   $\rightleftarrows$   $F(z) = \phi + i\psi$

$F(z) = \phi + i\psi$   $\rightleftarrows$   $\phi, \psi$   $\rightleftarrows$  平面无旋运动

⊙ 基本流动及其解析函数叠加形成新的解析函数及复合流动，可解决以下问题  $\leftarrow$

正问题

复变函数是强有力的工具

⊙ 给定物体求该物体绕流问题的复位势



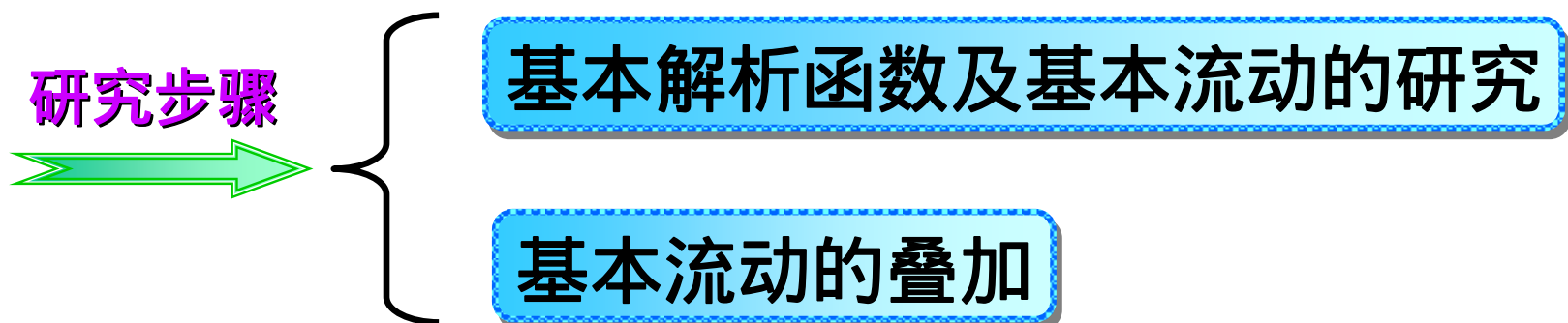
# 平面无旋流动与复位势2

适当选择基本流动组合，使所得解析函数满足给定的边界条件，如此复合的解析函数就是正问题的解

## 反问题

④ 给出复位势，研究什么样的平面流动与之对应

根据一定的考虑将基本流动叠加起来，然后研究并确定复合解析函数代表什么样的平面无旋流动





## 4.3 基本流动

均匀流



$$F(z) = (c_1 - ic_2)z$$

$c_1$ 、 $c_2$  为实常数

$$\Rightarrow \phi + i\psi = (c_1 - ic_2)(x + iy) \Rightarrow$$

$$\phi = c_1x + c_2y$$

$$\psi = -c_2x + c_1y$$

令  $\phi = \text{常数}$  ,  $\psi = \text{常数}$  可得等势线和流线

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{c_1}{c_2} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{c_2}{c_1}$$

等势线和流线是正交的两族直线，流线与实轴的夹角为

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$



# 4.3.1 均匀流



$$W(z) = \frac{dF}{dz} = c_1 - ic_2 = u - iv$$

$$F(z) = (c_1 - ic_2)z$$

速度处处为常数，整个流场中速度大小方向均不变

复位势也可写为

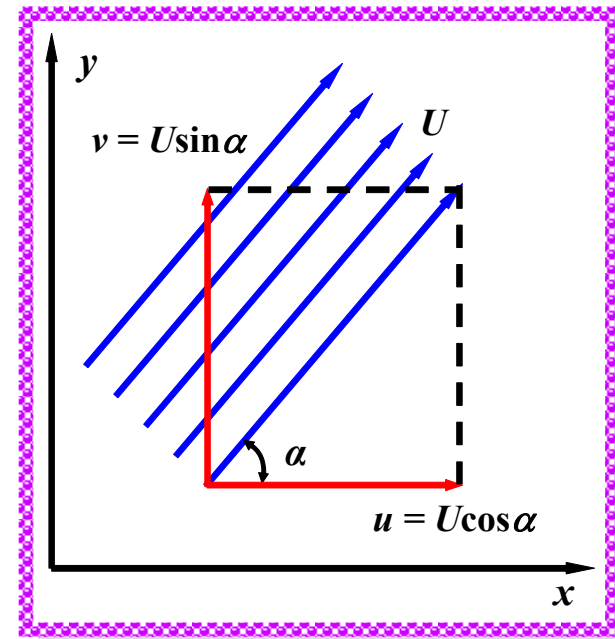
$$F(z) = Ue^{-i\alpha} z$$



$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{dF}{dz} = Ue^{-i\alpha} \\ &= U \cos \alpha - iU \sin \alpha \\ &= u - iv \end{aligned}$$



$$u = U \cos \alpha, \quad v = U \sin \alpha$$





# 均匀流2

$$\alpha = 0$$



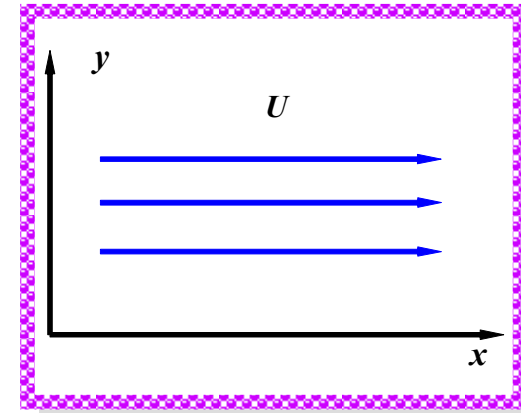
$$u = U, v = 0$$

$$F(z) = Ue^{-i\alpha}z$$



$$F(z) = Uz$$

④ 平行于  $x$  轴的均匀流动



$$\alpha = 90^\circ$$

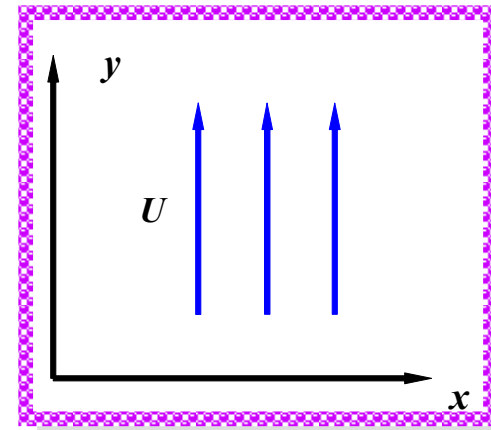


$$u = 0, v = U$$



$$F(z) = -iUz$$

④ 平行于  $y$  轴的均匀流动





## 4.3.2 点源 (汇)

点源 (汇)



$$F(z) = c \ln z$$

$c > 0$ , 实常数

速度势函数、流函数

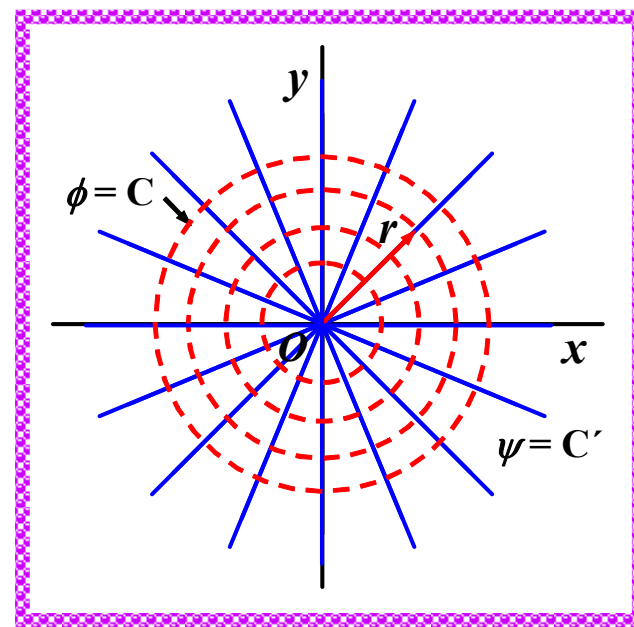
由  $F(z) = c \ln z = c \ln(Re^{i\theta}) = c \ln R + ci\theta$



$$\phi = c \ln R, \quad \psi = c\theta$$

① 等势线： $R = C$ ，以原点为中心的同心圆族

② 流线： $\theta = C$ ，从原点出发的射线族







# 点源 (汇) 2

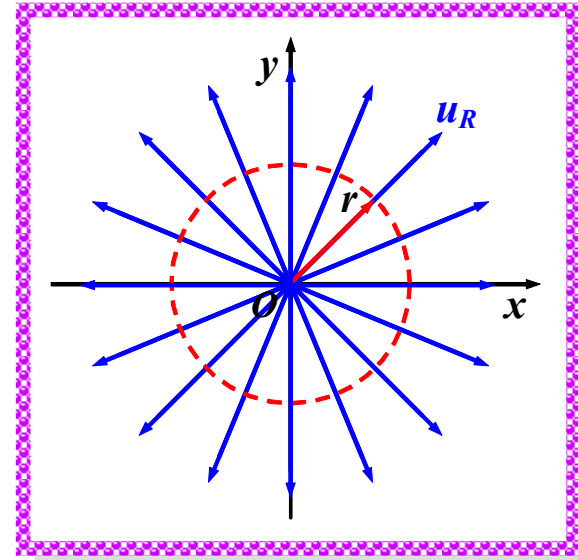
## 速度场

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{c}{z} = \frac{c}{R} e^{-i\theta} = (u_R - iu_\theta) e^{-i\theta}$$



$$u_R = \frac{c}{R}, \quad u_\theta = 0$$

$$W = (u_R - iu_\theta) e^{-i\theta}$$



④ 原点有一点源释放流体向四周均匀流出，速度只有  $R$  方向分量，离开原点愈远速度愈小

④  $R = 0, u_R \rightarrow \infty$  : 原点为奇点



# 点源 (汇) 3

强度  $m$



单位时间从点源释放出的流体流量 (设垂直于流场为单位高度)

围绕半径为  $R$  的圆作积分

$$u_R = \frac{c}{R}, u_\theta = 0$$

$$m = \int_0^{2\pi} u_R R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{c}{R} R d\theta = 2\pi c$$



$$c = \frac{m}{2\pi}$$



$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z$$

若点源在  $z_0$  点



$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0)$$



# 点源 (汇) 4

## 点汇

④ 以  $-m$  代替  $m$  就得到点汇的复位势

$$F(z) = \frac{-m}{2\pi} \ln z$$

$$F(z) = \frac{-m}{2\pi} \ln(z - z_0)$$



## 4.3.3 点涡

点涡



$$F(z) = -ic \ln z$$

$c$  为实常数

速度势函数、流函数

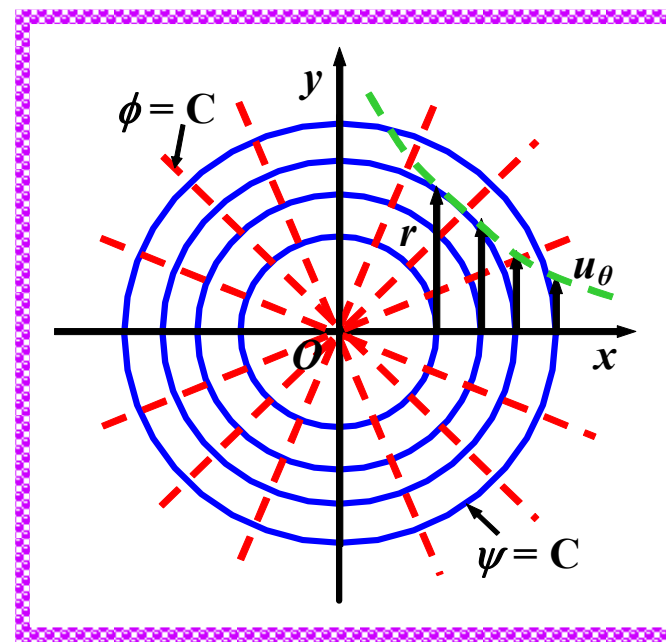
由  $F(z) = -ic \ln(Re^{i\theta}) = -ic \ln R + c\theta$



$$\phi = c\theta, \quad \psi = -c \ln R$$

① 等势线： $\theta = C$ ，从原点出发的射线族

② 流线： $R = C$ ，以原点为中心的同心圆族





# 点涡2

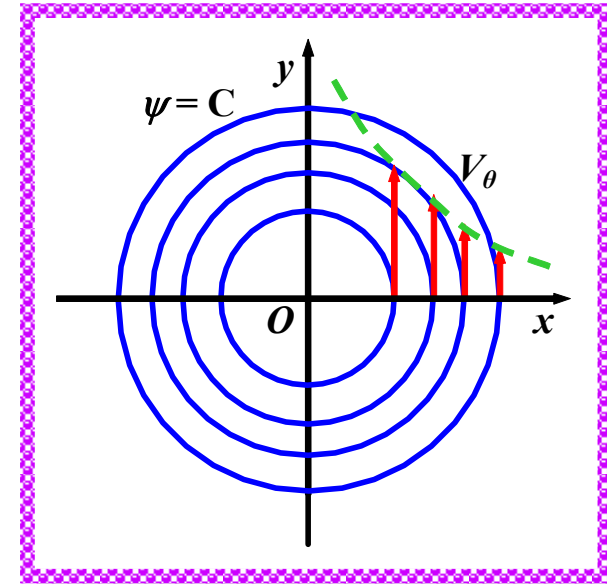
## 速度场

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = -\frac{ic}{z} = -\frac{ic}{R} e^{-i\theta}$$
$$= (u_R - iu_\theta) e^{-i\theta}$$



$$u_R = 0, \quad u_\theta = \frac{c}{R}$$

$$F(z) = -ic \ln z$$



① 速度只有  $\theta$  方向分量，流动沿逆时针方向 ( $c > 0$ )

②  $R = 0, u_\theta \rightarrow \infty$  : 原点为奇点



# 点涡3

强度  $\Gamma$



以速度环量度量点涡强度

围绕半径为  $R$  的圆作积分

$$\Gamma = \int_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} u_\theta R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{c}{R} R d\theta = 2\pi c$$



$$c = \frac{\Gamma}{2\pi}$$



$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$\Gamma < 0$  , 顺时针

$\Gamma > 0$  , 逆时针

若点涡在  $z_0$  点



$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$



# 点涡4

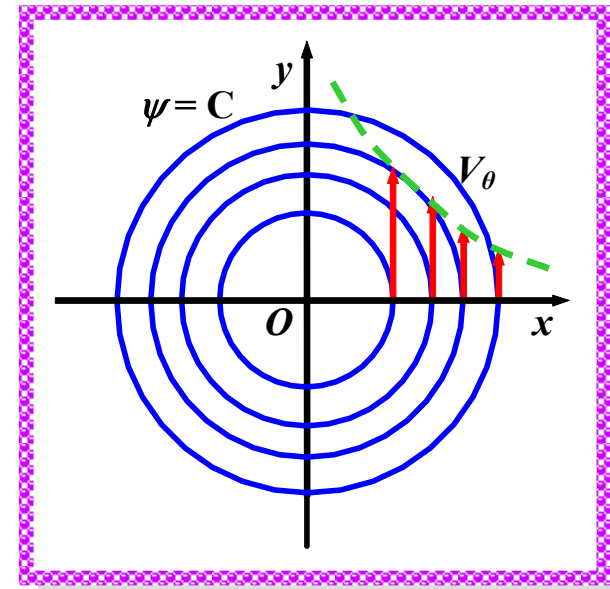
自由涡

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

- ① 速度随着  $R$  增加而减少
- ② 沿任一不包括奇点在内的封闭曲线的速度环量为零，即除奇点外流动是无旋的
- ③ 所有的环量和涡量都集中在奇点

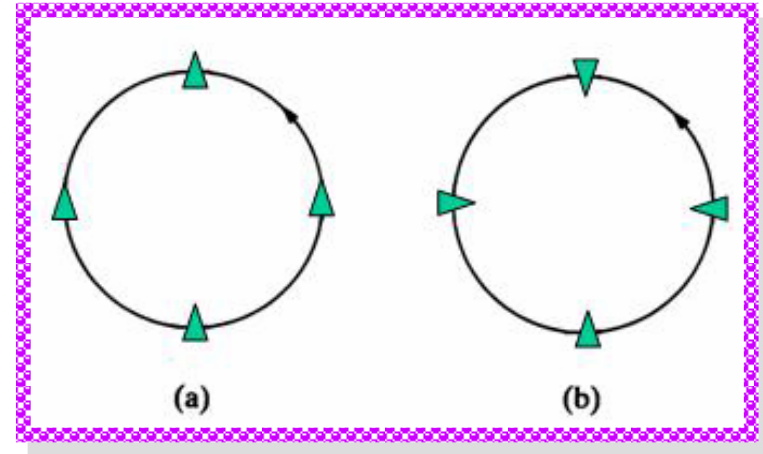




# 点涡5

## 强制涡

$$u_{\theta} = \omega R$$



- ④ 速度与  $R$  成正比，整个流体象刚体一样围绕中心旋转，旋转角速度为
- ④ 流场是处处有旋
- ④ 一个典型的龙卷风流场在核心部分是强制涡流动  
涡核，周围的流动则表现为自由涡





# 4.3.4 绕角流动

绕角流动



$$F(z) = Uz^n$$

$U, n$  为实数,  $n > 1/2$

速度势函数、流函数

由 
$$F(z) = Uz^n = UR^n e^{in\theta}$$
$$= UR^n \cos n\theta + iUR^n \sin n\theta$$

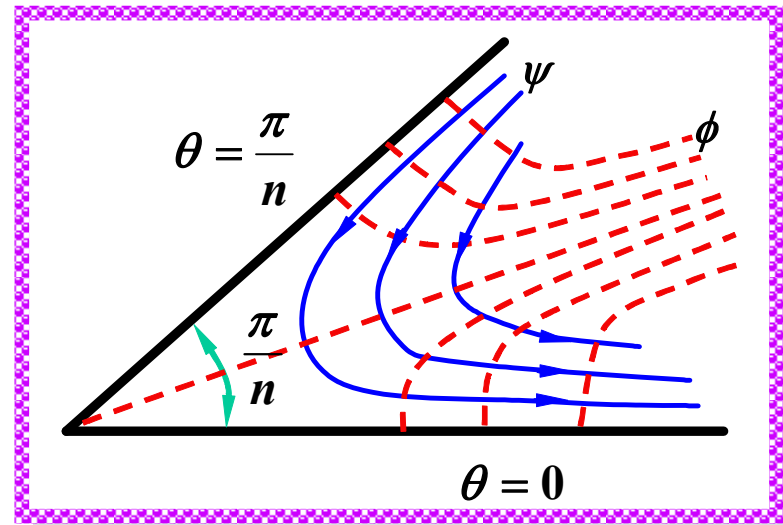


$$\phi = UR^n \cos n\theta$$
$$\psi = UR^n \sin n\theta$$

零流线



$$\theta = 0, \theta = \pi/n$$



这两条发自原点的射线构成角为  $\pi/n$  的角形区域



# 绕角流动2

## 典型流动

$n = 2$

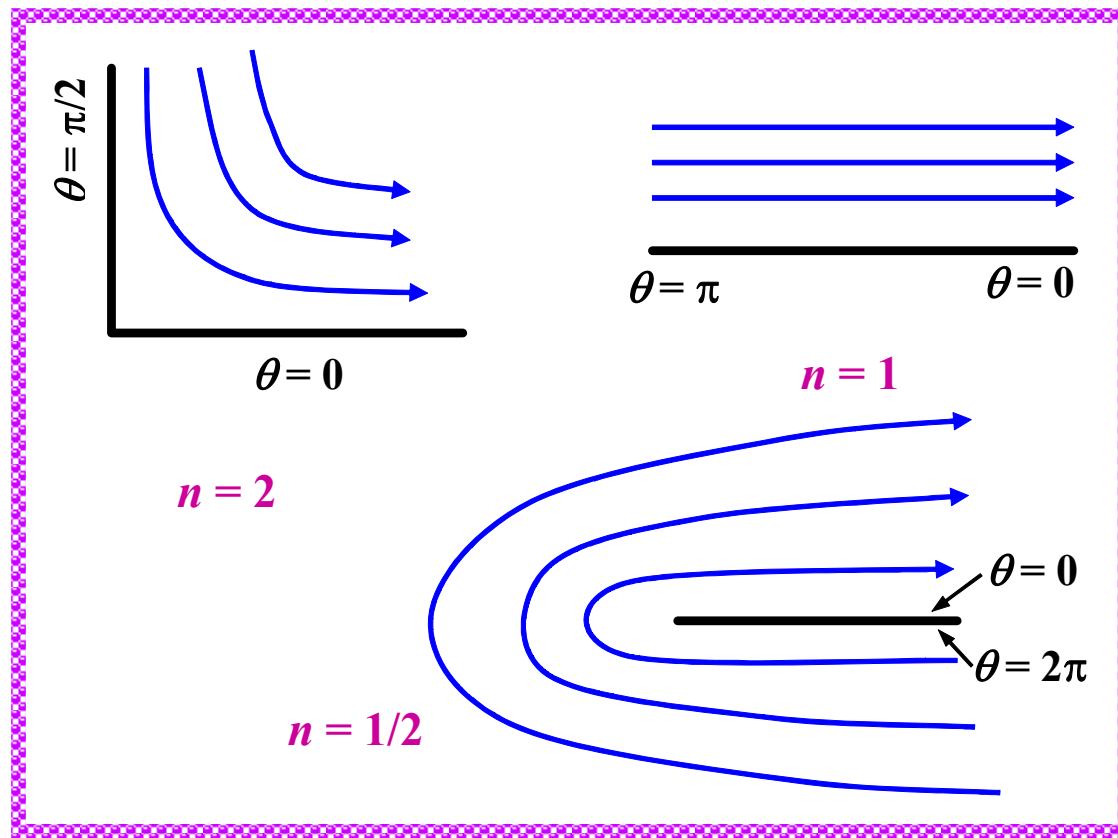
夹角为  $\pi/2$   
的角形区域

$n = 1$

夹角为  $\pi$   
的角形区域

$n = 1/2$

夹角为  $2\pi$   
的角形区域



④ 显然  $n$  应大于  $1/2$ ，小于  $1/2$  时得到大于  $2\pi$  的区域没有物理意义



# 绕角流动3

## 速度场

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = nUz^{n-1} = nUR^{n-1}e^{i(n-1)\theta} = nUR^{n-1}e^{in\theta}e^{-i\theta}$$

$$= (nUR^{n-1}\cos n\theta + nUR^{n-1}\sin n\theta)i e^{-i\theta} = (u_R - iu_\theta)e^{-i\theta}$$



$$u_R = nUR^{n-1}\cos n\theta, \quad u_\theta = -nUR^{n-1}\sin n\theta$$

设  $U > 0$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2n}$$



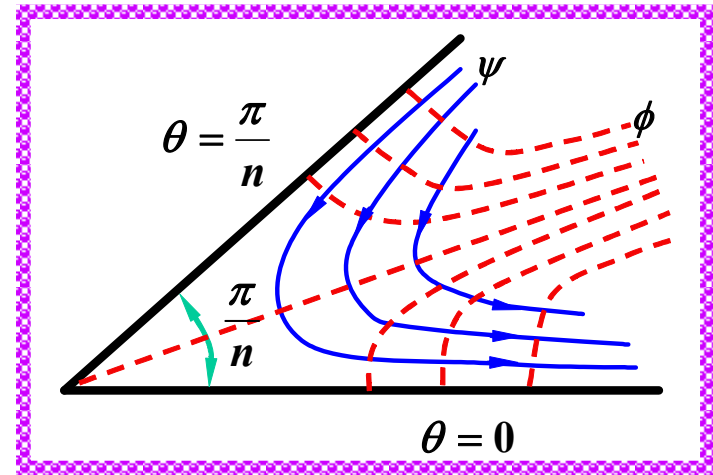
$$u_R > 0, \quad u_\theta < 0$$

设  $U > 0$

$$\frac{\pi}{2n} < \theta \leq \frac{\pi}{n}$$



$$u_R < 0, \quad u_\theta < 0$$





# 绕角流动4

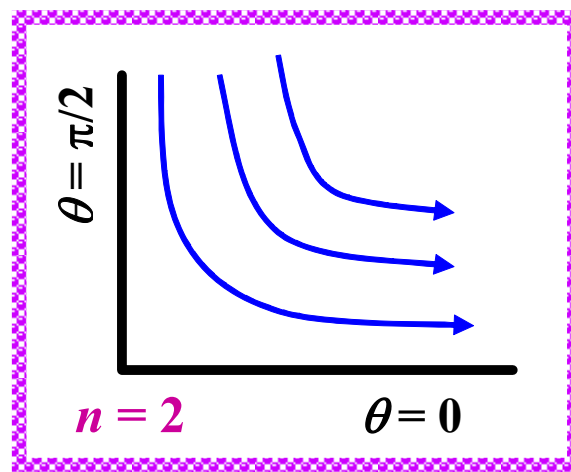
角点处速度

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_R^2 + u_\theta^2} = nUR^{n-1}$$

