流体动力学基础概述1

流体动力学

流体运动的数学描述，微分形式控制方程，积分形式控制方程

- 基础知识

导数的概念、微分方程、牛顿第二定律、质量和能量守恒定律

第三章 流体动力学基础

流体运动的数学描述

流体运动中的几个基本概念

连续方程和微分形式的运动方程

伯努利方程及其应用

动量方程及其应用

3.1 描述流体运动的两种方法

拉格朗日方法—跟踪流体质点

描述每个流体质点自始至终的运动规律

- 设初始时刻某质点标记为（a, b, c），则该质点的物理量 η 可表示为

$$\eta = \eta(a, b, c, t)$$

其中 a, b, c, t 为拉格朗日变数

拉格朗日方法

- 任意时刻流体质点的位置矢量

$$\vec{r}=\vec{r}(a,b,c,t)$$

固定 abc，变化 t

某确定流体质点随时间的运动规律

- 任意时刻流体质点的速度和加速度

$$\begin{cases} \vec{v}=\dfrac{\partial \vec{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \\ \vec{a}=\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 \vec{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

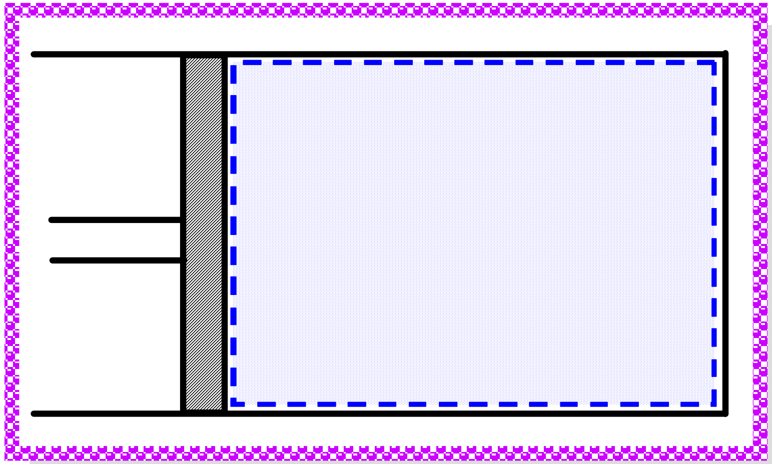
固定 t，变化 abc

同一时刻不同流体质点的参数分布

质点系（系统）

系统 → 某一确定流体质点的集合总体

- 与外界无质量交换
- 随流体质点的运动而运动
- 边界形状、包围空间大小随流体质点的运动而变化
- 拉格朗日方法下的概念



欧拉方法1

着眼于空间点

描述空间某点流体运动物理量随时间的变化规律及由一点转向另一点时该量的变化