角形域内速度的模

$n > 1$   $R \rightarrow 0$   $\vec{u} \rightarrow 0$

绕流角点处流速为零  
可看作驻点流动



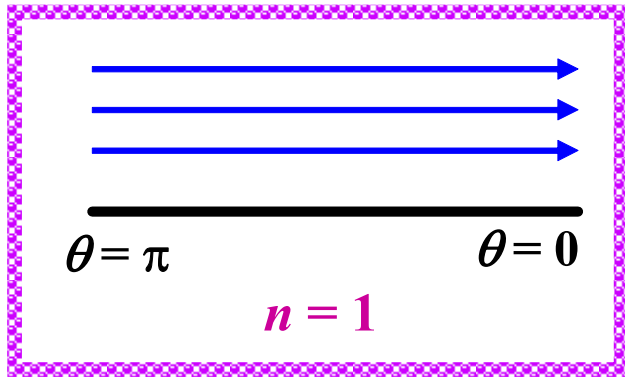
- 当  $R \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow \infty$ , 即远处的流体沿着角域的一条边线以无穷大的速度流来, 然后沿另一条边线以无穷大速度流去, 这实际上是不可能存在的



# 绕角流动5

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_R^2 + u_\theta^2} = nUR^{n-1}$$

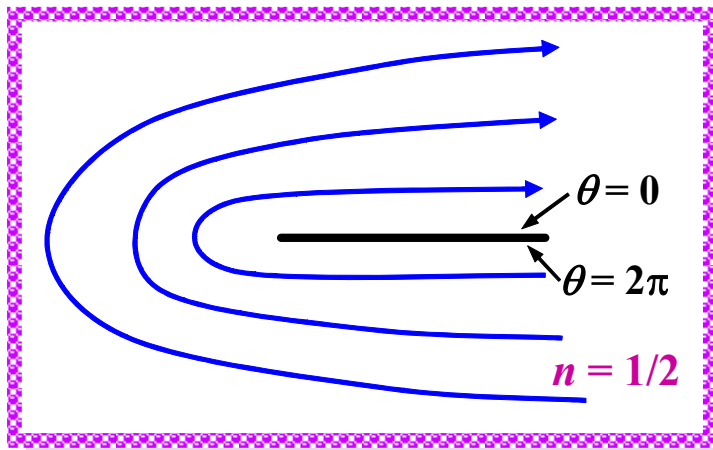
角形域内速度的模



$$n = 1 \quad R \rightarrow 0 \quad \vec{u} = U$$

直线流动，角点处速度取有限值

可看作均匀直线流动



$$n < 1 \quad R \rightarrow 0 \quad |\vec{u}| \rightarrow \infty$$

绕流角点处流速趋于无穷大，根据伯努利方程该点压强趋于负无穷大

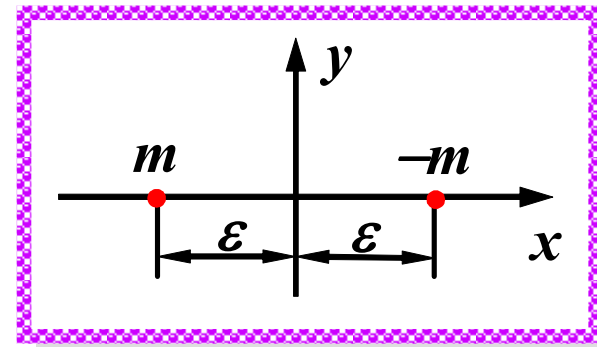
可看作平板尖沿的绕流

## 4.3.5 偶极子

### 一对无限接近的非常强的点源和非常强的点汇

强度为  $m$  的点源位于  $z = -\varepsilon$ ，相同强度的点汇位于  $z = \varepsilon$ ，源与汇在某点  $z$  共同诱导的复位势

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{m}{2\pi} \ln(z + \varepsilon) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - \varepsilon) \\ &= \frac{m}{2\pi} \ln\left(\frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon}\right) = \frac{m}{2\pi} \ln\left(\frac{1 + \varepsilon/z}{1 - \varepsilon/z}\right) \end{aligned}$$



若  $\frac{\varepsilon}{|z|} \ll 1$   $\Rightarrow \left(1 - \frac{\varepsilon}{z}\right)^{-1} = 1 + \frac{\varepsilon}{z} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)$

# 偶极子2

$$\Rightarrow F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln \left\{ \left( 1 + \frac{\varepsilon}{z} \right) \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{z} + O\left( \frac{\varepsilon^2}{z^2} \right) \right] \right\} = \frac{m}{2\pi} \ln \left[ 1 + 2 \frac{\varepsilon}{z} + O\left( \frac{\varepsilon^2}{z^2} \right) \right]$$

由  $\gamma \ll 1$  时,  $\ln(1 + \gamma) = \gamma + O(\gamma^2)$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{m}{2\pi} \left[ 2 \frac{\varepsilon}{z} + O\left( \frac{\varepsilon^2}{z^2} \right) \right] = \frac{m\varepsilon}{\pi z}$$

设

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} m\varepsilon = \pi\mu$$

$\mu$  为常数



$$F(z) = \frac{\mu}{z}$$

④  $\mu$  称为偶极子的强度, 指向负  $x$  轴方向

# 偶极子3

## 流函数

$$F(z) = \frac{\mu}{z} = \frac{\mu\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\mu(x-iy)}{x^2+y^2} = \phi + i\psi$$

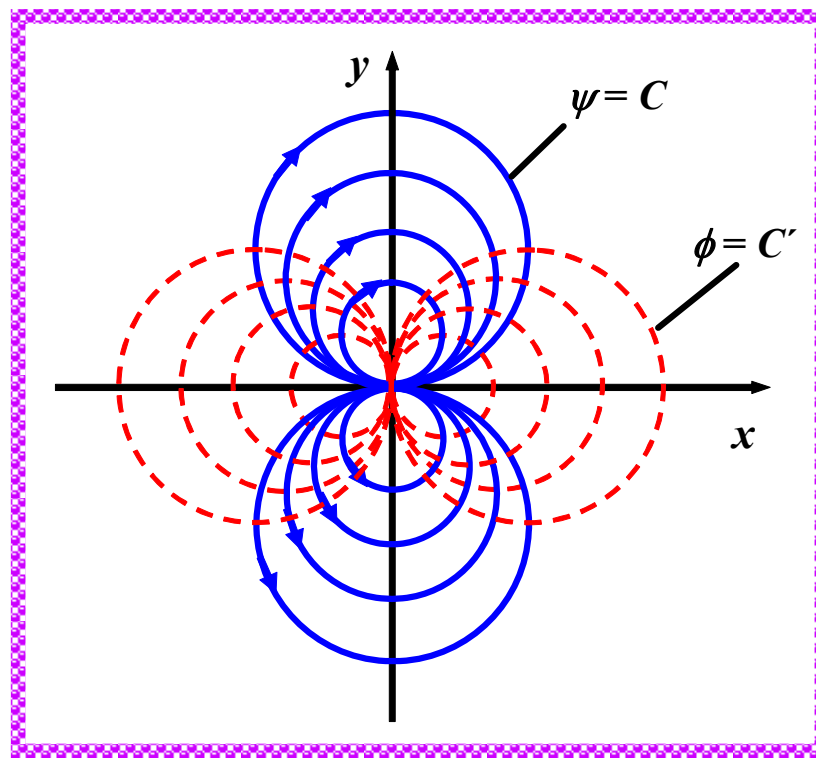


$$\psi = -\mu \frac{y}{x^2 + y^2}$$

令  $\psi = \text{const}$

$$\longrightarrow x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\psi} y = 0 \longrightarrow x^2 + \left(y + \frac{\mu}{2\psi}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2\psi}\right)^2$$

④ 流线是圆心在  $y$  轴且圆周通过原点的圆族





## 速度势函数

$$F(z) = \frac{\mu}{z} = \frac{\mu\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\mu(x-iy)}{x^2+y^2} = \phi + i\psi$$

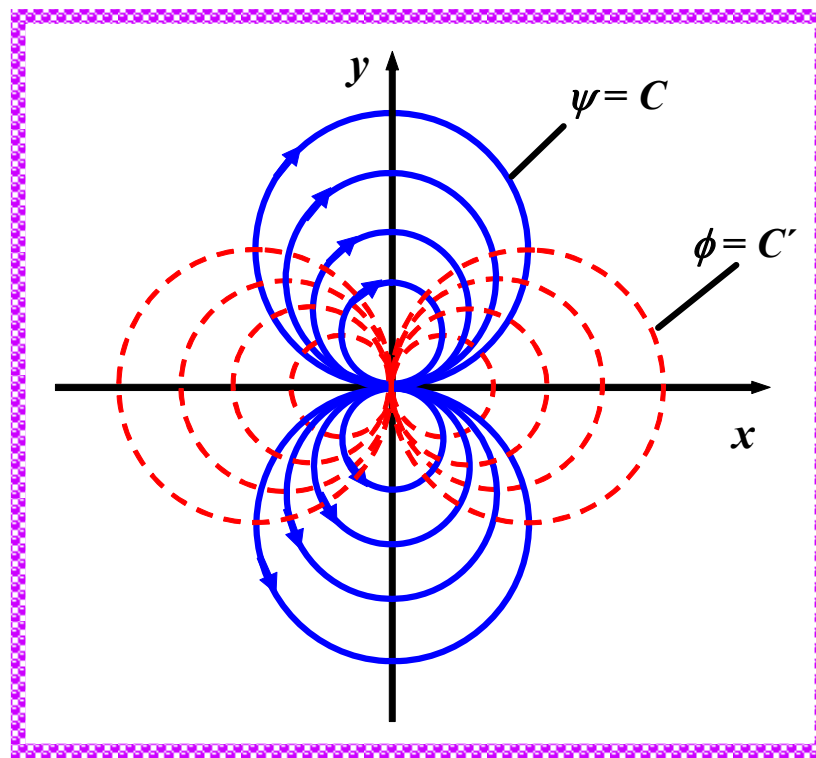


$$\phi = \mu \frac{x}{x^2 + y^2}$$

令  $\phi = \text{const}$

$$\xrightarrow{\text{green arrow}} x^2 + y^2 - \frac{\mu}{\phi}x = 0 \quad \xrightarrow{\text{green arrow}} \left(x - \frac{\mu}{2\phi}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\mu}{2\phi}\right)^2$$

④ 等势线是圆心在  $x$  轴且圆周通过原点的圆族



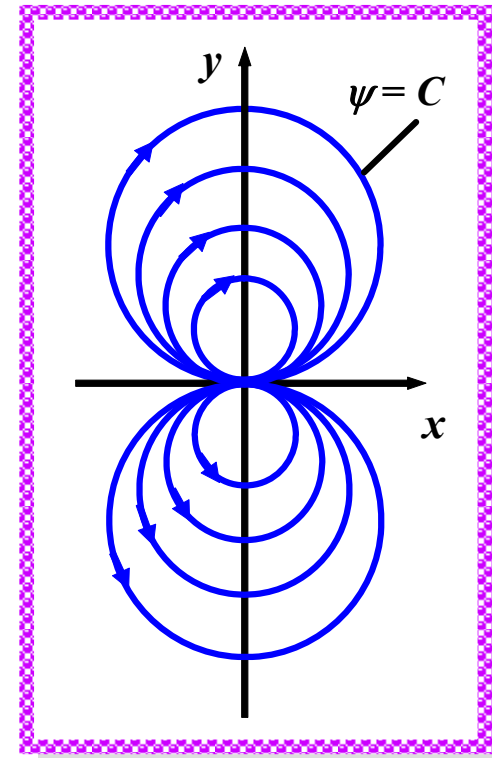


# 偶极子5

## 速度场

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = -\frac{\mu}{z^2} = -\frac{\mu}{R^2} e^{-i2\theta}$$
$$= -\frac{\mu}{R^2} (\cos \theta - i \sin \theta) e^{-i\theta} = (u_R - i u_\theta) e^{-i\theta}$$

→  $u_R = -\frac{\mu}{R^2} \cos \theta, \quad u_\theta = -\frac{\mu}{R^2} \sin \theta$



- ⊙ 可根据速度分量在 4 个象限中的正负确定流动方向
- ⊙  $R \rightarrow 0$  时，速度趋近于无穷大，原点为奇点



# 偶极子6

## 位于 $z_0$ 点偶极子的复位势

- 强度为  $\mu$ ，位于点  $z_0$ ，指向负  $x$  轴方向的偶极子的复位势

$$F(z) = \frac{\mu}{z - z_0}$$



## 4.4 圆柱绕流

圆柱的无环量绕流



均匀流与偶极子叠加

$$F(z) = Uz + \frac{\mu}{z}$$

$x$  方向均匀流叠加指向  $x$   
负向强度为  $\mu$  的偶极子

将  $z = Re^{i\theta}$  代入上式

$$\Rightarrow F(z) = UR e^{i\theta} + \frac{\mu}{R} e^{-i\theta} = \left( UR + \frac{\mu}{R} \right) \cos \theta + i \left( UR - \frac{\mu}{R} \right) \sin \theta$$

④ 流函数



$$\psi = \left( UR - \frac{\mu}{R} \right) \sin \theta$$



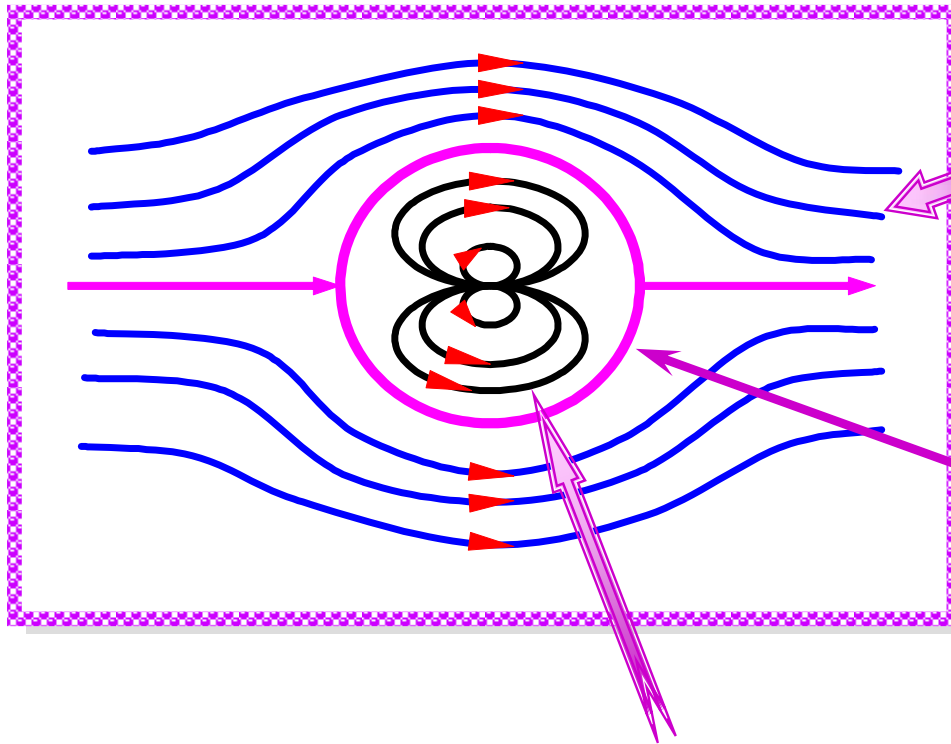
# 无环量圆柱绕流2

零流线

$$\theta = 0, \pi$$

$$R = a = \sqrt{\mu/U}$$

$$\psi = 0$$



均匀来流被排斥在圆外，流线发生弯曲，围绕圆  $R = a$  从圆外流过，圆外为圆柱绕流

圆  $R = a$  把流场分为两部分

偶极子流动被包围在圆内，向上游的流动由于受到均匀来流作用，折转方向流向下游



# 无环量圆柱绕流3

圆柱绕流复位势



$$F(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$|z| \geq a$$

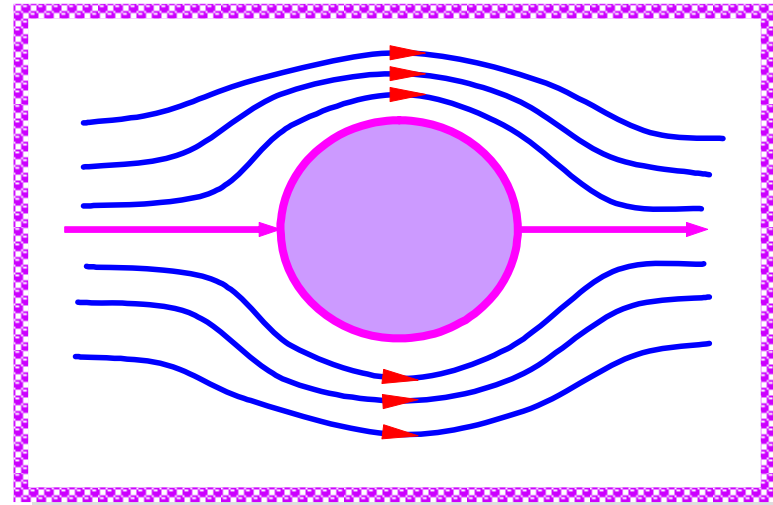
$$F(z) = U \left( R e^{i\theta} + \frac{a^2}{R} e^{-i\theta} \right) = U \left[ \left( R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta + i \left( R - \frac{a^2}{R} \right) \sin \theta \right]$$

速度势函数和流函数

$$\phi = U \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} \right) R \cos \theta$$

$$\psi = U \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) R \sin \theta$$

$$R \geq a$$





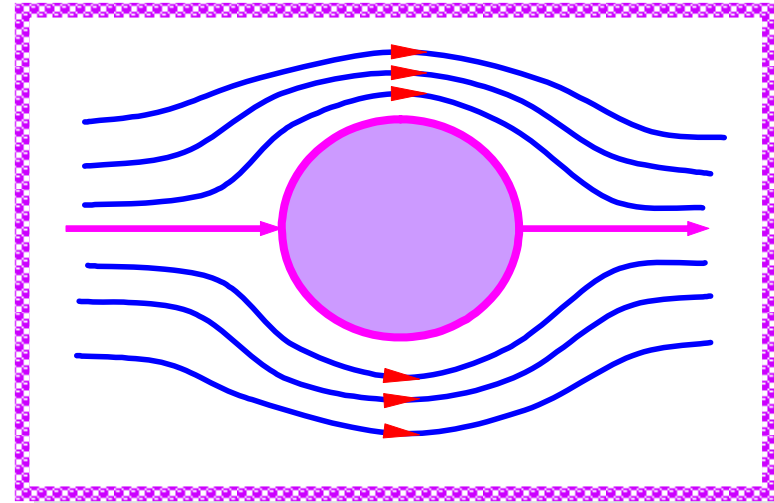
# 无环量圆柱绕流4

速度分布

$$R \geq a$$

$$\phi = U \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} \right) R \cos \theta$$

$$u_R = U \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) \cos \theta$$
$$u_\theta = -U \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} \right) \sin \theta$$



④ 圆表面



$$u_R = 0, u_\theta = -2U \sin \theta$$

法向无穿透

④ 无穷远



$$u_R = U \cos \theta, u_\theta = -U \sin \theta$$



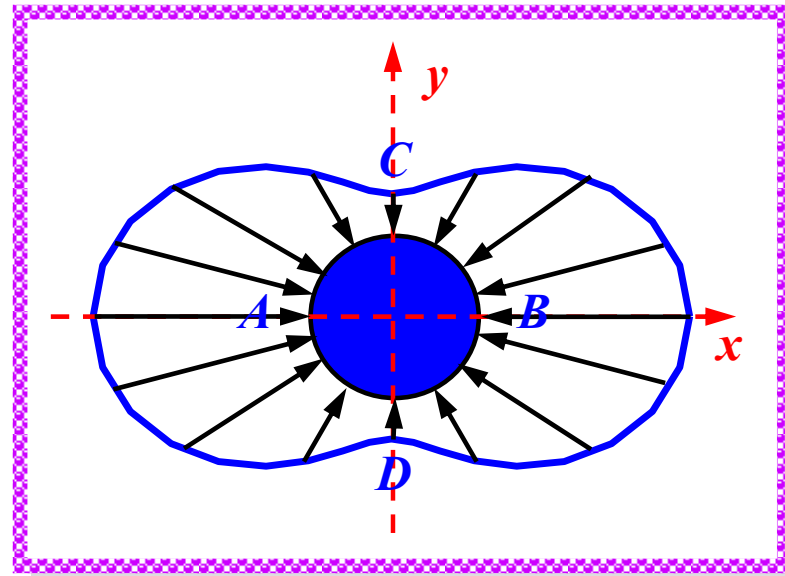
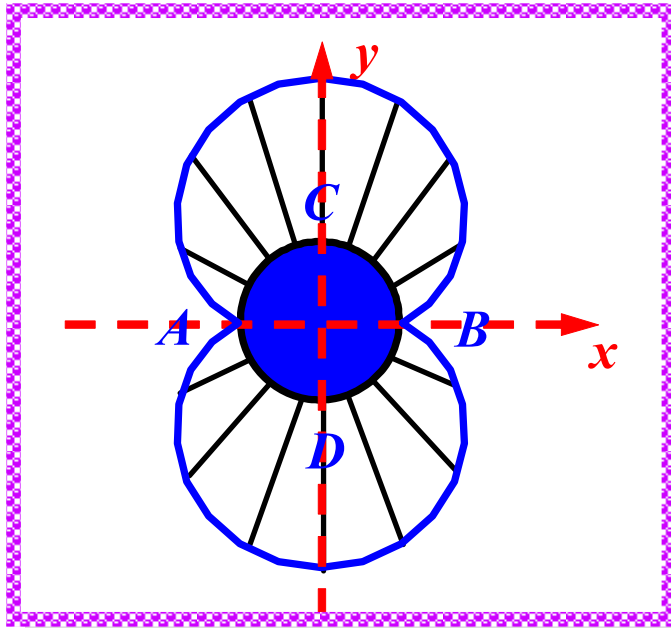
$$|\vec{u}| = U$$

无穷远边界条件



# 无环量圆柱绕流5

## 圆柱表面速度分布和压强分布



速度分布，压强分布相对于  $x$  轴和  $y$  轴对称



A点、B点



驻点

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho (4U^2 \sin^2 \theta)$$





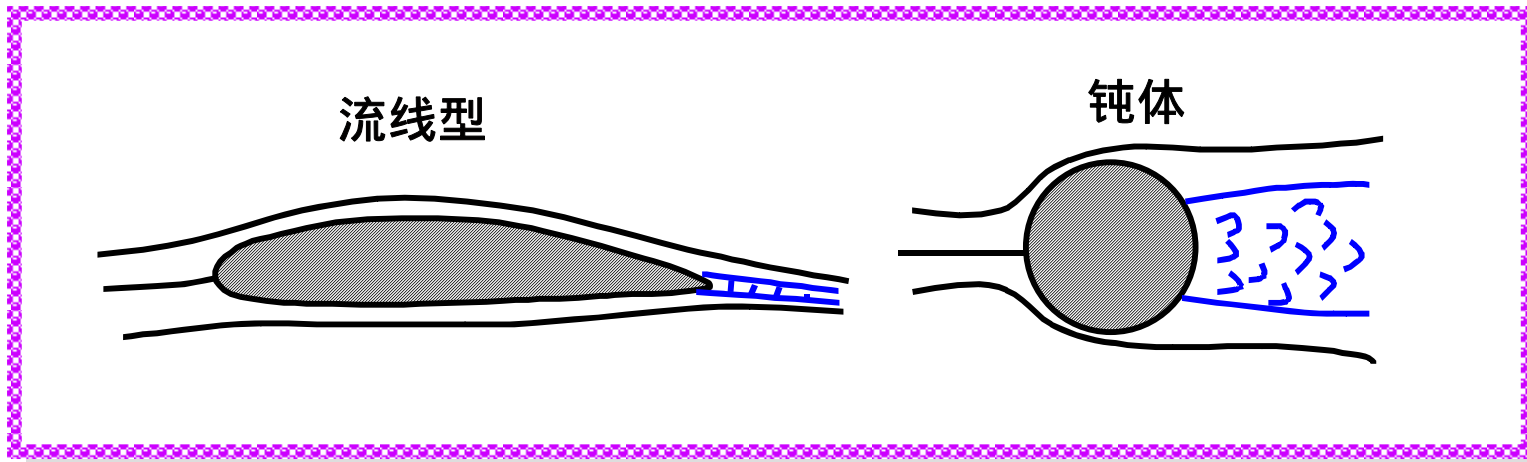
# 无环量圆柱绕流6

达朗贝尔悖论



理想不可压流动中，任一封闭物体的绕流，其阻力都是零

- 在粘性流体中运动的物体会承受摩擦阻力 (*friction drag*) 和压差阻力 (形状阻力 *pressure drag*)



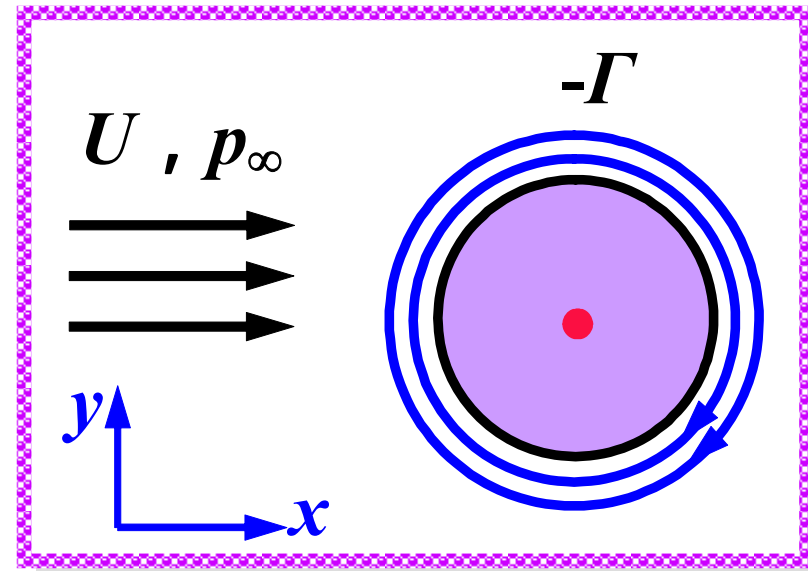


## 4.4.2 有环量的圆柱绕流

无环量圆柱绕流与圆心处强度为 $-\Gamma$ 点涡的叠加



$$F(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$



- ① 点涡流动的流线是同心圆，无穷远处速度为零
- ② 圆柱表面是流线及无穷远处均匀来流的边界条件未被破坏
- ③ 沿任一绕原点的封闭周线的速度环量不为零而为 $\Gamma$

# 有环量的圆柱绕流2

## 复速度

$$F(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{dF}{dz} = U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z} = U \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} e^{-2i\theta} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta} \\ &= \left[ U \left( e^{i\theta} - \frac{a^2}{R^2} e^{-i\theta} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi R} \right] e^{-i\theta} \\ &= \left\{ U \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) \cos \theta + i \left[ U \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right] \right\} e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_R = U \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = -U \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$



# 有环量的圆柱绕流3

④ 圆柱面

$$u_R = U \left( 1 - \frac{a^2}{R^2} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = -U \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$



$$u_R = 0, \quad u_\theta = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

法向无穿透

④ 无穷远

$$u_R = U \cos \theta, \quad u_\theta = -U \sin \theta$$



$$|\vec{u}| = U$$

无穷远边界条件

④ 驻点

$$u_\theta = 0$$



$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a U}$$



# 有环量的圆柱绕流4

① 无环量



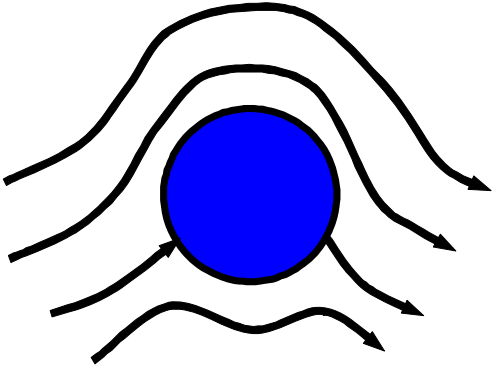
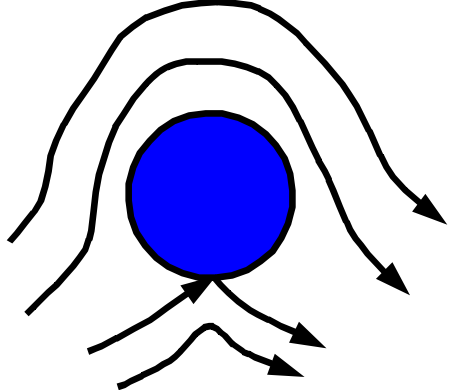
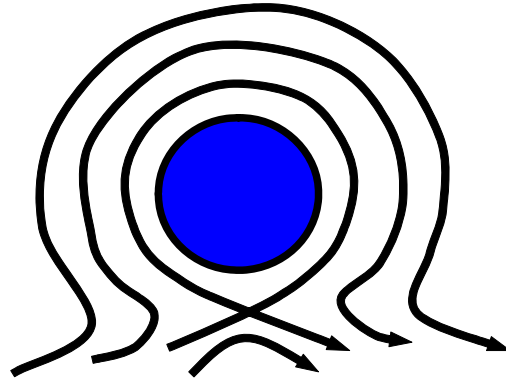
$$\sin \theta = 0$$



$$\theta = 0, \pi$$

$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a U}$$

② 有环量

$\Gamma < 4\pi R U$	$\Gamma = 4\pi R U$	$\Gamma > 4\pi R U$
 <p>两驻点位于3、4象限，并关于y轴对称</p>	 <p>一驻点 <math>\theta = 3\pi/2</math></p>	 <p>柱面无驻点，驻点进入流体中</p>

# 有环量的圆柱绕流5

## 柱面压强分布

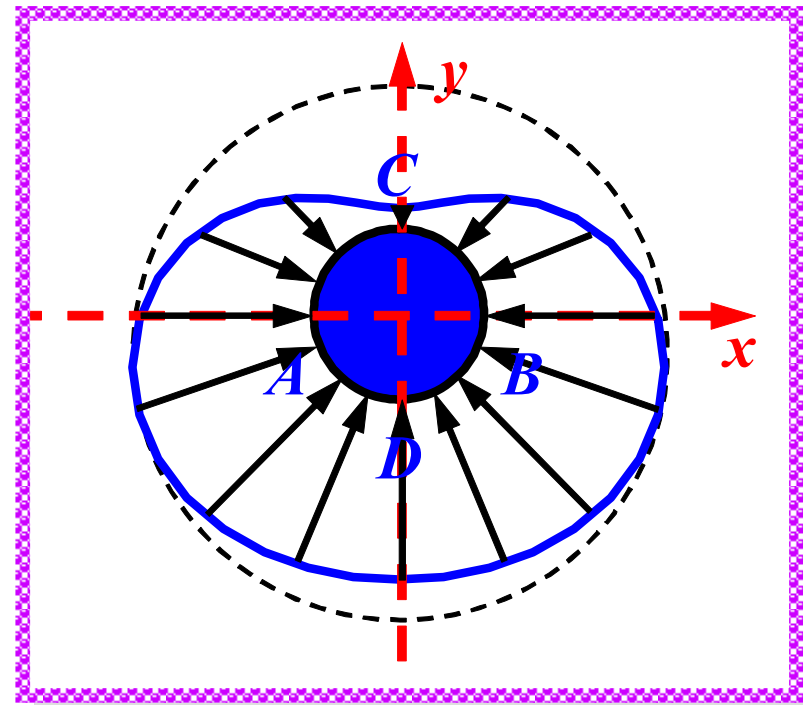
$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho \left[ U^2 - \left( 2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right]$$

## 圆柱在 $y$ 方向所受的力

$$\begin{aligned} F_y &= - \int_S p ds \sin \theta \\ &= - \int_0^{2\pi} p R \sin \theta d\theta \end{aligned}$$



$$F_y = \rho U \Gamma$$



## 库塔 - 茹可夫斯基升力定理

# 基本势流叠加例题1-1

例：设流场由均匀流和点源叠加而成，速度为  $U$  的均匀流自左向右沿正  $x$  轴方向流动，强度为  $Q$  的点源布置在原点。试确定：(1) 流场中驻点的位置；(2) 通过驻点的流线方程

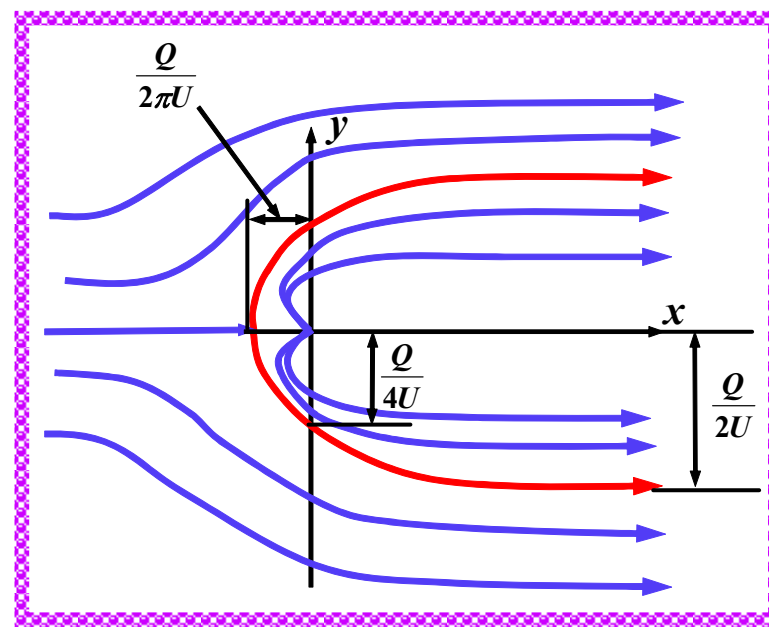
## (1) 流场中驻点的位置

由 
$$F(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

→ 
$$W(z) = \frac{dF}{dz} = U + \frac{Q}{2\pi z}$$

由  $W(z) = 0$

→ 驻点位置 
$$\underline{\underline{z = -\frac{Q}{2\pi U}}} \quad \text{即} \quad \underline{\underline{R = \frac{Q}{2\pi U}}, \theta = \pi}$$



# 基本势流叠加例题1-2

## (2) 通过驻点的流线方程

$$R = \frac{Q}{2\pi U}, \theta = \pi$$

$$\begin{aligned} \text{由 } F(z) &= Uz + \frac{Q}{2\pi} \ln z = UR e^{i\theta} + \frac{Q}{2\pi} \ln R e^{i\theta} \\ &= UR(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{Q}{2\pi} (\ln R + i\theta) \end{aligned}$$

$$= \left( UR \cos \theta + \frac{Q}{2\pi} \ln R \right) + i \left( UR \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta \right)$$



$$\psi = UR \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta$$

## 过驻点的流线

$$\theta = \pi \quad \longrightarrow \quad \psi = \frac{Q}{2} \quad \longrightarrow \quad UR \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2}$$



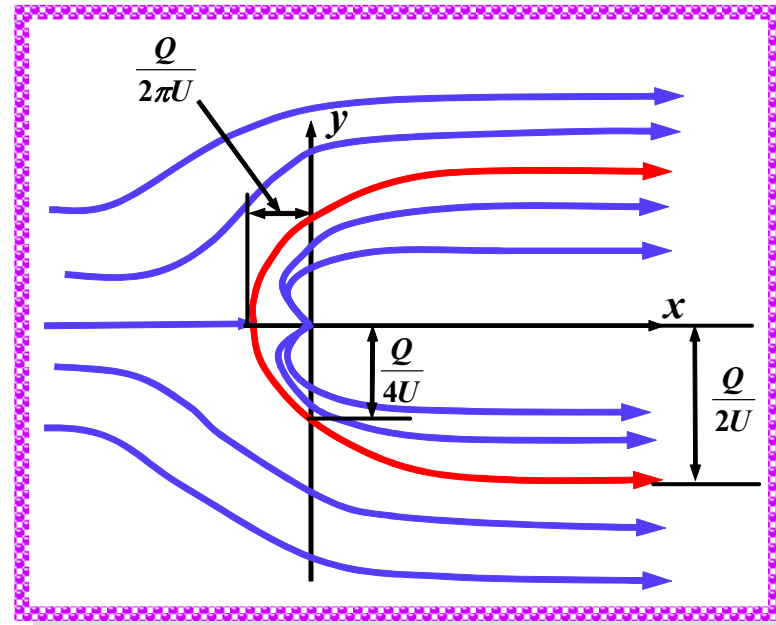


# 基本势流叠加例题1-3

→  $R = \frac{Q(\pi - \theta)}{2\pi U \sin \theta}$

当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  →  $R = \frac{Q}{4U}$

$\theta \rightarrow 0$  →  $y = R \sin \theta = \frac{Q}{2U}$



$$UR \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2}$$



# 基本势流叠加例题2-1

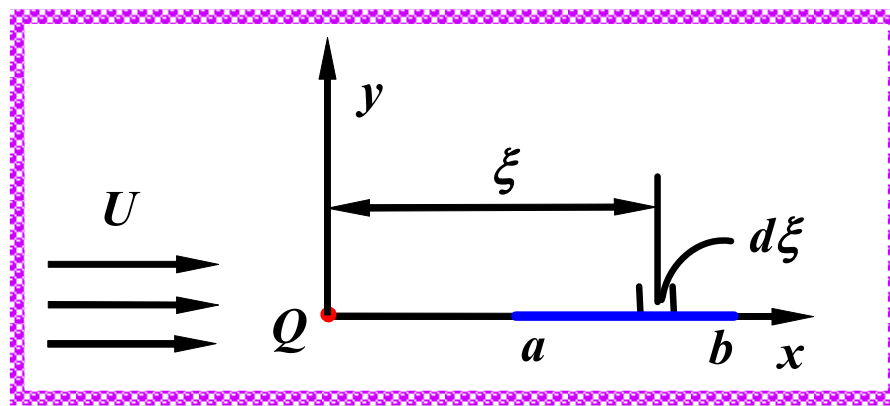
例：求沿正  $x$  轴方向的均匀流、位于原点的点源、和在  $x$  轴  $a \leq x \leq b$  区间内均匀连续分布的汇所迭加的流场的复位势和零流线方程。点源强度为  $Q$ ，线汇分布强度（单位长度的强度） $-Q/(b-a)$

## 线汇元的复位势

$$\frac{-Qd\xi}{2\pi(b-a)} \ln(z - \xi)$$

## 整个线汇的复位势

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{-Q}{2\pi(b-a)} \int_a^b \ln(z - \xi) d\xi \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{z-b}{b-a} \ln(z-b) - \frac{z-a}{b-a} \ln(z-a) + 1 \right] \end{aligned}$$





# 基本势流叠加例题2-2

## 舍去常数部分

$$\Rightarrow F(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln z + \frac{z-b}{b-a} \ln(z-b) - \frac{z-a}{b-a} \ln(z-a) \right]$$

## 分离实部与虚部

$$\ln z = \ln(x + iy) = \ln(Re^{i\theta}) = \ln R + i\theta \Rightarrow \psi_1 = \arctan(y/x)$$

$$\frac{z-b}{b-a} \ln(z-b) = \frac{x-b+iy}{b-a} \ln(x-b+iy) = \frac{x-b+iy}{b-a} (\ln R' + i\theta')$$

$$= \frac{1}{b-a} \{ (x-b)\ln R' - y\theta' + i[(x-b)\theta' + y\ln R'] \}$$

$$\Rightarrow \psi_2 = \frac{1}{b-a} \left[ (x-b)\arctan\left(\frac{y}{x-b}\right) + y \ln \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \right]$$



# 基本势流叠加例题2-3

$$\begin{aligned}\frac{z-a}{b-a} \ln(z-a) &= \frac{x-a+iy}{b-a} \ln(x-a+iy) = \frac{x-a+iy}{b-a} (\ln R'' + i\theta'') \\ &= \frac{1}{b-a} \left\{ (x-a) \ln R'' - y\theta'' + i[(x-a)\theta'' + y \ln R''] \right\}\end{aligned}$$

→ 
$$\psi_3 = \frac{1}{b-a} \left[ (x-a) \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right) + y \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

→ 
$$\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi} (\psi_1 + \psi_2 - \psi_3)$$

→ 
$$\begin{aligned}\psi &= Uy + \frac{Q}{2\pi} \left[ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{b-a} \ln \sqrt{\frac{(x-b)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x-b}{b-a} \arctan\left(\frac{y}{x-b}\right) - \frac{x-a}{b-a} \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right) \right]\end{aligned}$$



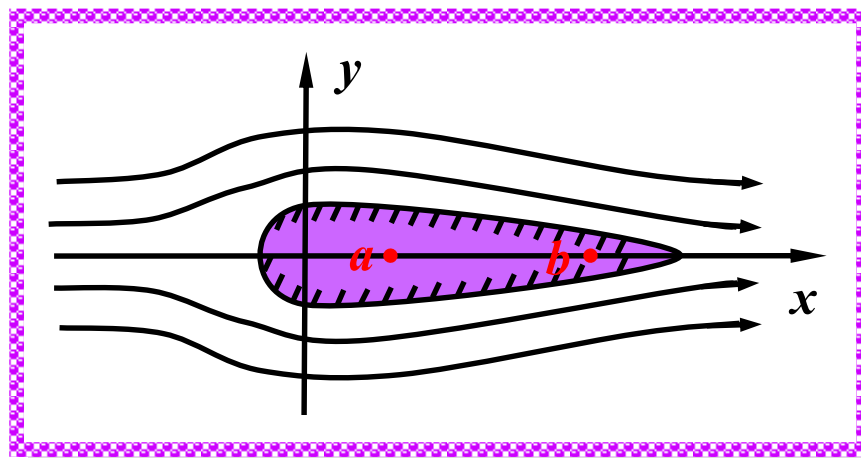
# 基本势流叠加例题2-4

令  $\psi = 0$

→  $y = 0$

$$\frac{2\pi Uy}{Q} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{b-a} \ln \sqrt{\frac{(x-b)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{x-b}{b-a} \arctan\left(\frac{y}{x-b}\right) - \frac{x-a}{b-a} \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right) = 0$$

右图给出了零流线，可见上述奇点叠加可表示流体绕流线型物体的流动。选不同  $a, b, Q$ ，可得不同形状





# 基本势流叠加例题2-5

驻点  $W(z) = U + \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{b-a} \ln \frac{z-b}{z-a} \right) = u - iv$