- 空间点位置为 (x, y, z)，则物理量 η 的空间分布

$$\eta = \eta(x, y, z, t)$$

x, y, z, t 为欧拉变数

欧拉方法2

- 空间中的速度分布

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

固定 xyz，变化 t

某确定空间点参数随时间的变化规律

- 空间中的压强分布、温度分布

$$\begin{cases} p = p(x, y, z, t) \\ T = T(x, y, z, t) \end{cases}$$

固定 t，变化 xyz

同一时刻不同空间点的参数分布

场—分布着某种物理量的空间区域

描述流体运动的方法思考题1

下列流动适合用那一种方法描述

A、研究一污染物粒子在水中运动的轨迹

B、研究无数质点组成的质点群的运动

C、研究一流动空间的速度分布

描述流体运动的方法思考题2

某人坐在匀速运动的飞机上测量和记录周围各点空气的速度和压强，请问它采用的研究方法是

A、拉格朗日方法

B、欧拉方法

C、两者都不是

定常场与非定常场

流场中每一点的物理量都不随时间变化，称为定常场；否则，为非定常场

定常场数学描述

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

或

$$\eta = \eta(x, y, z)$$

均匀场与非均匀场

流场中各空间点上的物理量都一样，称为均匀场；否则，为非均匀场

均匀场数学描述

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial z}=0$$

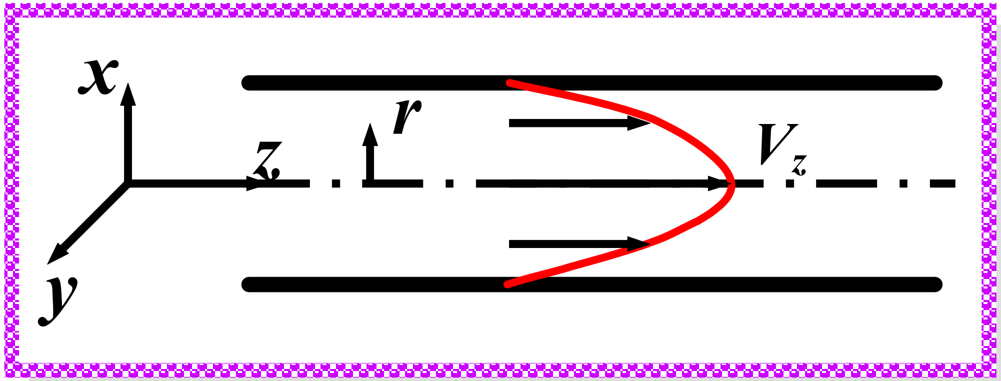
或

$$\eta=\eta(t)$$

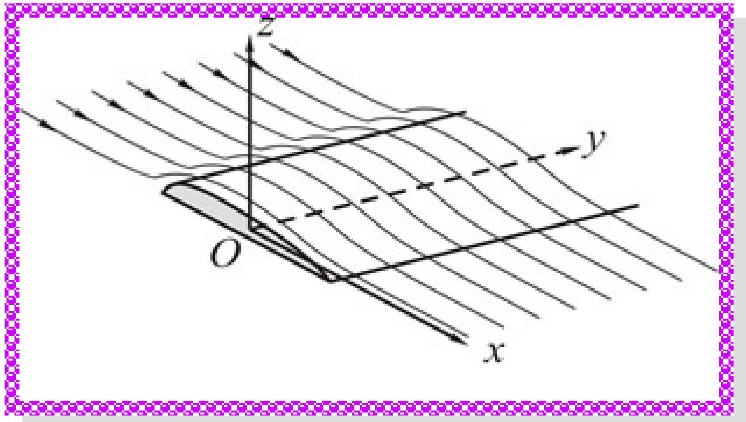