$u = U + \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{b-a} \ln \frac{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right)$

$v = \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{b-a} \arctan \frac{(b-a)y}{(x-a)(x-b) + y^2} \right)$

当  $y = 0$  时  $\Rightarrow v = 0$  令  $u = 0$

$\frac{2\pi}{Q} \left( U + \frac{Q}{2\pi x} \right) (b-a) = \ln \frac{x-a}{x-b}$

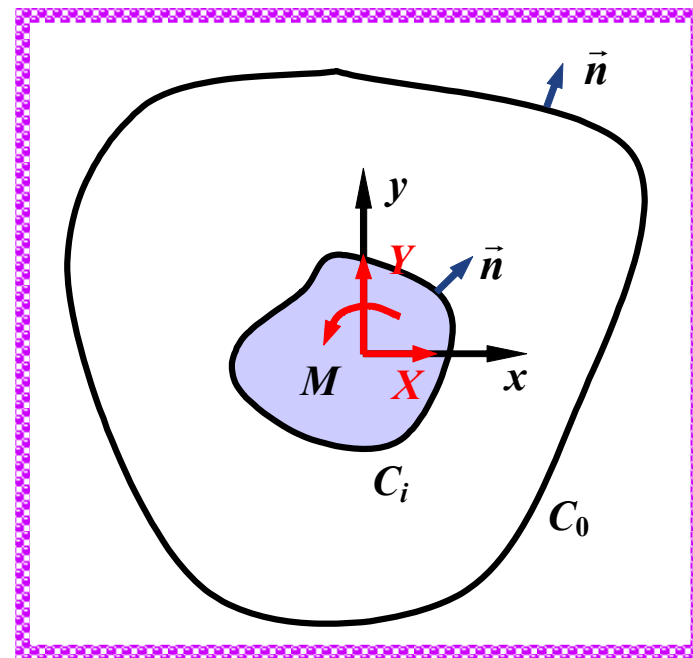


# 4.5 布拉休斯公式

④ 任意形状柱体的不脱体定常绕流

④ 周围流体对柱体的作用力可简化为作用在柱体重心的力  $X$ 、 $Y$  以及力矩  $M$

④  $C_0$  是包围柱体的任意柱面，在  $C_0$  内除柱体外没有任何其他奇点存在



$$X - iY = i \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} W^2 dz$$

$$M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \oint_{C_0} z W^2 dz \right]$$



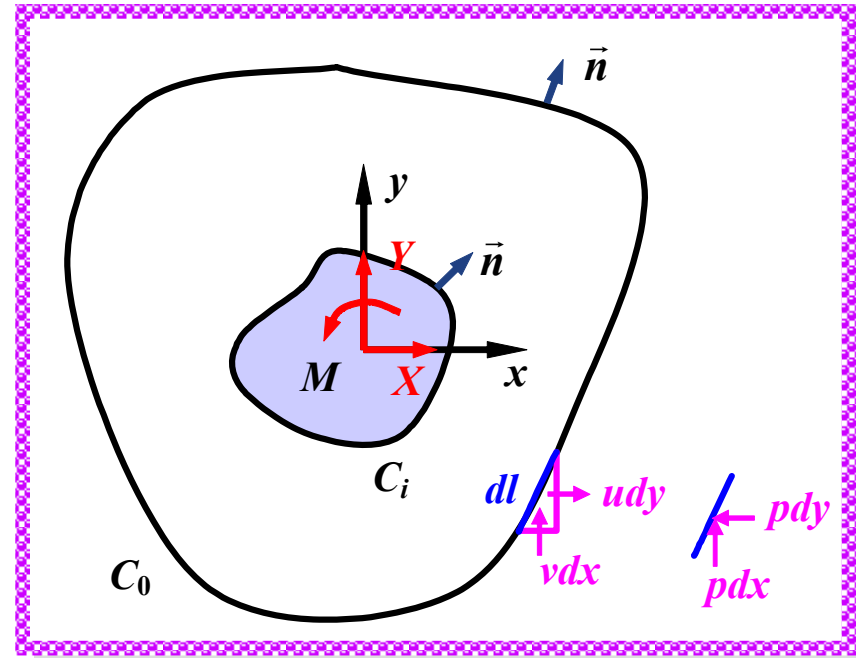
# 布拉休斯公式2

在  $C_0$  ,  $C_i$  间没有任何奇点存在

控制体受到柱体的反作用力和力矩为  $-X$ 、  $-Y$ 、  $-M$  , 由动量定理

$$\sum \vec{F} = \oint_{C_0} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dl = \oint_{C_0} \rho \vec{u} \delta Q$$

柱面为流线



写成分量形式  $\implies \sum F_x = \oint_{C_0} \rho u \delta Q \quad \sum F_y = \oint_{C_0} \rho v \delta Q$

通过线元  $dl$  的体积流量  $\implies \delta Q = u dy - v dx$

微元面受到的压力  $\implies -p dy , p dx$



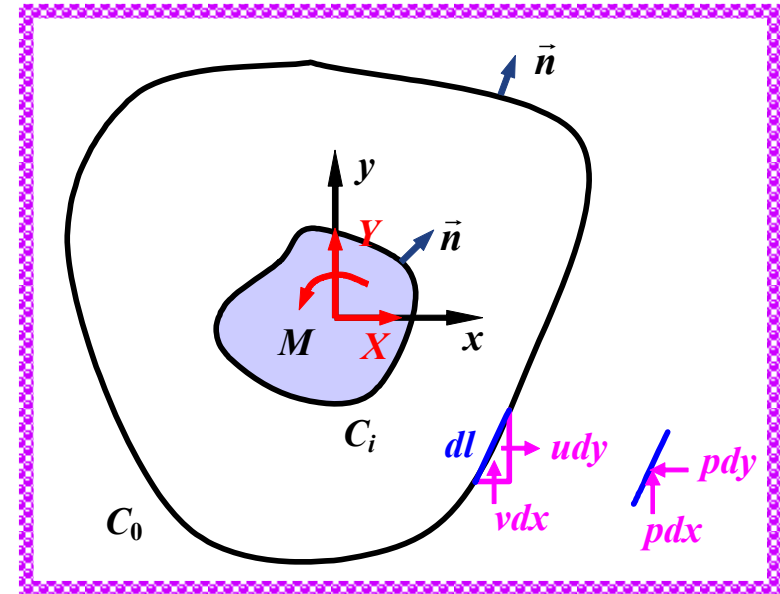


# 布拉休斯公式3

$x$  和  $y$  方向动量方程的分量方程为

$$-X - \oint_{C_0} p dy = \oint_{C_0} \rho u (u dy - v dx)$$

$$-Y + \oint_{C_0} p dx = \oint_{C_0} \rho v (u dy - v dx)$$



由伯努利方程  $\Rightarrow p = C - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$   $C$  为伯努利常数

$$\Rightarrow X = \rho \oint_{C_0} \left[ uv dx - \frac{1}{2}(u^2 - v^2) dy \right]$$

推导中

$$Y = -\rho \oint_{C_0} \left[ uv dy + \frac{1}{2}(u^2 - v^2) dx \right]$$

$$\oint_{C_0} C dx = \oint_{C_0} C dy = 0$$



# 布拉休斯公式4

由复速度  $W(z)$  
$$i\frac{\rho}{2}\oint_{C_0} W^2(z)dz = i\frac{\rho}{2}\oint_{C_0} (u - iv)^2(dx + idy)$$

$$= i\frac{\rho}{2}\oint_{C_0} (u^2 dx + iu^2 dy - v^2 dx - iv^2 dy - i2uvdx + 2uvdy)$$

$$= \rho\oint_{C_0} \left[ uvdx - \frac{1}{2}(u^2 - v^2)dy \right] + i\rho\oint_{C_0} \left[ uvdy + \frac{1}{2}(u^2 - v^2)dx \right]$$

$$= X - iY$$

**柱体受力布拉休斯公式**



$$X - iY = i\frac{\rho}{2}\oint_{C_0} W^2 dz$$

$X, Y$  是作用在柱体重心的力，方向分别沿  $x$  与  $y$  轴正向； $C_0$  是包围柱体的任意柱面，在  $C_0$  内除柱体外没有任何其他奇点存在； $W$  为复速度



# 布拉休斯公式5

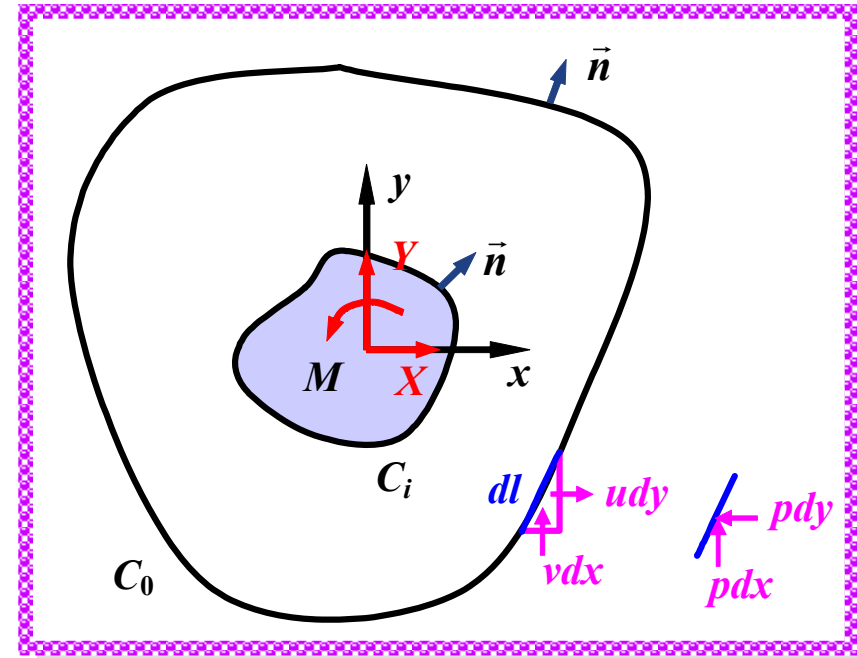
## 动量矩方程

$$\sum \vec{M} = \oint_{C_0} \vec{r} \times \vec{u} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dl = \oint_{C_0} \vec{r} \times \vec{u} \rho \delta Q$$

## 只需考虑 z 方向的方程

$$\delta Q = u dy - v dx$$

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = (vx - uy)\vec{k}$$



柱体作用在控制体上的力矩  $\Rightarrow -M\vec{k}$

作用在  $dl$  上的压力对柱体重心的矩  $\Rightarrow (p x dx + p y dy)\vec{k}$



# 布拉休斯公式6

## 动量矩方程

$$\Rightarrow -M + \oint_{C_0} (pxdx + pydy) = \oint_{C_0} (vx - uy)\rho(udy - vdx)$$

由伯努利方程  $\Rightarrow p = C - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$   $C$  为伯努利常数

$$\Rightarrow M = \rho \oint_{C_0} \left[ -\frac{1}{2}(u^2 + v^2)(xdx + ydy) + (u^2 ydy + v^2 xdx) \right.$$

推导中

$$\left. - (uvydx + uvxdy) \right]$$

$$\oint_{C_0} Cdx = \oint_{C_0} Cdy = 0$$

$$\Rightarrow M = -\frac{\rho}{2} \oint_{C_0} \left[ (u^2 - v^2)(xdx - ydy) + 2uv(xdy + ydx) \right]$$



# 布拉休斯公式7

以复速度做如下积分

$$M = -\frac{\rho}{2} \oint_{C_0} \left[ (u^2 - v^2)(xdx - ydy) + 2uv(xdy + ydx) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} z W^2 dz &= \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} (x + iy)(u - iv)^2 (dx + idy) \\ &= \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} \left[ (u^2 - v^2)(xdx - ydy) + 2uv(xdy + ydx) \right] \\ &\quad + i \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} \left[ (u^2 - v^2)(xdy + ydx) - 2uv(xdx - ydy) \right] \end{aligned}$$

柱体上力矩的  
布拉休斯公式



$$M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \oint_{C_0} z W^2 dz \right]$$

$M$  是作用在柱体上的力矩，逆时针方向为正

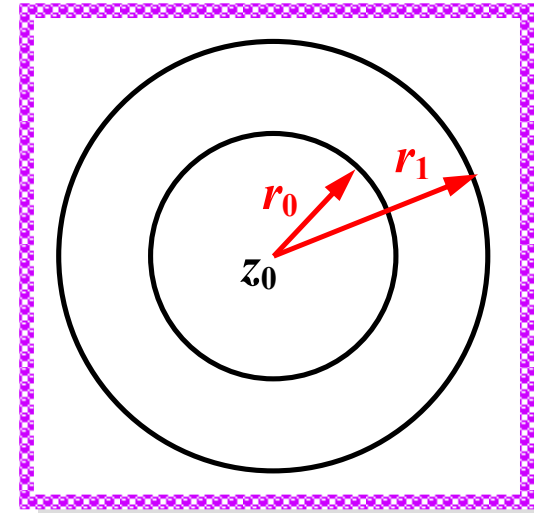


# 留数定理1

## 留数定理

## 罗伦级数

- 如果  $G(z)$  在环形域  $r_0 < r < r_1$  处处解析，该环形域中心在点  $z_0$ ，则  $G(z)$  可用级数表示为



$$G(z) = \dots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

留数



一个函数在  $z_0$  点的留数就是该函数  
对于  $z_0$  的罗伦级数  $\frac{1}{z - z_0}$  项的系数



# 留数定理2

## 留数定理

- ④ 如果  $G(z)$  在  $C$  内的区域中除有限个奇点  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  ...  $z_n$  外解析，则

$$\int_C G(z) dz = 2\pi i (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$$

- ④ 式中， $R_1$  是  $G(z)$  在  $z_1$  点的留数， $R_2$  是  $G(z)$  在  $z_2$  点的留数，等等
- ④ 显然，当  $C$  内无奇点时，积分等于零



# 柱体定常绕流的受力1

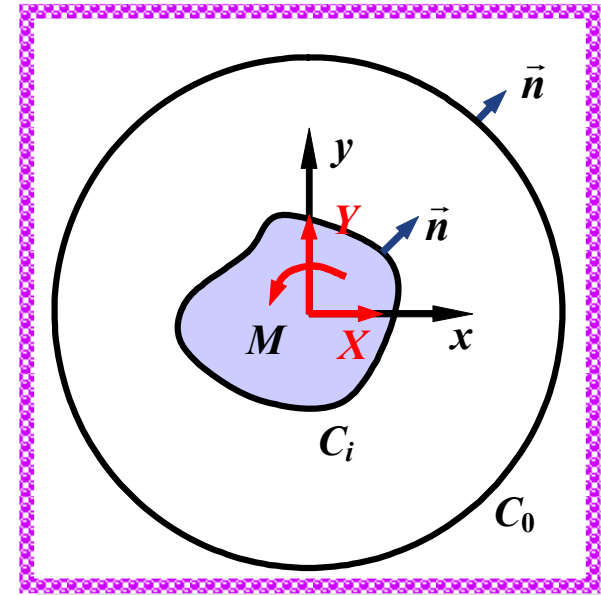
## 柱体定常绕流受力

$C_0$  为圆心在原点围绕柱体半径充分大的圆柱面

$C_0$  内除柱体外没有任何其他奇点

无穷远处复速度  $\longrightarrow U_\infty e^{-i\alpha}$

$$\begin{aligned} \longrightarrow W(z) &= \frac{dF}{dz} = \dots + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_1}{z} + A_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots \\ &= A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \end{aligned}$$







# 柱体定常绕流的受力2

当  $z \rightarrow \infty$  时  $W(z) = U_\infty e^{-i\alpha}$



$$A_0 = U_\infty e^{-i\alpha}$$

$$W(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$
$$\int_C G(z) dz = 2\pi i (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

根据留数定理

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{dF}{dz} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} (d\phi + id\psi)$$

由于  $C_0$  和  $C_i$  之间没有奇点，且  $C_i$  为柱体表面， $\psi$  为常数

$$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} (d\phi + id\psi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} (d\phi + id\psi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} d\phi = \frac{\Gamma}{2\pi i}$$



$$W(z) = \frac{dF}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$



# 柱体定常绕流的受力3

## 柱体受力

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

$$\begin{aligned} X - iY &= i \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} W^2 dz \\ &= i \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} \left( U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz \\ &= i \frac{\rho}{2} \oint_{C_0} \left[ \left( U_\infty e^{-i\alpha} \right)^2 + \frac{\Gamma}{\pi iz} U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + \dots \right] dz \\ &= i \frac{\rho}{2} 2\pi i \frac{\Gamma}{\pi i} U_\infty e^{-i\alpha} = i\rho\Gamma U_\infty e^{-i\alpha} \end{aligned}$$



$$X - iY = i\rho\Gamma U_\infty e^{-i\alpha}$$

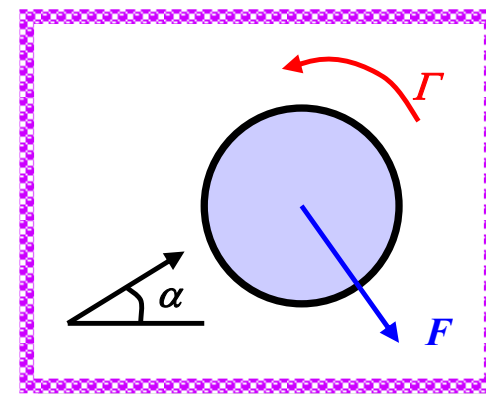


# 柱体定常绕流的受力4

取  $X - iY$  的共轭值得  $\Rightarrow X + iY = -i\rho\Gamma U_\infty e^{i\alpha}$

由  $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$   $\Gamma > 0 \Rightarrow \Gamma = |\Gamma|$   $\Gamma < 0 \Rightarrow \Gamma = |\Gamma|e^{\pi i}$

$$\Rightarrow X + iY = \begin{cases} e^{-\frac{\pi}{2}i} \rho |\Gamma| U_\infty e^{i\alpha} \\ e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{\pi i} \rho |\Gamma| U_\infty e^{i\alpha} \end{cases} = \begin{cases} \rho |\Gamma| U_\infty e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})} \\ \rho |\Gamma| U_\infty e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})} \end{cases}$$

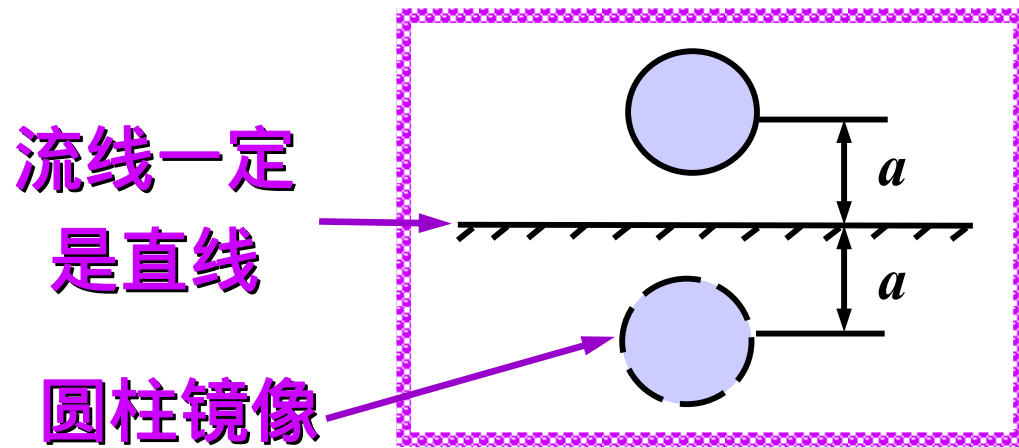


$$\Rightarrow X + iY = \rho |\Gamma| U_\infty e^{i(\alpha \mp \frac{\pi}{2})}$$

- ☞ 作用力与流体密度、来流速度及环量成正比，与柱体形状无关
- ☞ 作用力方向与来流方向相垂直，其方向为来流速度方向逆环量方向旋转90°

## 4.6 镜像法

理想不可压缩流体的势流流动，无穿透条件，即固体壁面是一条流线的条件可通过镜像法来实现



圆柱及其镜像在平壁上部的复位势之和即为所求复位势

- 实际数学处理中需以偶极子代替圆柱，会使平壁上部的圆柱外形畸变，但只要偶极子距离平壁有一定距离，此影响可忽略



# 平面定理—以实轴为边界1

## 平面定理—以实轴为边界

- ④ 假设奇点全在  $y > 0$  的上半平面内，当无物体边界时其复位势为  $f(z)$ ，当插入实轴边界时，这些奇点在上半平面产生的复位势为

$$F(z) = f(z) + \bar{f}(z)$$

$\bar{f}$  表示除  $z$  外其余复常数均取其共轭值



# 平面定理—以实轴为边界2

证明

$f(z)$  的奇点全部位于上半平面

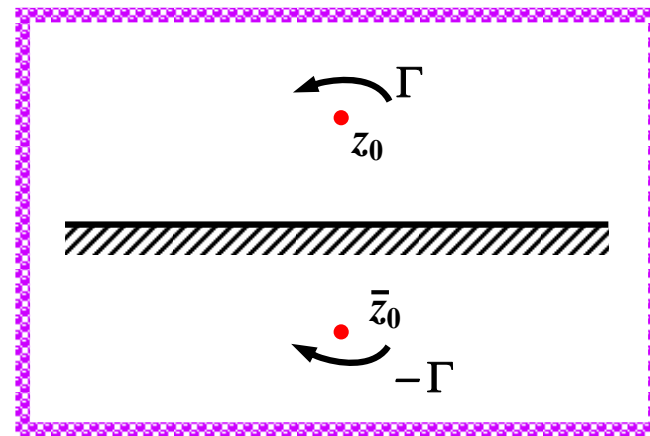
→ 其镜像点全部位于下半平面

→ 上半平面  $F(z)$  和  $f(z)$  的奇点完全一样  $F(z) = f(z) + \bar{f}(\bar{z})$

→  $F(z)$  仍然是除奇点外的解析函数，且不破坏无穷远处边界条件

$x$  轴上  $z = \bar{z}$  →  $F(z) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = \text{实数}$  →  $\psi = 0$