一维、二维、三维流动

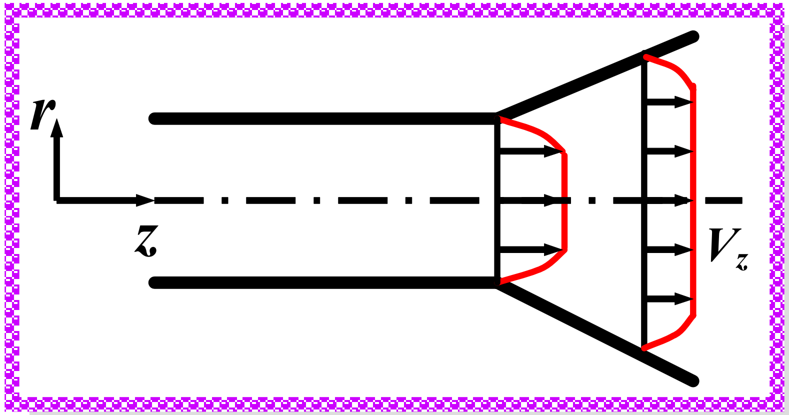
速度场为三个空间坐标的函数－三维流动，实际流动都是在三维空间中的流动

- 一维流动



- 二维流动





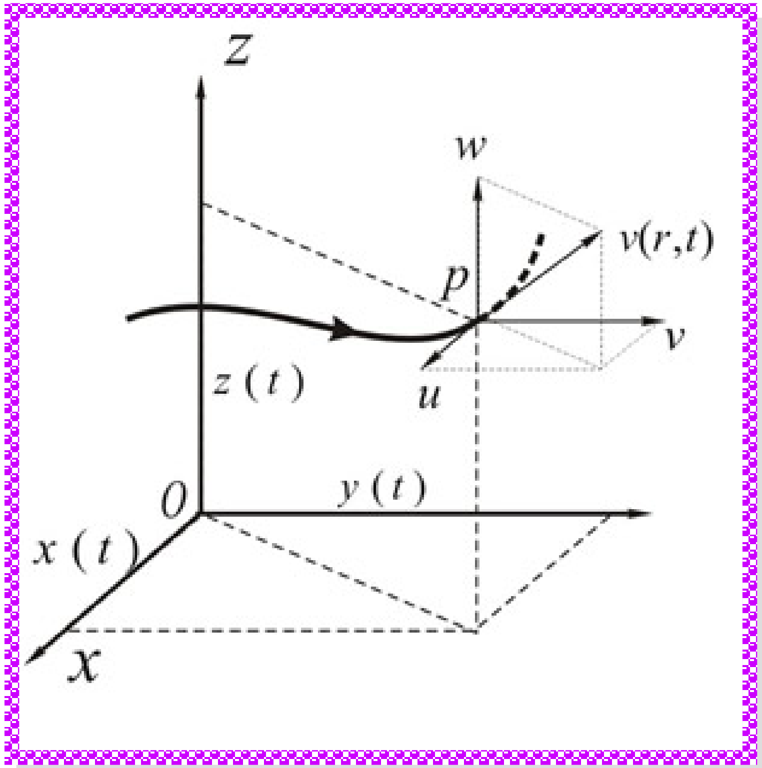
控制体

控制体 → 流场中某一确定的空间区域

- 与外界有质量交换
- 空间位置相对于某参照系不变
- 边界形状、包围空间大小一般是确定的
- 欧拉方法下的概念－CV，CS

欧拉方法描述流体质点的加速度

$$\frac{\partial\vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t}=?$$



t 时刻 ⇒ $\vec{v}(x,y,z,t)$

$t+\delta t$ 时刻 ⇒

$$\vec{v}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t)$$

欧拉法描述流体质点的加速度1

$$\vec{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{v}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) - \vec{v}(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

流体质点的加速度

流体质点的速度对时间的变化率

欧拉法描述流体质点的加速度2

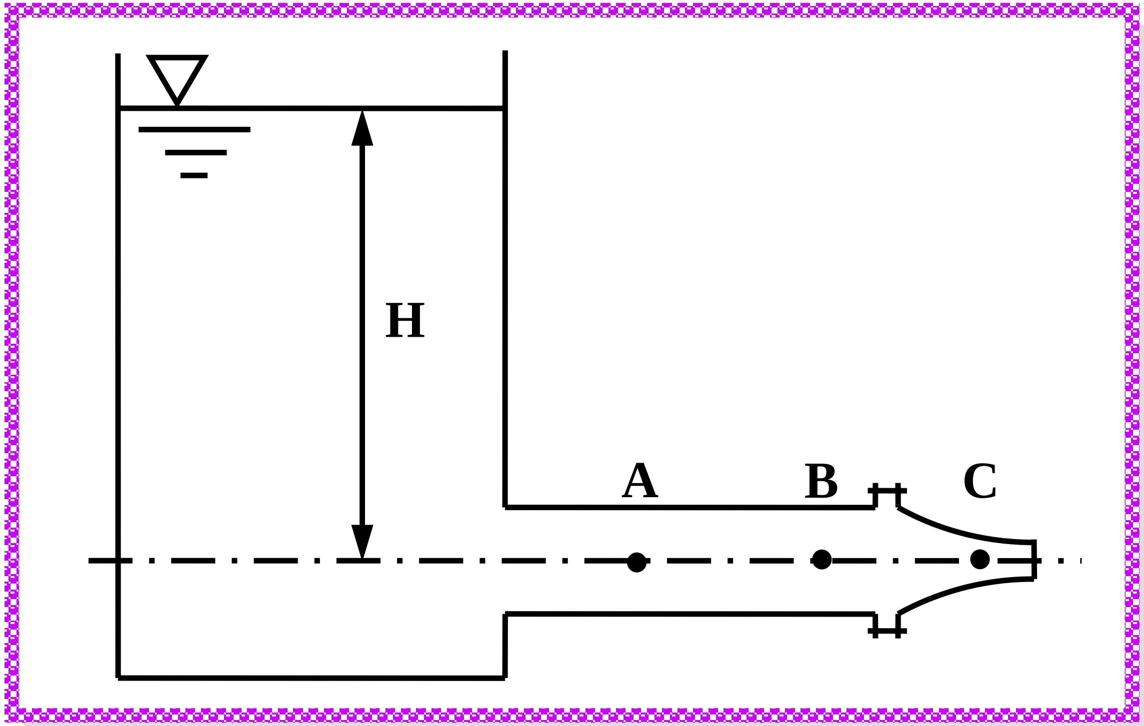
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$ → 空间点上的速度对时间的变化率由速度场的非定常性引起