→  $x$  轴为一条流线





# 平面定理—以实轴为边界3

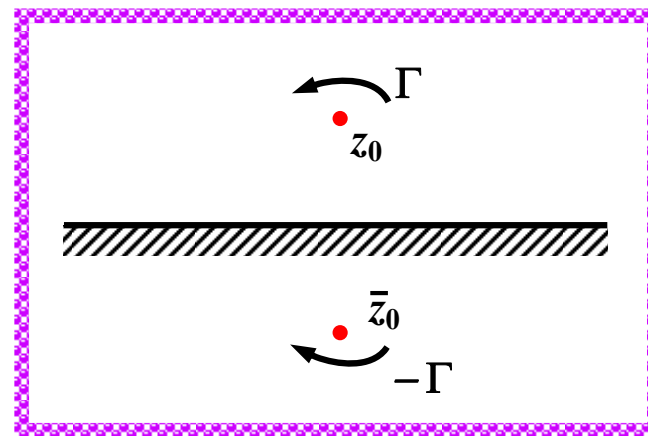
## ◎ 点涡复位势

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

## ◎ 除 $z$ 以外所有复常数取其共轭值

$$\Rightarrow \bar{f}(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0)$$

$$\Rightarrow F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z - \bar{z}_0)}{(z - z_0)}$$



$$F(z) = f(z) + \bar{f}(z)$$

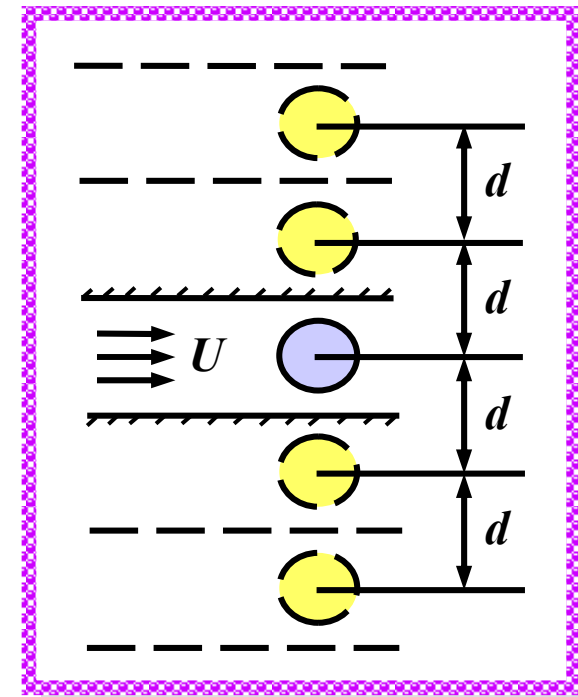
显然这相当于在  $z_0$  的镜像点  $\bar{z}_0$  再放置一个顺时针旋转的点涡



# 平面定理—以实轴为边界4

- ④ 渠道中（两个壁面间）的圆柱绕流，在真实圆柱的每一侧都添加无限多的镜像圆柱，以使得壁面趋近于平直

$$F(z) = Uz + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{a^2 U}{z - ind}$$



几乎所有实验都是在有限空间内进行的，因此都存在固体壁面，而实际的流动如飞机和潜艇的运动却是在无限大空间内进行的，要将模型实验结果应用于原型流动，必需考虑壁面对实验结果的影响





## 4.6.2 平面定理—以虚轴为边界

### 平面定理—以虚轴为边界

- ④ 假设奇点全在  $x > 0$  的右半平面内，当无物体边界时其复位势为  $f(z)$ ，当插入虚轴边界时，这些奇点在右半平面产生的复位势为

$$F(z) = f(z) + \bar{f}(-z)$$

$x > 0$  的区域内未增加新的奇点

$y$  轴上  $-z = \bar{z} \implies F(z) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = \text{实数} \implies \psi = 0$

$\implies y$  轴为一条流线



# 平面定理—以虚轴为边界2

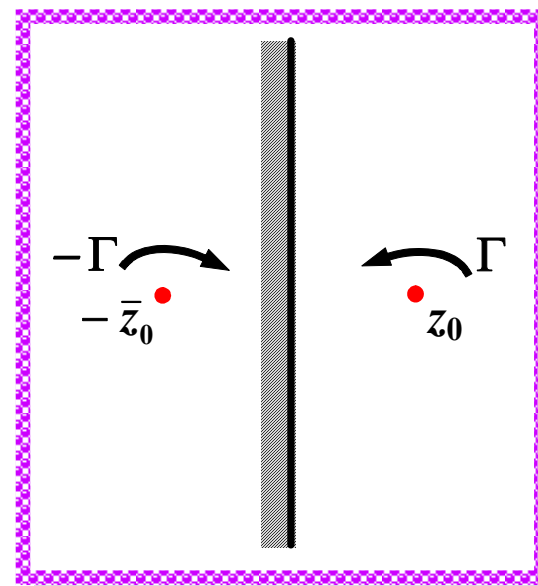
## 点涡复位势

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

$$\bar{f}(-z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(-z - \bar{z}_0)$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z + \bar{z}_0)}{(z - z_0)} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(-1)$$

$$= \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z + \bar{z}_0)}{(z - z_0)} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln e^{i\pi} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z + \bar{z}_0)}{(z - z_0)} - \frac{\Gamma}{2} \leftarrow c$$



$$F(z) = f(z) + \bar{f}(-z)$$

这相当于在  $z_0$  的镜像点  $-\bar{z}_0$  再放置一个顺时针旋转的点涡

复位势增加或减少一个常数不影响流体运动， $c$  可以略去



## 4.6.3 圆定理

### 圆定理

- 假设奇点在无界流体中的复位势为  $f(z)$ ，且奇点均在  $|z| > a$  的区域内，当在流场中插入一个圆心在原点半径为  $a$  的圆柱时，满足圆柱面是一条流线的复位势

$$F(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

圆周上  $z\bar{z} = a^2 \implies \bar{z} = \frac{a^2}{z} \implies F(z) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = \text{实数}$

$\implies \psi = 0 \implies \text{圆周为一条流线}$



# 圆定理—例题1-1

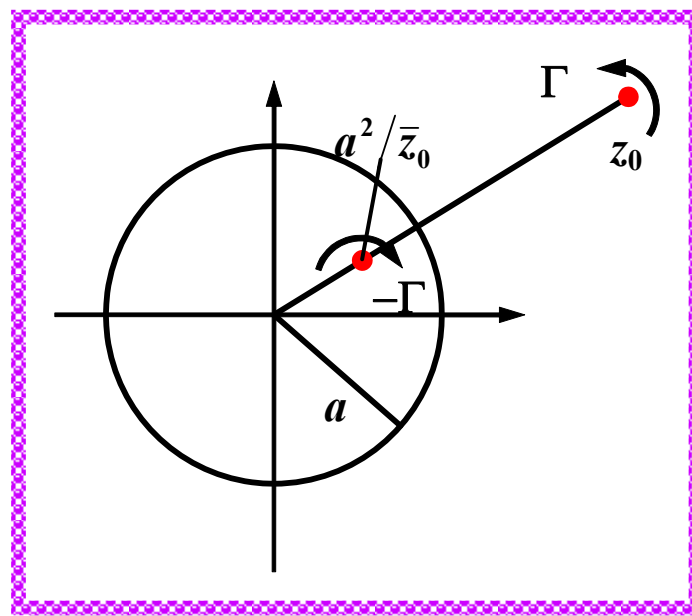
例：设在 $z = z_0$ 点有一强度为 $\Gamma$ 的点涡，求存在半径为 $a$ 的圆周 $|z| = a$ 时的复位势。 $|z_0| > a$  ,  $f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$ 。

由圆定理 
$$F(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

$$= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{a^2}{z} - \bar{z}_0\right)$$

由 
$$\ln\left(\frac{a^2}{z} - \bar{z}_0\right) = \ln\left[-\frac{\bar{z}_0}{z} \left(-\frac{a^2}{\bar{z}_0} + z\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{a^2}{z} - \bar{z}_0\right) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ \ln\left(z - \frac{a^2}{\bar{z}_0}\right) - \ln z + \ln(-\bar{z}_0) \right]$$





# 圆定理—例题1-2

式中： $\ln(-\bar{z}_0)$  为复常数

$$\longrightarrow F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(z - \frac{a^2}{\bar{z}_0}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z + c$$

可以看到除  $z_0$  以外，在  $a^2/\bar{z}_0$  点添加了一个相同强度，顺时针的点涡，还在原点添加了一个相同强度逆时针的点涡

$$\text{由于 } |z_0| > a \longrightarrow |\bar{z}_0| > a \longrightarrow \left| \frac{a^2}{\bar{z}_0} \right| < a$$

$\longrightarrow$  所有添加的奇点均在圆内

$a^2/\bar{z}_0$  称为  $z_0$  在圆内的镜像点



# 圆定理—例题1-3

$z_0$  与其镜像点  $a^2/\bar{z}_0$  的模的乘积为圆半径的平方

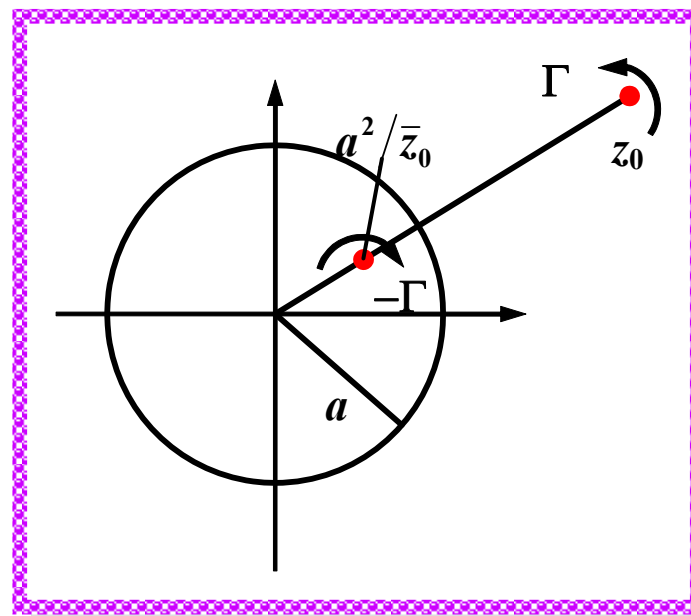
→ 
$$|z_0| \left| \frac{a^2}{\bar{z}_0} \right| = a^2$$

$z_0$  与其镜像点  $a^2/\bar{z}_0$  的幅角相同，它们位于同一条由原点出发的射线上

$$z_0 = R_0 e^{i\alpha}$$



$$\frac{a^2}{\bar{z}_0} = \frac{a^2}{R_0 e^{-i\alpha}} = \frac{a^2}{R_0} e^{i\alpha}$$





# 圆定理2

## 圆柱的无环量绕流

无圆柱时均匀流复位势

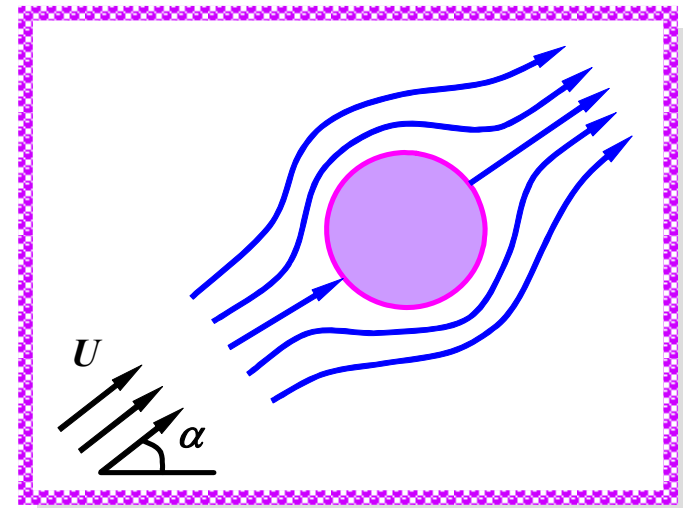
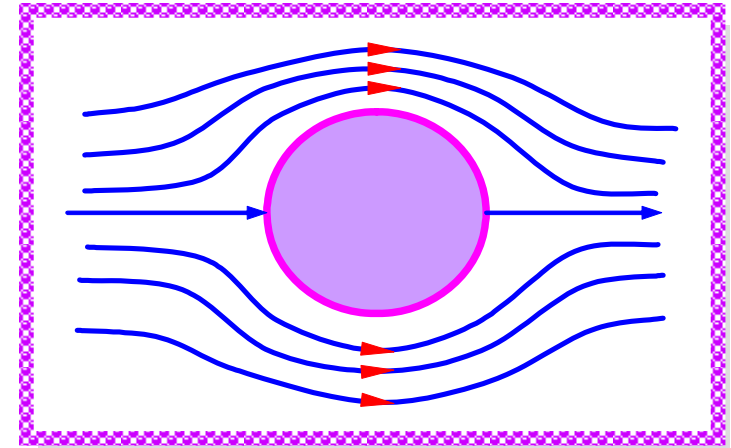
$$f(z) = Uz$$

圆周存在时，根据圆定理，复位势

$$F(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) = Uz + U\frac{a^2}{z}$$

均匀来流以攻角  $\alpha$  绕流圆柱，复位势

$$F(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) = Ue^{-i\alpha}z + Ue^{i\alpha}\frac{a^2}{z}$$





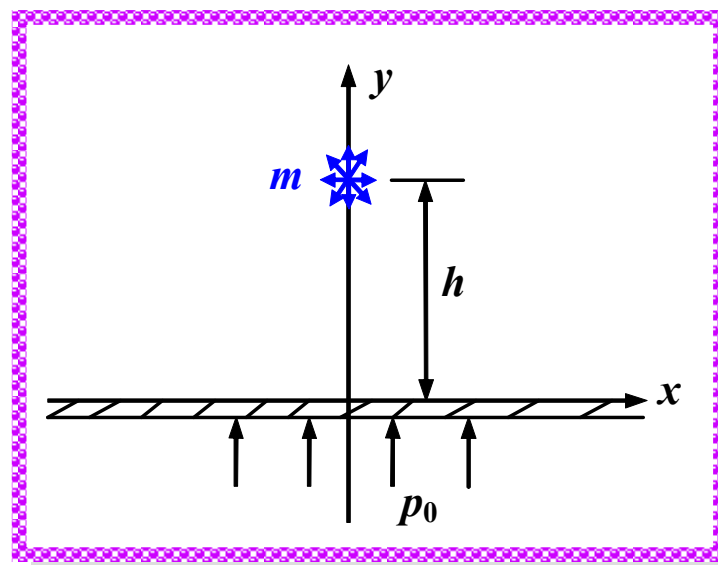
# 圆定理—例题2-1

例：一无限长的平板沿  $y = 0$  放置，一强度为  $m$  的点源位于平板上部，到平板距离为  $h$ 。

- (1) 写出平板以上区域内的复位势；
- (2) 利用伯努利方程求平板上表面的压强分布；
- (3) 求流体对平板的总压力。设平板下部压强等于流体的滞止压强

## (1) 复位势

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) + \bar{f}(z) \\ &= \frac{m}{2\pi} \ln(z - ih) + \frac{m}{2\pi} \ln(z + ih) \\ &= \frac{m}{2\pi} \ln(z^2 + h^2) \end{aligned}$$







# 圆定理—例题2-2

## (2) 平板上表面的压强分布

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z^2 + h^2)$$

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{m}{2\pi} \frac{2z}{z^2 + h^2} \quad y=0 \text{ 时} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{\pi} \frac{x}{x^2 + h^2}$$

应用伯努利方程  $p = p_0 - \frac{1}{2} \rho u^2$

$\Rightarrow$  
$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{m^2}{\pi^2} \frac{x^2}{(x^2 + h^2)^2}$$

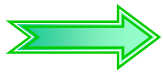
$x = 0$  时,  $p = p_0$ , 原点处压强为滞止压强



# 圆定理—例题2-3

(3) 放置在  $y = 0$  的平板所受总压力

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ p_0 - \left( p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{m^2}{\pi^2} \frac{x^2}{(x^2 + h^2)^2} \right) \right] dx$$



$$\underline{\underline{F = \frac{\rho m^2}{4\pi h}}}$$



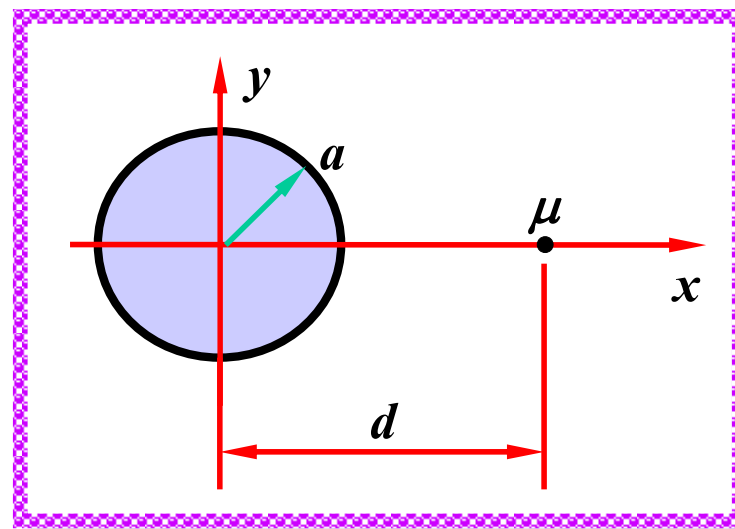
# 圆定理—例题3-1

例：设有一个半径为  $a$ 、圆心在原点的无穷长圆柱，在距圆柱中心  $d$  处放置强度为  $\mu$ ，指向负  $x$  轴方向的偶极子， $d > a$ 。求流动复位势，并计算单位长圆柱上所受的力。设流体密度为  $\rho$ 。

(1) 复位势  $f(z) = \frac{\mu}{z-d}$

$$\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) = \frac{\mu}{a^2/z - d} = \frac{\mu z}{a^2 - zd}$$

$$= -\frac{\mu\left(z - \frac{a^2}{d} + \frac{a^2}{d}\right)}{\left(z - \frac{a^2}{d}\right)d} = -\frac{\mu}{d} - \frac{a^2}{d^2} \frac{\mu}{\left(z - \frac{a^2}{d}\right)}$$





# 圆定理—例题3-2

$$\Rightarrow F(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) = \frac{\mu}{z-d} - \frac{a^2}{d^2} \frac{\mu}{\left(z - a^2/d\right)} + c$$

这相当于在  $z = d$  关于圆的镜像点  $z = a^2/d$  上添加了一个强度为  $\mu a^2/d^2$ ，方向指向正  $x$  轴的偶极子

## (2) 单位长圆柱上所受的力

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = -\frac{\mu}{(z-d)^2} + \frac{a^2}{d^2} \frac{\mu}{\left(z - a^2/d\right)^2}$$

## 引入布拉休斯公式

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_{|z|=a} W^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint_{|z|=a} \left[ -\frac{\mu}{(z-d)^2} + \frac{a^2}{d^2} \frac{\mu}{\left(z - a^2/d\right)^2} \right]^2 dz$$



# 圆定理—例题3-3

$$\begin{aligned} &= \frac{i\rho}{2} \oint_{|z|=a} \left[ -\frac{2\mu^2 a^2}{d^2} \frac{1}{(z-d)^2 (z-a^2/d)^2} \right] dz \\ &= \frac{i\rho}{2} \left( -\frac{2\mu^2 a^2}{d^2} \right) \oint_{|z|=a} \left[ \frac{1}{(z-d)^2 (z-a^2/d)^2} \right] dz \\ &= \frac{i\rho}{2} \left( -\frac{2\mu^2 a^2}{d^2} \right) \left( 2\pi i R \Big|_{z=\frac{a^2}{d}} \right) \end{aligned}$$



$$\underline{\underline{X = \frac{4\pi\rho\mu^2 a^2 d}{(d^2 - a^2)^3}, Y = 0}}$$



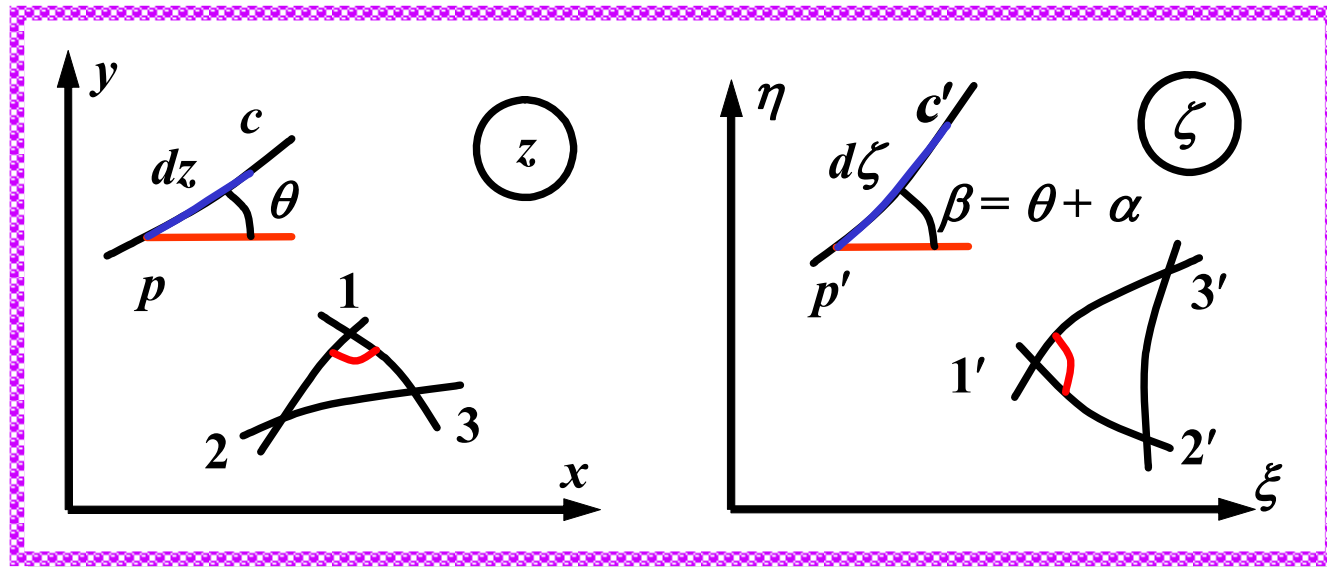
# 4.7 保角变换

## 解析函数

$$\zeta = G(z)$$

$$z = x + iy$$

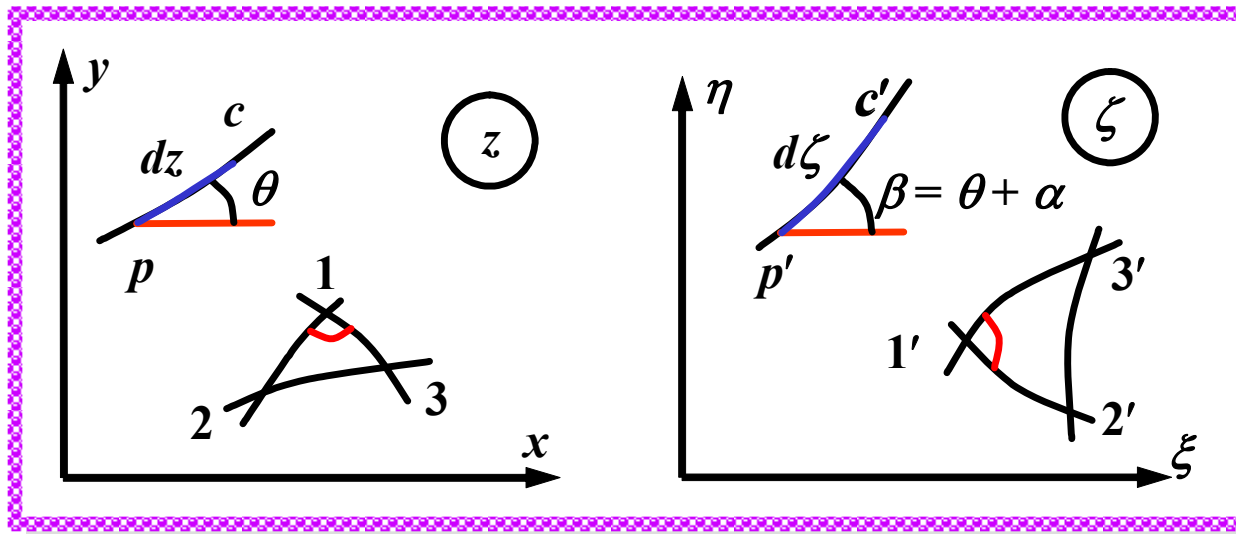
$$\zeta = \xi + i\eta$$



- ① 函数  $\zeta = G(z)$  把  $z$  平面上的点或曲线映射为  $\zeta$  平面上的相应点和曲线
- ②  $z$  平面上曲线形状与  $\zeta$  平面上曲线形状之间存在一  
定的联系



# 保角变换2



对于解析函数,  $d\zeta/dz$  与方向无关, 只是点  $z$  的函数

→ 
$$\frac{d\zeta}{dz} = Ae^{i\alpha}$$

式中  $A$  和  $\alpha$  只是平面点的函数

→  $|d\zeta| = A|dz|$  曲线长度伸长到了原长度的  $A$  倍

$d\zeta = Ae^{i\alpha} dz$  幅角相对于  $dz$  又转过了  $\alpha$



# 保角变换3

**保角变换**



过同一点的任意两条  
曲线之间夹角在变换  
后保持不变

$$\frac{d\zeta}{dz} = Ae^{i\alpha}$$

- ① 过同一点的所有曲线伸长了同样的倍数和旋转了同样的角度，且旋转方向相同
- ② 过同一点的任意两条曲线之间的夹角在变换后保持不变，相应微元面几何相似
- ③  $d\zeta/dz$  等于零或无穷大，则上述结论不再成立，此时在这些点上的映射变换不再具有保角性和相似性





# 保角变换4

## 保角变换中的复位势

设  $F(z)$  是  $z$  平面某区域内的复位势， $z = g(\zeta)$  是解析函数

→ 
$$\frac{\delta F}{\delta \zeta} = \frac{\delta F}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta \zeta}$$

→  $F$  是  $\zeta$  的解析函数

→ 
$$F(z) = F[g(\zeta)] = F(\zeta)$$

⊙ 解析函数  $z = g(\zeta)$  把  $z$  平面的复位势  $F(z)$  变换为  $\zeta$  平面中的复位势  $F(\zeta)$



# 保角变换5

## 保角变换中的速度势函数和流函数

由  $F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$        $F(\zeta) = \phi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$

且

$$F(z) = F[g(\zeta)] = F(\zeta)$$



$$\phi(x, y) = \phi(\xi, \eta), \quad \psi(x, y) = \psi(\xi, \eta)$$

$z$  平面的等势线和流线，变换到  $\zeta$  平面仍是等势线和流线，在  $\zeta$  平面等势线和流线也正交



# 保角变换6

## 保角变换中的复速度

$$W(\zeta) = \frac{dF}{d\zeta} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = W(z) \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)^{-1}$$

☞ 若  $d\zeta/dz \neq 0 \implies W(\zeta)$  在  $\zeta$  平面处处存在

☞ 若  $d\zeta/dz = 0$ ，且在  $z$  平面的相应点速度不等于零

$\implies W(\zeta)$  无穷大

经保角变换后，复速度大小、方向均发生了改变



# 保角变换7

## 保角变换中的点源（汇）和点涡

$z_0$  点有强度为  $m$  的点源和强度为  $\Gamma$  的点涡，在  $z_0$  的小邻域内，只有该奇点的复位势起作用

→ 
$$F(z) \sim \frac{m - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

$\zeta = G(z)$  在  $z_0$  的导数  $d\zeta/dz$  不为零和无穷大

→ 
$$\zeta - \zeta_0 \sim (z - z_0) \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)_{z_0}$$

→ 
$$F(\zeta) \sim \frac{m - i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0) + C$$

点源和点涡变换后强度不变



# 保角变换8

## 保角变换中的偶极子

$z_0$  点有偶极子，强度为  $\mu$ ，当  $z \rightarrow z_0$  时

→  $F(z) \sim \frac{\mu e^{i\alpha}}{(z - z_0)}$       由  $\zeta - \zeta_0 \sim (z - z_0) \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)_{z_0}$

→  $F(\zeta) \sim \frac{\mu e^{i\alpha}}{(\zeta - \zeta_0)} \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)_{z_0}$       偶极子经保角变换后，强度和方向都发生变化

- ④ 虽然组成偶极子的点源和点汇的强度不变，但它们之间的距离（线元）经变换后，长度和方向都发生了变化



# 保角变换9

沿封闭曲线的速度环量和穿过封闭曲线流出的  
体积流量

$$\Gamma_z + iQ_z = \oint_{C_z} \frac{dF}{dz} dz = \oint_{C_z} \frac{dF}{dz} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \oint_{C_z} \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \Gamma_\zeta + iQ_\zeta$$



$$\Gamma_z = \Gamma_\zeta, \quad Q_z = Q_\zeta$$

$\zeta$  平面上沿  $C_\zeta$  的速度环量和穿过  $C_\zeta$  的体积流量  
等于  $z$  平面相应曲线  $C_z$  上的相应值



# 保角变换10

## 应用保角变换方法的基本思想

- ① 把  $z$  平面 (物理平面) 上比较复杂的外形变换成  $\zeta$  平面 (映射平面) 上简单的外形, 如圆或无穷长平板
- ② 通过解析变换建立物理平面和映射平面上的对应的流动关系, 其中最主要的关系是

$$F(z) = F[g(\zeta)] = F(\zeta)$$

- ③ 对于映射平面上相应的流动问题寻求复位势, 通过反变换可求得物理平面的复位势



# 保角变换例题1

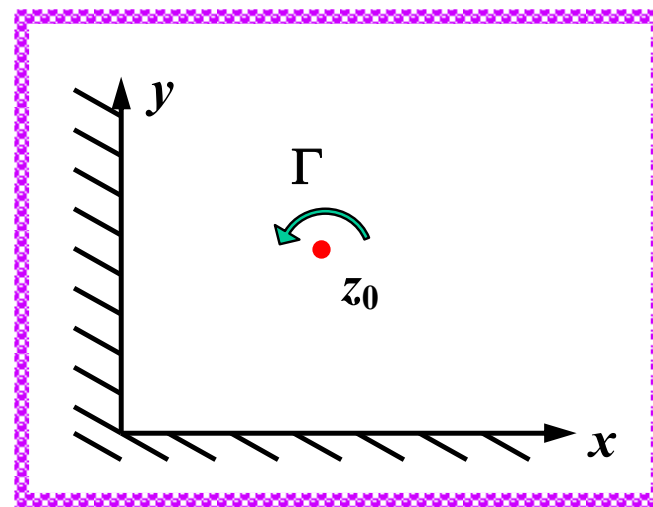
例：求图示点涡在角形域内产生的复位势和复速度

解 1：先放入虚轴

$$F_1(z) = f(z) + \bar{f}(-z)$$

$$= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(-z - \bar{z}_0)$$

$$= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z + \bar{z}_0) + C$$



再放入实轴  $\Rightarrow F(z) = F_1(z) + \bar{F}_1(z)$

$$= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z + \bar{z}_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z + z_0) + C$$

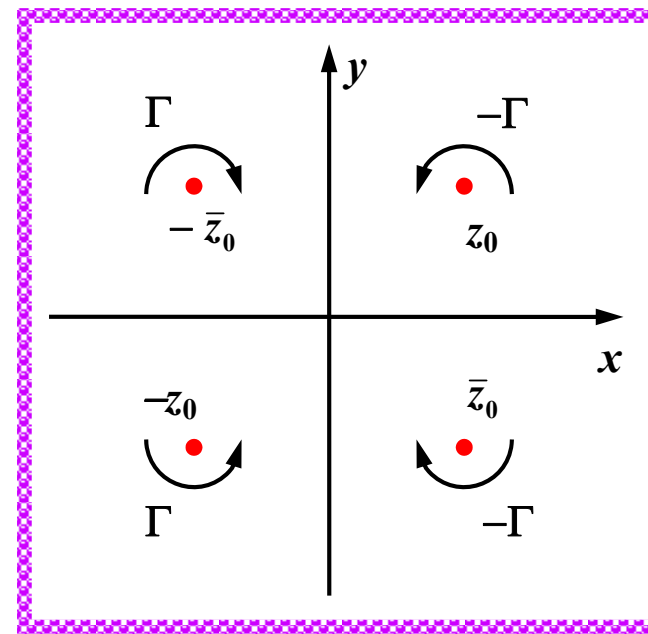




# 保角变换例题2

$$\longrightarrow F(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z + \bar{z}_0)(z - \bar{z}_0)}{(z - z_0)(z + z_0)} + C = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z^2 - \bar{z}_0^2}{z^2 - z_0^2} + C$$

相当于在  $z_0$  关于实轴和虚轴的镜像点  $\bar{z}_0$ ,  $-z_0$ ,  $-\bar{z}_0$  各添加一个点涡，点涡强度不变，方向有变化



解2：取变换  $\zeta = z^2$

$$z = Re^{i\theta} \longrightarrow \zeta = R^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\nu}$$

正实轴  $\theta = 0 \longrightarrow \nu = 0$  仍为正实轴

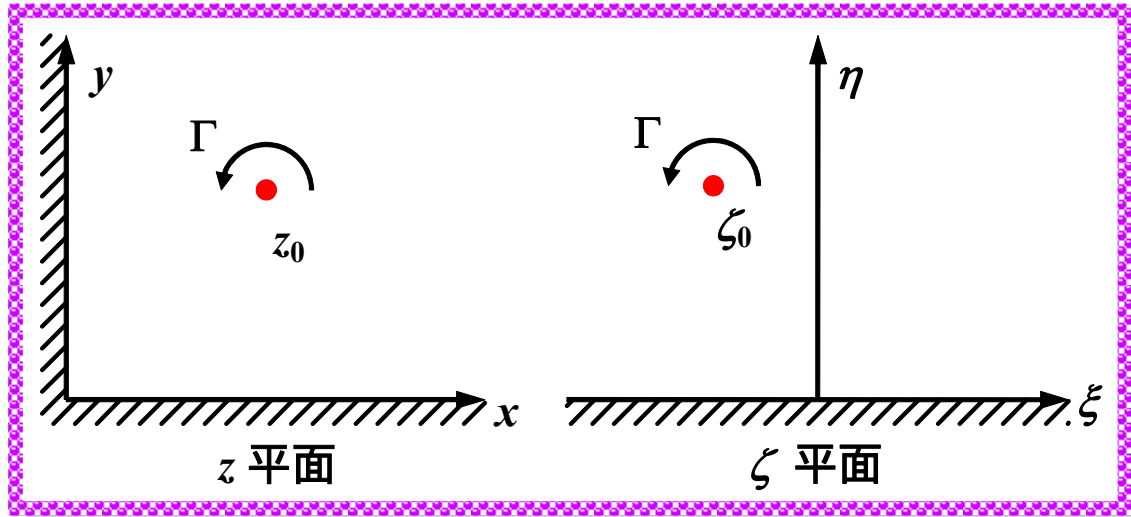
虚轴  $\theta = \pi/2 \longrightarrow \nu = \pi$  变为负实轴



# 保角变换例题3

奇点  $\zeta_0 = z_0^2$

$z$  平面内的角形域  
变换为  $\zeta$  平面的  
上半平面



$F(\zeta) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \bar{\zeta}_0)$

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z^2 - z_0^2) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z^2 - \bar{z}_0^2) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left( \frac{z^2 - \bar{z}_0^2}{z^2 - z_0^2} \right)$$

由

$$\bar{z}_0^2 = \overline{(x_0 + iy_0)^2} = \overline{x_0^2 - y_0^2 + 2ix_0y_0} = x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0y_0$$

$$\bar{\bar{z}_0^2} = \overline{(x_0 - iy_0)^2} = x_0^2 - y_0^2 - 2ix_0y_0 \quad \text{与解 1 同}$$



# 4.8 茹科夫斯基变换

## 茹科夫斯基变换

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$$

$c$  是正实数

$$|\zeta| \rightarrow \infty$$



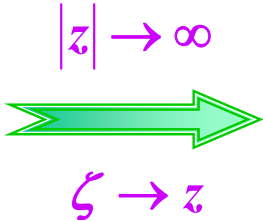
$$z \rightarrow \zeta$$

在无穷远处茹柯夫斯基变换是恒等变换

在无穷远处物理平面和映射平面上的复速度相同，速度的大小和幅角都相等

## 反变换

$$\zeta = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - c^2}$$



$$\zeta = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - c^2}$$



# 茹科夫斯基变换2

## 保角变换失效点

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \implies \frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{c^2}{\zeta^2}$$

当  $\zeta \rightarrow 0$   $\implies$   $\frac{dz}{d\zeta} \rightarrow \infty$   $\implies$   $\zeta = 0$  是奇点

④ 该点通常位于物体内部，对研究物体外流动无影响

当  $\zeta = \pm c$   $\implies$   $\frac{dz}{d\zeta} = 0$

④ 茹科夫斯基变换在  $\zeta = c$  和  $\zeta = -c$  不保角



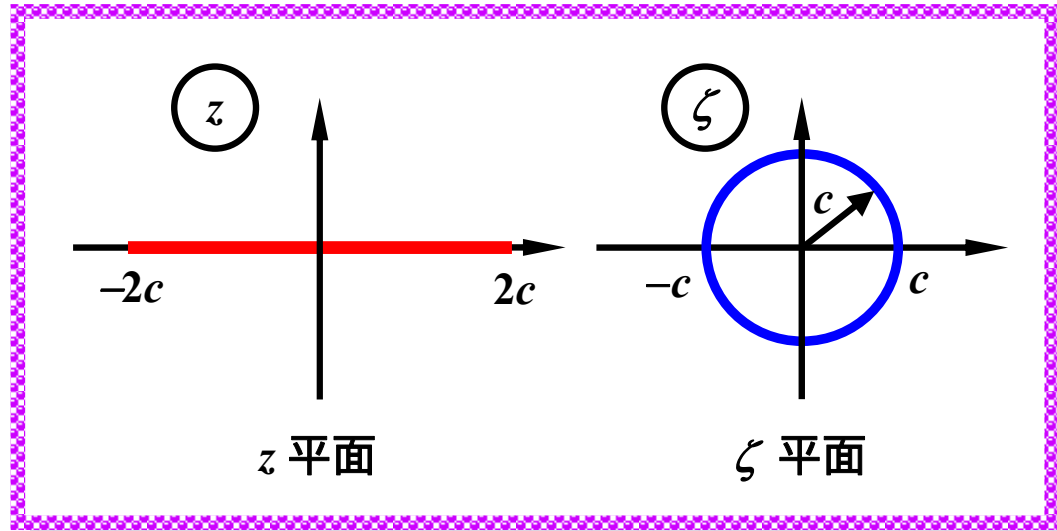
# 茹科夫斯基变换3

## 圆变线段

$$\zeta = ce^{i\nu}$$

$$z = ce^{i\nu} + ce^{-i\nu} = 2c \cos \nu$$

$$\rightarrow x = 2c \cos \nu, \quad y = 0$$



②  $\zeta$  平面内的圆变为了  $z$  平面内的一条线段

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$$

👉 在  $\zeta = \pm c$  保角性被破坏

👉 圆外点  $\zeta_0$  和圆内点  $c^2/\zeta_0$  对应于  $z$  平面同一点，变换是双值的。实际流动中圆内区域在物体内部，对研究物体外流场不造成理论上的困难

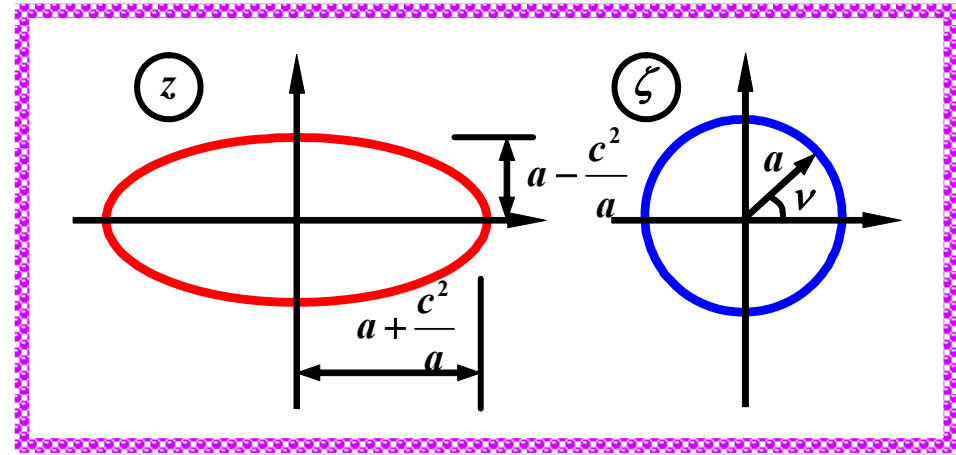
# 4.8.1 椭圆绕流

## 椭圆绕流

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$$

## 圆变椭圆

$$\zeta = ae^{iv} \quad a > c$$



$$\Rightarrow z = ae^{iv} + \frac{c^2}{a}e^{-iv} = \left(a + \frac{c^2}{a}\right)\cos v + i\left(a - \frac{c^2}{a}\right)\sin v$$

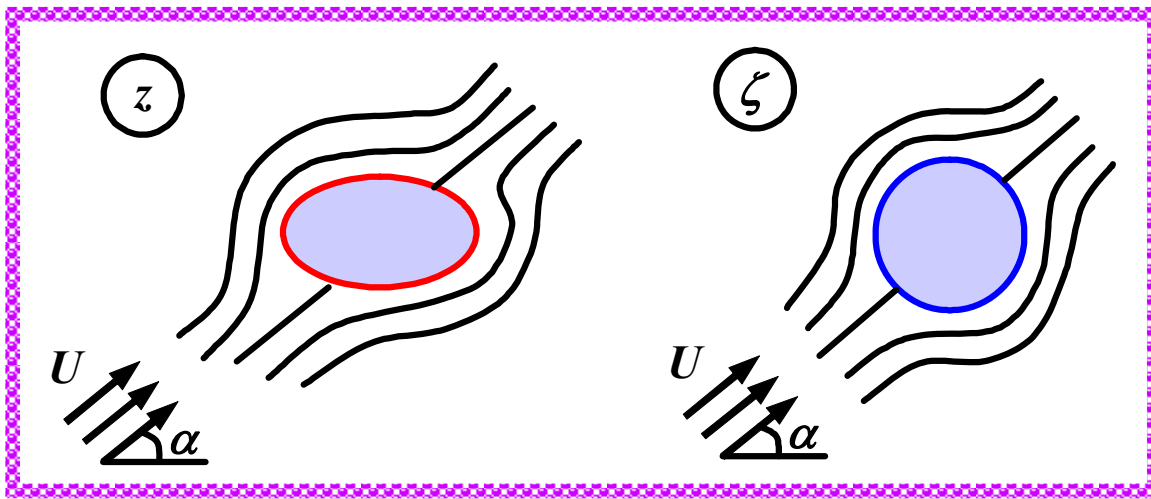
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \left(a + \frac{c^2}{a}\right)\cos v \\ y = \left(a - \frac{c^2}{a}\right)\sin v \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a + \frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2} = 1$$

椭圆长轴沿  $x$  轴，长半轴  $a + \frac{c^2}{a}$ ；短轴沿  $y$  轴，短半轴  $a - \frac{c^2}{a}$



# 椭圆绕流2


## 椭圆绕流复位势



无穷远处茹科夫斯基变换为恒等变换

设  $z$  平面内均匀来流速度为  $U$ ，攻角为  $\alpha$  

$\zeta$  平面内无穷远处的相应速度也为  $U$ ，攻角也为  $\alpha$

④  $\zeta$  平面圆柱绕流复位势   $F(\zeta) = U \left( \zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right)$



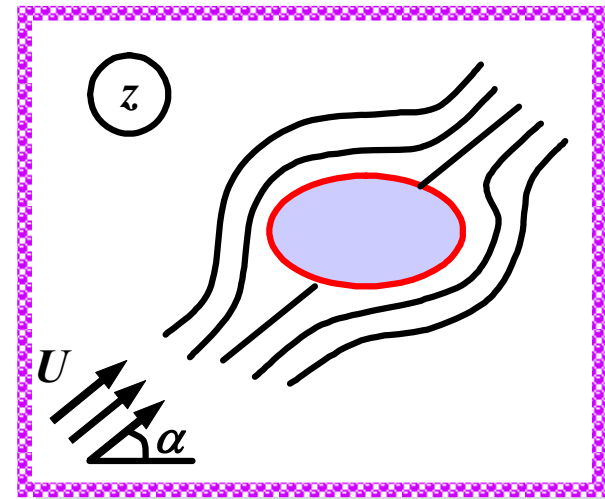
# 椭圆绕流3

$$F(z) = U \left[ \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - c^2} \right] e^{-i\alpha} + \frac{Ua^2 e^{i\alpha}}{\left[ \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - c^2} \right]}$$

$$F(\zeta) = U \left( \zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right)$$

$$= U \left\{ z e^{-i\alpha} + \left( \frac{a^2}{c^2} e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \right) \left[ \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - c^2} \right] \right\}$$