当地加速度或局部加速度

$$v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$ → 由速度场的非均匀性引起

迁移加速度或对流加速度

欧拉法描述流体质点的加速度3



定常

A⇒B

匀速直线运动
无当地和对流
加速度

B⇒C

加速运动，存
在对流加速度

非定常

A⇒B 速度变化，存在当地加速度

B⇒C 速度变化，存在当地和对流加速度

物质导数1

任意物理量 N 的物质导数

$$\frac{DN}{Dt}=\frac{\partial N}{\partial t}+v_x\frac{\partial N}{\partial x}+v_y\frac{\partial N}{\partial y}+v_z\frac{\partial N}{\partial z}$$

$\frac{DN}{Dt}$ 流体质点的物理量 N 随时间的变化率

物质导数（质点导数或随体导数）

物质导数2

$$\frac{\partial N}{\partial t}$$

空间点上的 N 随时间的变化率，由物理量场的非定常性引起

局部导数或当地导数

$$v_x\frac{\partial N}{\partial x}+v_y\frac{\partial N}{\partial y}+v_z\frac{\partial N}{\partial z}$$

由物理量场的非均匀性引起的N的变化率

位变导数或对流导数

物质导数3—例题

例：已知速度场$v_x = 2xt$， $v_y = -2yt$，求流体质点的a_x，a_y。

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 2x + 4xt^2$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2y + 4yt^2$$