- ① 第一部分为均匀来流复位势
- ② 第二部分为为椭圆引起的扰动流动的复位势，在物面附近时影响显著  
当  $z \rightarrow \infty$  时趋于零





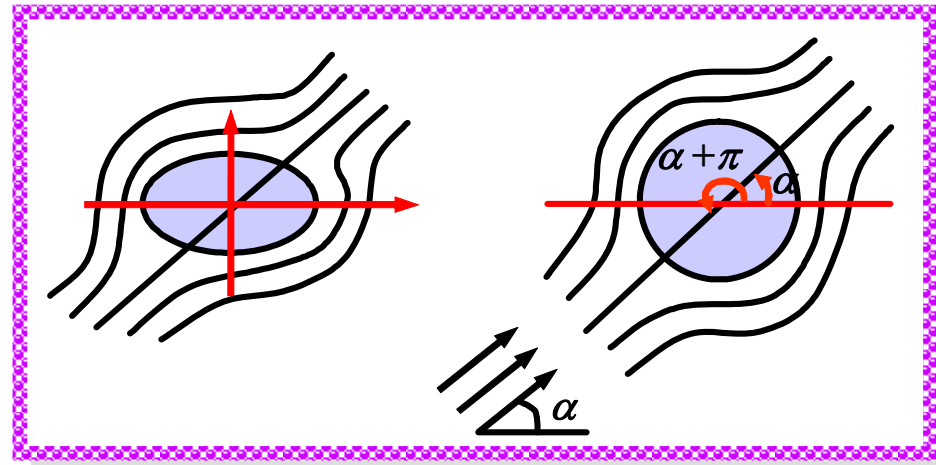


# 椭圆绕流4

## ① $\zeta$ 平面圆柱绕流的驻点

$$\zeta = ae^{i\alpha} \quad \zeta = ae^{i(\alpha+\pi)}$$

➡  $\zeta = \pm ae^{i\alpha}$



## ② $z$ 平面椭圆绕流的驻点



$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$$

$$z = \pm ae^{i\alpha} \pm \frac{c^2}{a} e^{-i\alpha} = \pm \left( a + \frac{c^2}{a} \right) \cos \alpha \pm i \left( a - \frac{c^2}{a} \right) \sin \alpha$$



$$x = \pm \left( a + \frac{c^2}{a} \right) \cos \alpha, \quad y = \pm i \left( a - \frac{c^2}{a} \right) \sin \alpha$$



# 椭圆绕流5

## 茹科夫斯基变换求解柱体绕流复位势的思路

- ① 将  $z$  平面柱体剖面变换为  $\zeta$  平面的圆，物体外区域即为圆外区域



$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$$

- ② 根据无穷远处  $\zeta$  平面均匀来流速度与攻角与  $z$  平面相同，写出  $\zeta$  平面柱体绕流复位势
- ③ 利用反变换得到  $z$  平面柱体绕流复位势

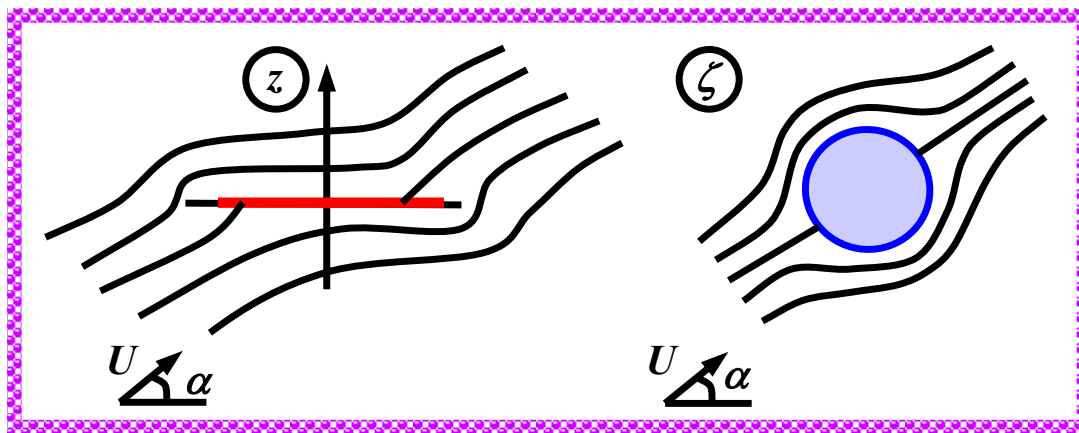
$$\zeta = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - c^2}$$

## 4.8.2 平板绕流和库塔条件

### 圆变平板

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$$

$$c = a$$



①  $\zeta$  平面的圆  $\zeta = ae^{iv}$   $\longrightarrow$   $z$  平面的线段  $-2a \leq x \leq 2a$

②  $z$  平面平板绕流可转换为  $\zeta$  平面的圆柱绕流

驻点



$$x = \pm 2a \cos \alpha$$

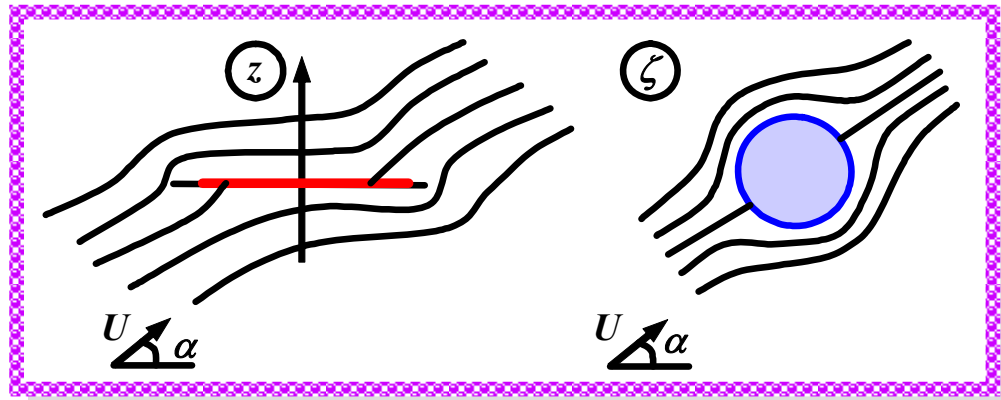
③ 在平板的前缘和后缘，将会出现大于  $\pi$  角的绕流



# 平板绕流和库塔条件2

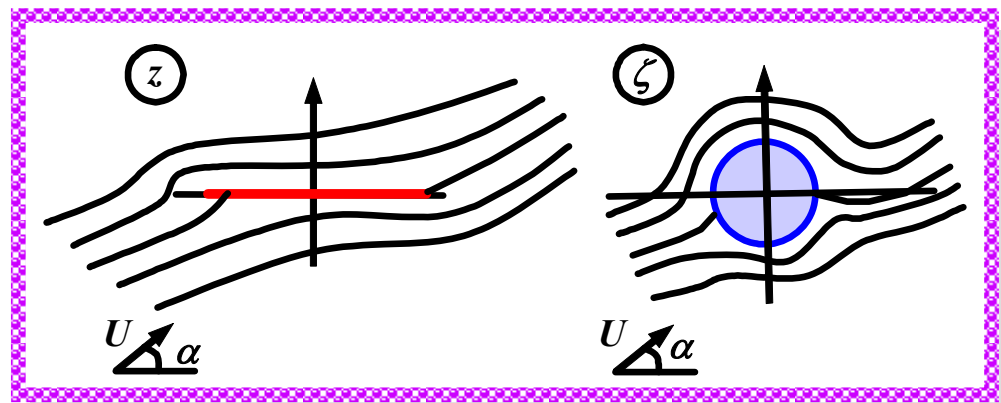
## 库塔条件

① 流体绕过平板的前后缘时速度无穷大，压强负无穷大，这在物理上是不可能的



② 实际机翼的前沿设计为有限厚度，后沿通常是尖的，可能出现大于  $\pi$  角的绕流

③ 设想围绕机翼有一顺时针方向旋转的环量，环量大小正好把后驻点移至后沿，与尾缘点重合





# 平板绕流和库塔条件3

库塔  
条件



具有尖后沿的机翼在小攻角来流绕流条件下，流体会自动调整使后驻点与后尾缘尖角点重合

## ④ 机翼环量的确定

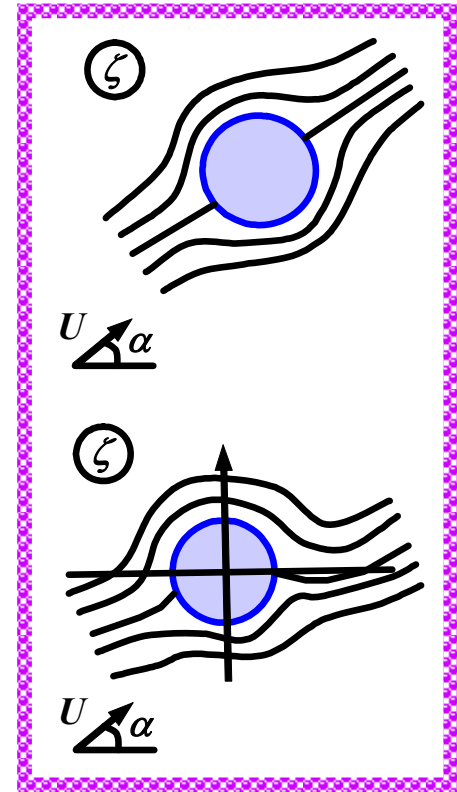
有环量圆柱绕流的驻点  $\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a U}$

$\zeta$  平面内后驻点沿顺时针方向转过  $\alpha$  角



$$\Gamma = 4\pi a U \sin \alpha$$

式中，计算的  $\Gamma$  沿顺时针方向





# 平板绕流和库塔条件4

## $z$ 平面绕流平板的复位势

④  $\zeta$  平面圆柱绕流复位势  $\longrightarrow F(\zeta) = U \left( \zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) + i2Ua \sin \alpha \ln \frac{\zeta}{a}$

代入  $\zeta = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - a^2}$

$\longrightarrow$

$$F(z) = U \left\{ \left[ \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - a^2} \right] e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z/2 + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - a^2}} + i2a \sin \alpha \ln \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - a^2} \right) \right] \right\}$$



# 平板绕流和库塔条件5

## 平板绕流升力

④ 库塔—茹科夫斯基定理  $\Rightarrow Y = \rho U \Gamma = 4\pi\rho U^2 a \sin \alpha$

④ 升力系数  $\Rightarrow c_l = \frac{Y}{\rho U^2 l/2} = 2\pi \sin \alpha$

上式中  $l = 4a$ ，为平板机翼弦长

④ 在小攻角条件下  $\sin \alpha \approx \alpha \Rightarrow c_l = 2\pi\alpha$

与实验测量结果吻合

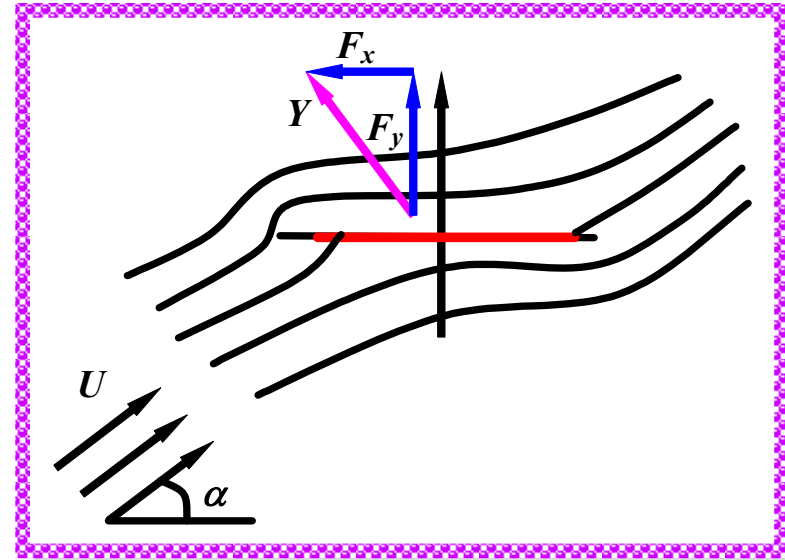


# 平板绕流和库塔条件6

升力  $Y$  是指垂直于来流方向的力，其沿  $x$  方向（平板方向）和  $y$  方向的分力为

$$F_x = -4\pi\rho U^2 a \sin^2 \alpha$$

$$F_y = 4\pi\rho U^2 a \sin \alpha \cos \alpha$$

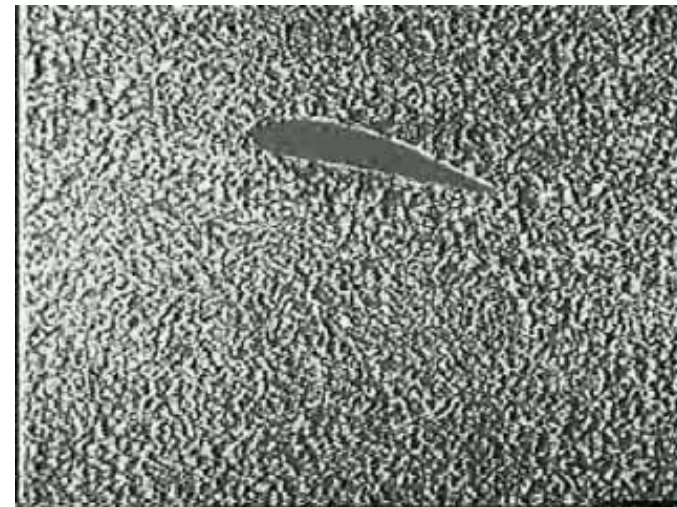
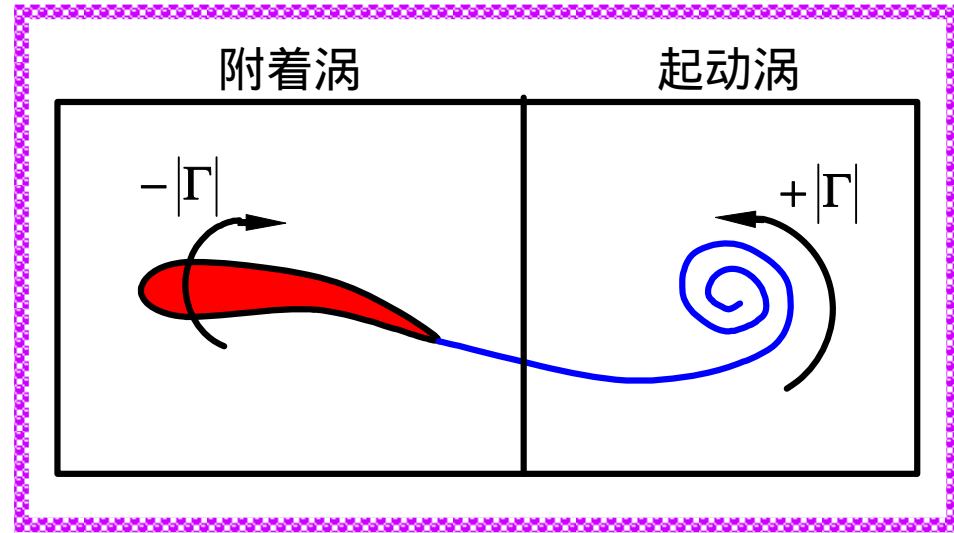
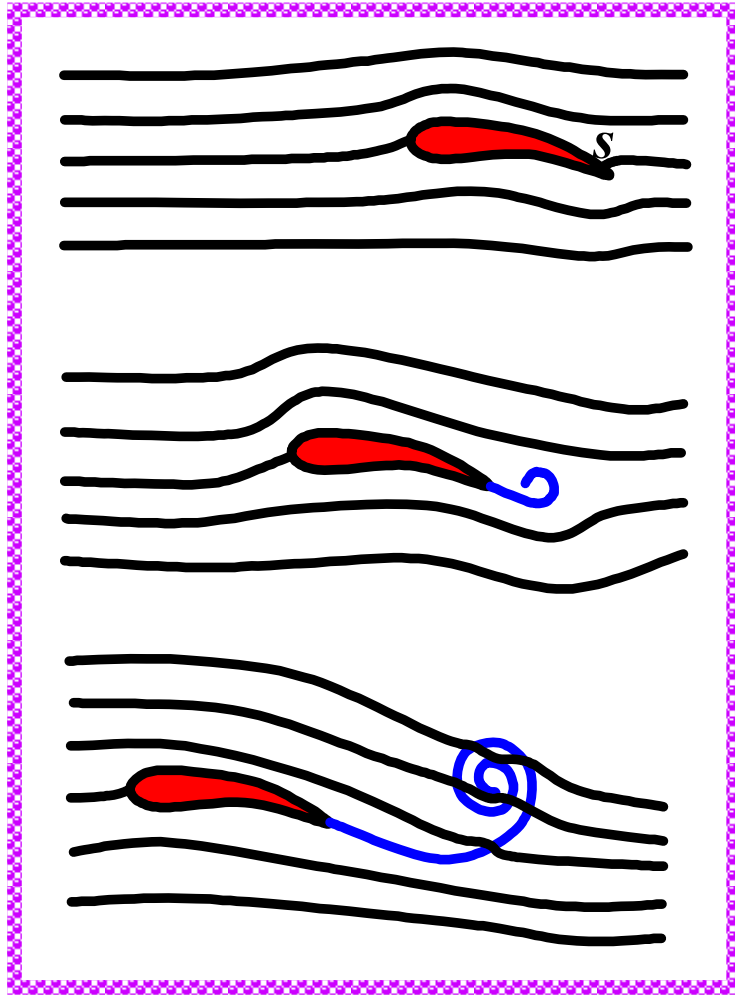


- 升力沿  $x$  方向的分力是负力，该力推动平板逆向前进，即不是阻力，而是“吸力”。这是由平板前缘速度无穷大，压力为负无穷大造成的





# 平板绕流和库塔条件7





# 4.9 茹科夫斯基翼型

## 对称翼型

$\zeta$  平面偏心圆，圆心在  $\zeta = -m$ ，圆半径为

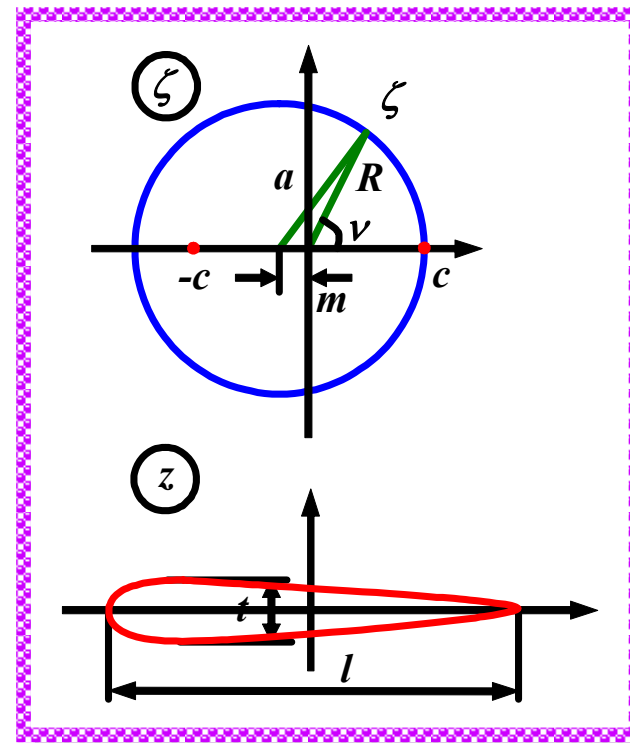
$$a = c + m = c(1 + \varepsilon) \quad m \text{ 为正实数}$$

$m = 0$  或  $\varepsilon = 0$

$z$  平面翼型将退化为实轴上的一条线段

$\varepsilon \ll 1$   $z$  平面将是很薄的翼型

④  $\varepsilon$  控制着  $z$  平面翼型的厚度





# 茹科夫斯基翼型2

## 几何尺寸的相互关系

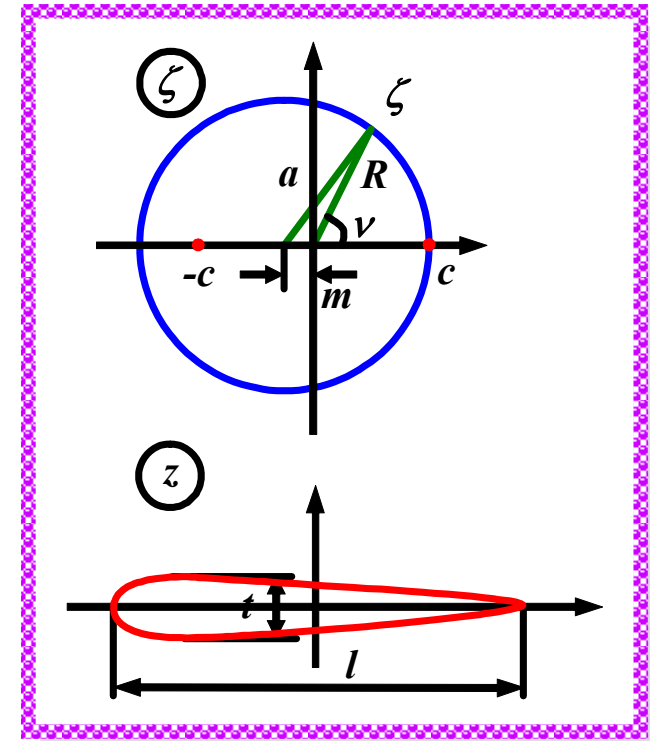
翼型弦长  $l$   $\Rightarrow$   $l = 4c$

翼型最大厚度  $t$

$\Rightarrow$   $\varepsilon = \frac{m}{c} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{t}{l} = 0.77 \frac{t}{l}$

$$a = \frac{l}{4} \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right)$$

翼型表面方程  $\Rightarrow$   $\frac{y}{t} = \pm 0.385 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) \sqrt{1 - \left( 2 \frac{x}{l} \right)^2}$





# 茹科夫斯基翼型3

## 满足库塔条件的速度环量

$$\Gamma = 4\pi a U \sin \alpha \quad a = \frac{l}{4} \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right)$$

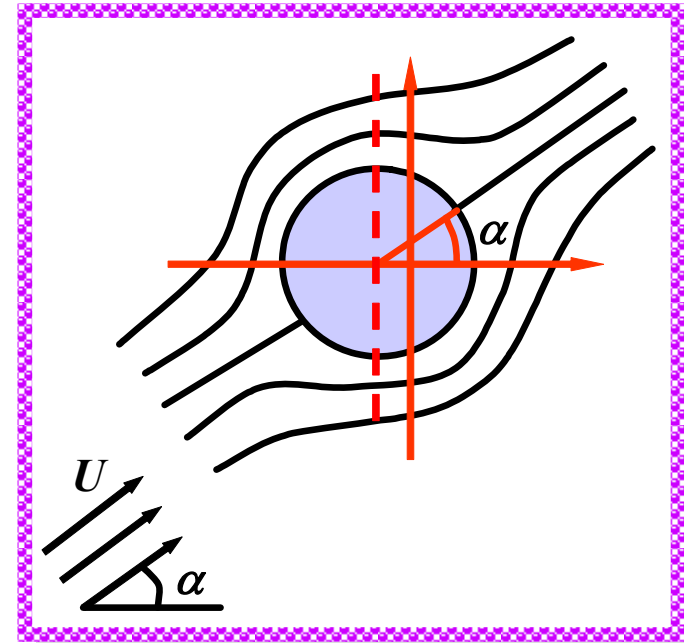


$$\Gamma = \pi U l \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right) \sin \alpha$$

## 升力

$$Y = \rho U \Gamma = \rho \pi U^2 l \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right) \sin \alpha$$

$$c_l = \frac{Y}{\rho U^2 l / 2} = 2\pi \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right) \sin \alpha$$



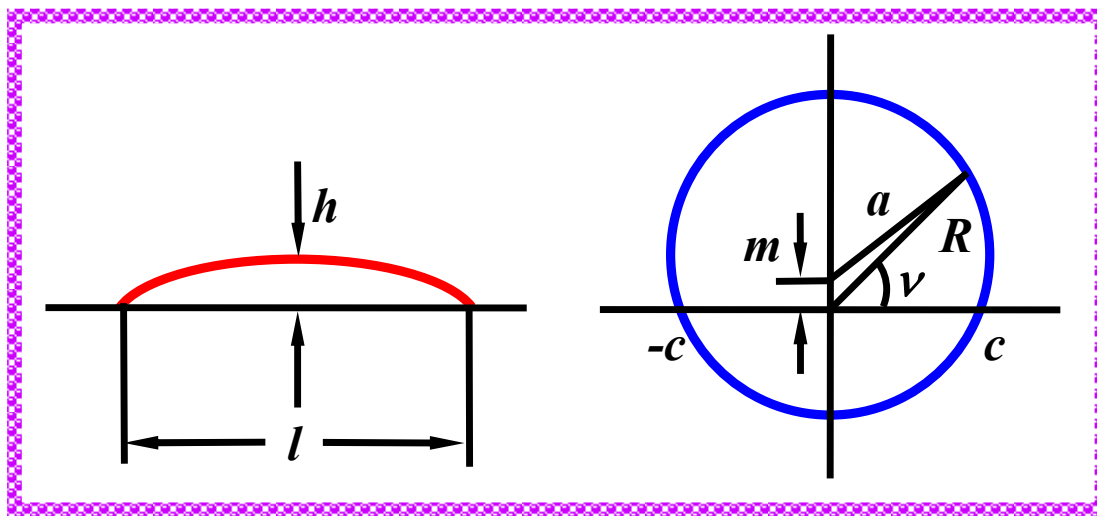
薄翼、小攻角时，升力与翼型厚度和来流对翼型的攻角成正比；攻角为零，升力为零



# 茹科夫斯基翼型4

## 圆弧翼型

$\zeta$  平面偏心圆，圆心在  $\zeta = im$ ，圆过  $c$  和  $-c$  点



① 翼型弦长  $l \longrightarrow l = 4c$

② 翼型最大弯度  $h \longrightarrow h = 2m$

③ 翼型表面方程  $\longrightarrow x^2 + \left(y + \frac{l^2}{8h}\right)^2 = \frac{l^2}{4} \left(1 + \frac{l^2}{16h^2}\right)$

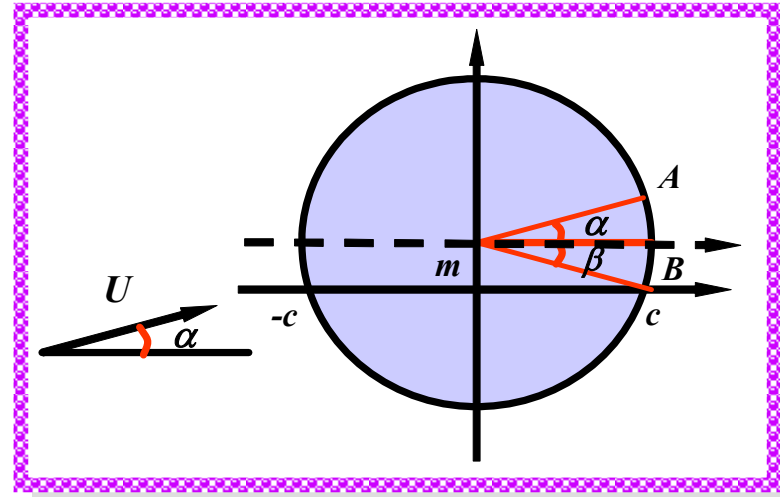


# 茹科夫斯基翼型5

## 满足库塔条件的速度环量

$\zeta$  平面驻点从 A 移动到 B, 转过角度为  $\alpha + \beta$

$$\Gamma = 4\pi a U \sin(\alpha + \beta)$$



弯度较小  $\implies \beta \approx \tan \beta = \frac{m}{c}$       $a = \sqrt{m^2 + c^2} \approx c$

$\implies \Gamma = 4\pi U c \sin\left(\alpha + \frac{m}{c}\right)$      且  $l = 4c$       $h = 2m$

$\implies$

$$\Gamma = \pi U l \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right)$$



# 茹科夫斯基翼型6

升力

$$\Gamma = \pi U l \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right)$$

根据库塔—茹科夫斯基定理

$$Y = \rho U \Gamma = \rho \pi U^2 l \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right)$$

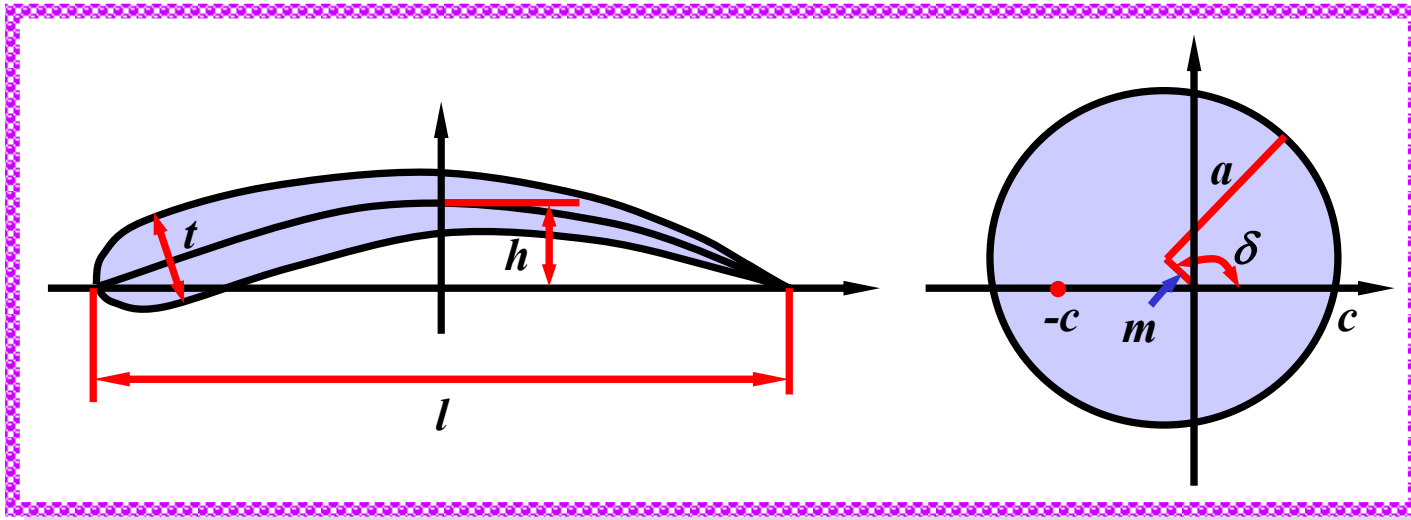
$$c_l = \frac{Y}{\rho U^2 l / 2} = 2\pi \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right)$$

- ✎ 机翼弯度的影响是增加升力
- ✎ 在有弯度的机翼绕流中，即使攻角为零仍有升力存在



# 茹科夫斯基翼型7

## 茹科夫斯基翼型



$\zeta$ 平面：偏心圆，负实轴方向偏移  $m\cos\delta$ ，正虚轴方向偏移  $m\sin\delta$

$z$ 平面：有厚度有弯度的翼型，最大厚度  $t$ ，最大弯度  $h$

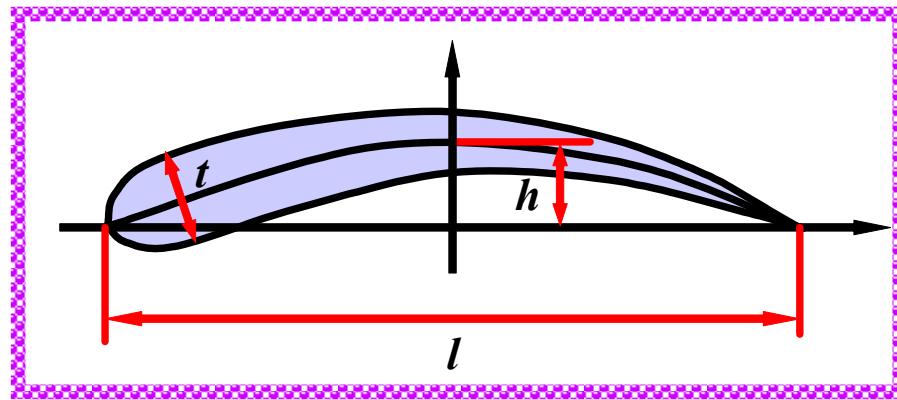




# 茹科夫斯基翼型8

## 翼型方程

偏心量  $m$  很小时，翼型方程可通过圆弧翼型与对称翼型方程的叠加获得



$$y = \sqrt{\frac{l^2}{4} \left( 1 + \frac{l^2}{16h^2} \right) - x^2} - \frac{l^2}{8h} \pm 0.385 \left( 1 - 2\frac{x}{l} \right) \sqrt{1 - \left( 2\frac{x}{l} \right)^2}$$

对称翼型

圆弧翼型

$$\frac{y}{t} = \pm 0.385 \left( 1 - 2\frac{x}{l} \right) \sqrt{1 - \left( 2\frac{x}{l} \right)^2} \quad x^2 + \left( y + \frac{l^2}{8h} \right)^2 = \frac{l^2}{4} \left( 1 + \frac{l^2}{16h^2} \right)$$



# 茹科夫斯基翼型9

满足库塔条件的速度环量

$$\Gamma = 4\pi U c \sin \alpha$$

对称翼型  $\Rightarrow \Gamma = 4\pi U c \left(1 + 0.77 \frac{t}{l}\right) \sin \alpha$

厚度  $t$  使环量增加了  $0.77 t/l$

圆弧翼型  $\Rightarrow \Gamma = 4\pi U c \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right)$

弯度  $h$  使来流有效攻角变为  $\alpha + \frac{2h}{l}$

综合考虑弯度和厚度影响，速度环量  $\searrow$

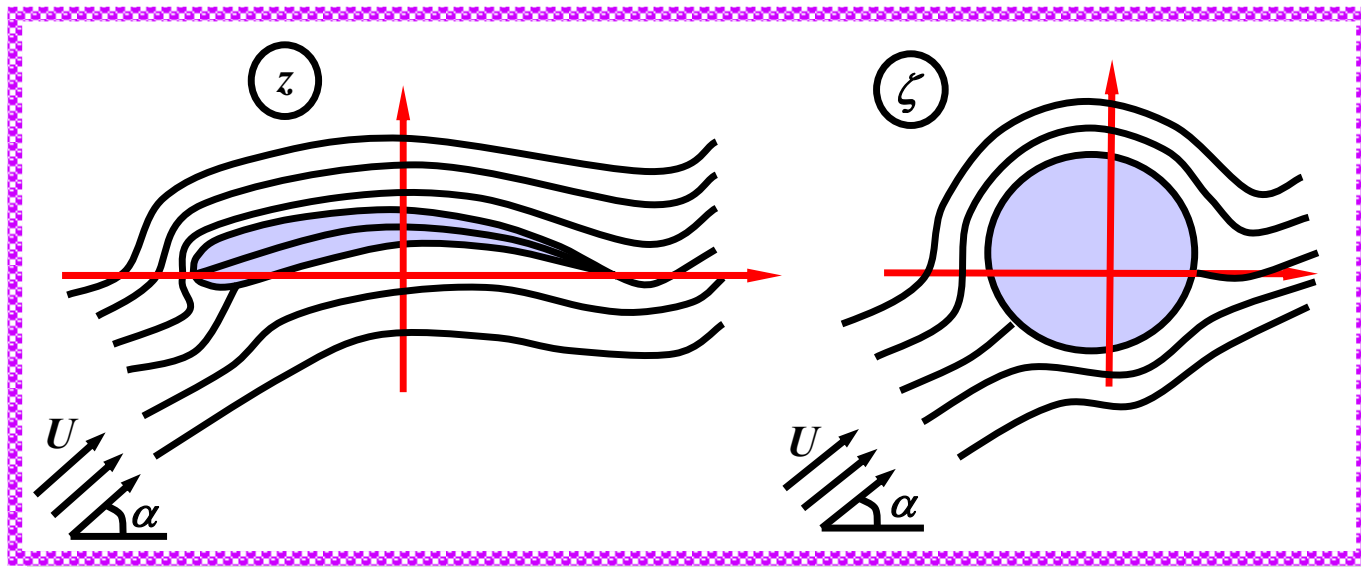
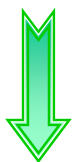
$$\Gamma = 4\pi U c \left(1 + 0.77 \frac{t}{l}\right) \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right) = \pi U l \left(1 + 0.77 \frac{t}{l}\right) \sin\left(\alpha + \frac{2h}{l}\right)$$



# 茹科夫斯基翼型10

升力

库塔—茹科夫斯基定理



$$Y = \rho \pi U^2 l \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right) \sin \left( \alpha + \frac{2h}{l} \right)$$

$$\Gamma = \pi U l \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right) \sin \left( \alpha + \frac{2h}{l} \right)$$

升力系数

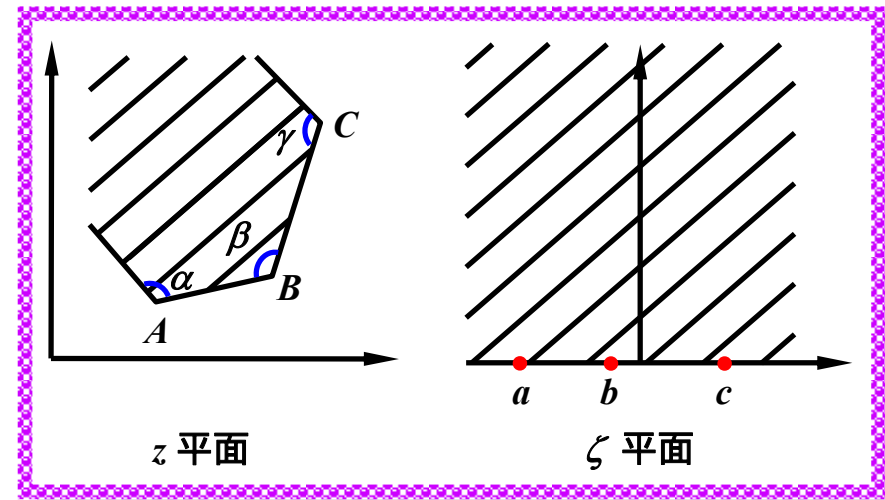


$$c_l = \frac{Y}{\rho U^2 l / 2} = 2\pi \left( 1 + 0.77 \frac{t}{l} \right) \sin \left( \alpha + \frac{2h}{l} \right)$$



# 4.10 施瓦兹-克里斯托弗尔变换

将多边形内部区域变换为  $\zeta$  平面的上半平面，多边形区域的边界变换为  $\zeta$  平面的实轴



**变换式**



$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} (\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} (\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi} - 1} \dots$$

⊙  $z$  平面内的多边形是封闭的，其内角和应满足

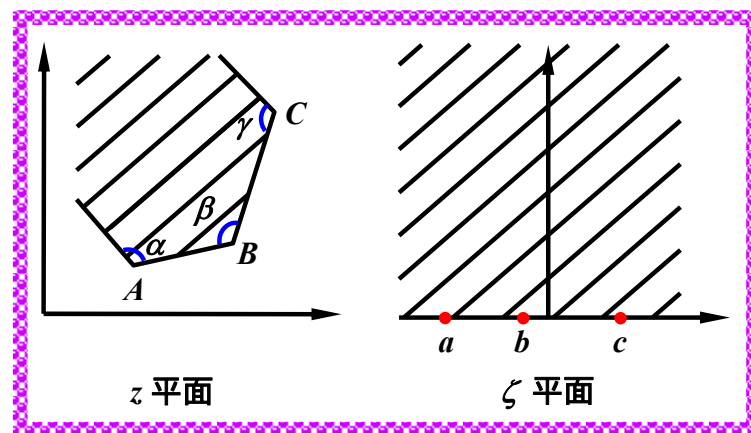
$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - 2)\pi \quad n \text{ 是多边形的顶点数}$$



# 施瓦兹-克里斯托弗尔变换2

## 求解具体问题时应注意

- ①  $A, B, C, \dots$  和  $a, b, c, \dots$  的对应排列顺序应符合边界与区域的对应关系，通常沿边界顺序行进时区域始终保持在边界左侧
- ②  $z$  平面两条平行线可看作在无穷远处相交，内角为 0
- ③ 解题过程中常将  $z$  平面某点映射到平面实轴上的无穷远点，此时式中对应用于该顶点的项自动消失
- ④ 式中共有  $n + 2$  个常数，常数  $a, b$  和  $c$  中的三个可以任选（通常取  $-1, 0, 1$ ），其余常数则由具体的边界对应条件和流动边界条件确定

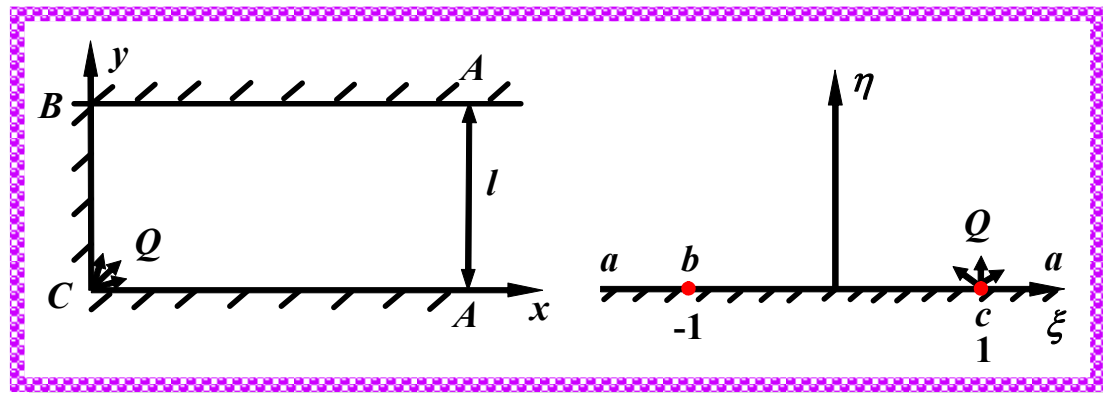




# 施瓦兹-克里斯托弗尔变换例题1

例：求图示宽为  $l$  的半无穷长渠道中流场的复位势，已知在渠道封闭端角点处有流量  $Q$  进入流场中

将半无穷长渠道边界  
变换为平面的实轴



$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta + 1)^{-1/2}(\zeta - 1)^{-1/2}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \dots$$

积分上式  $\Rightarrow z = k \operatorname{ch}^{-1} \zeta + D \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 1 \Rightarrow z = 0 \\ \zeta = -1 \Rightarrow z = il \end{cases}$

$\Rightarrow z = \frac{l}{\pi} \operatorname{ch}^{-1} \zeta \Rightarrow \zeta = \operatorname{ch} \frac{z\pi}{l}$



# 施瓦兹-克里斯托弗尔变换例题2

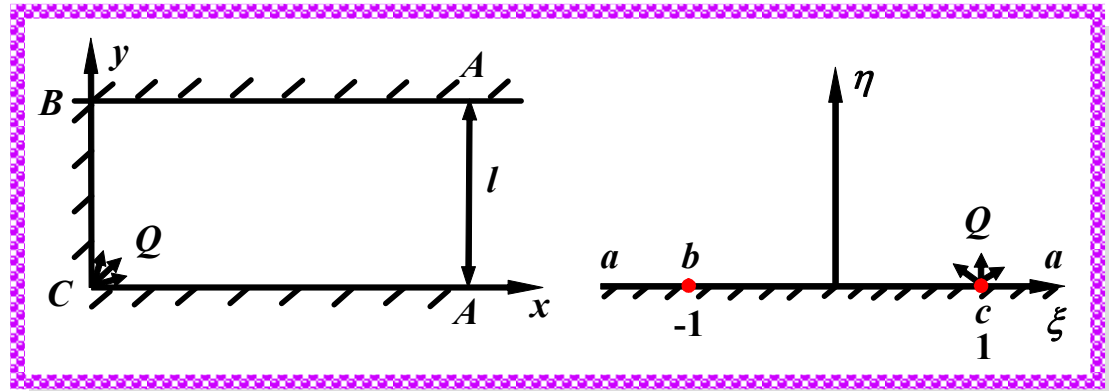
$z$  平面  $C$  点有流量  $Q$  进入流场



$$\zeta = \operatorname{ch} \frac{z\pi}{l}$$

$\zeta$  上半平面与  $C$  对应的  $c$  点也有流量  $Q$  进入流场

相当于在  $c$  点放置了一强度为  $2Q$  的点源，则  $\zeta$  平面点源复位势



$$F(\zeta) = \frac{2Q}{2\pi} \ln(\zeta - 1)$$

$z$  平面复位势



$$F(z) = \frac{Q}{\pi} \ln \left( \operatorname{ch} \frac{z\pi}{l} - 1 \right)$$



# 作业

**作业 : P.138 ~ 141**

@ 4.1 (1) (3)

@ 4.9

@ 4.4

@ 4.14 (1)

@ 4.7

@ 4.17

@ 4.8

@ 4.21