物质导数4

不可压缩流体的数学描述

流体质点的密度在运动过程中保持不变

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

均质不可压缩流体的数学描述

$$\rho=\text{const}$$

迹线 → 流体质点在空间运动时所描绘出来的轨迹

迹线方程

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{v_z(x,y,z,t)}=dt$$

- t 是自变量，x，y，z 都是 t 的函数

迹线

迹线的特点

- 流场中实际存在的线
- 同一质点，不同时刻空间位置的连线
- 和时间过程有关的曲线，随时间的增长迹线不断延长
- 拉格朗日方法下的概念

流线1

流线

某瞬时流场中一条假想曲线
该曲线上各点速度方向和曲线在该点切线方向重合

流线方程

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{v_z(x,y,z,t)}$$

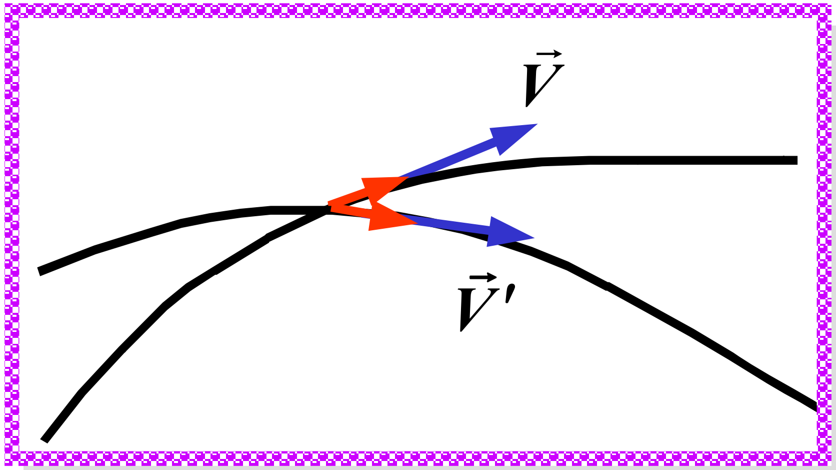
t 为常数，x，y，z 为自变量

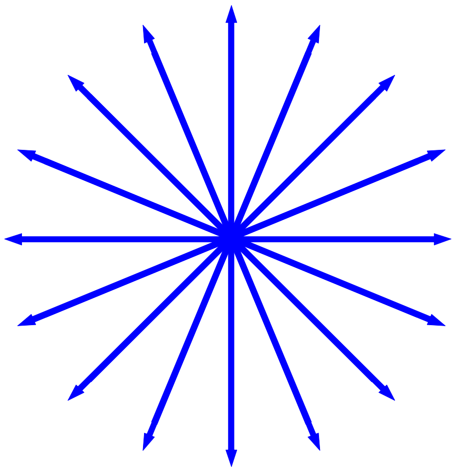
流线2

流线的特点

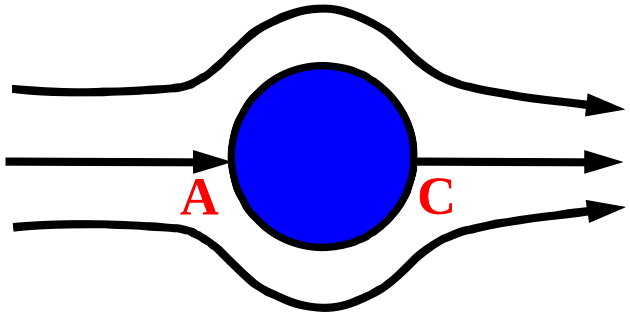
- 流场中某瞬时的假想曲线
- 不同质点，同一时刻空间位置的连线，描述线上各质点的运动方向
- 定常流动，流线形状位置不随时间改变
- 定常流动时，流线与迹线重合

- 一般情况下，流线不能相交和转折





奇点



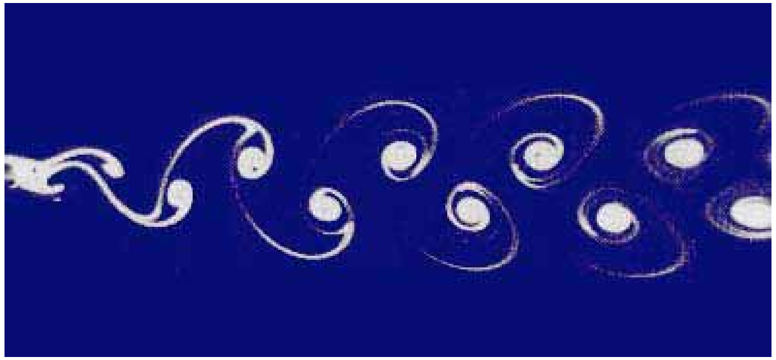
驻点

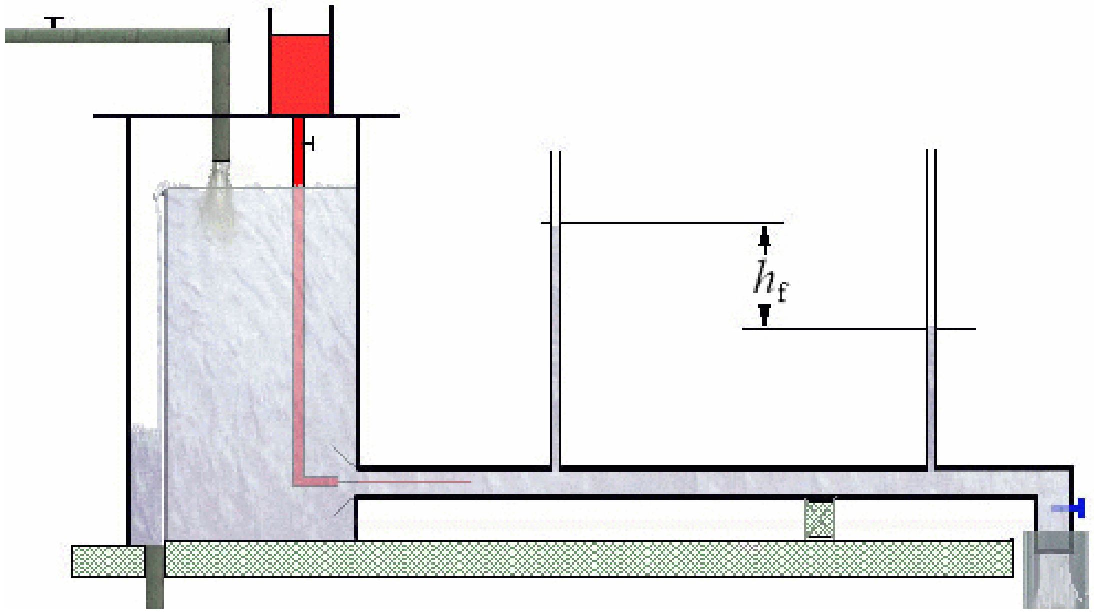
流线4

- 一般情况下，流线的走向和疏密反映了某瞬时流场内流体速度方向和大小：流线密的地方流速大
- 流线是欧拉方法下的概念

染色线 → 相继通过流场同一空间点的流体质点在同一瞬时的连线

- **流场显示技术，反映流场结构、流动特点**

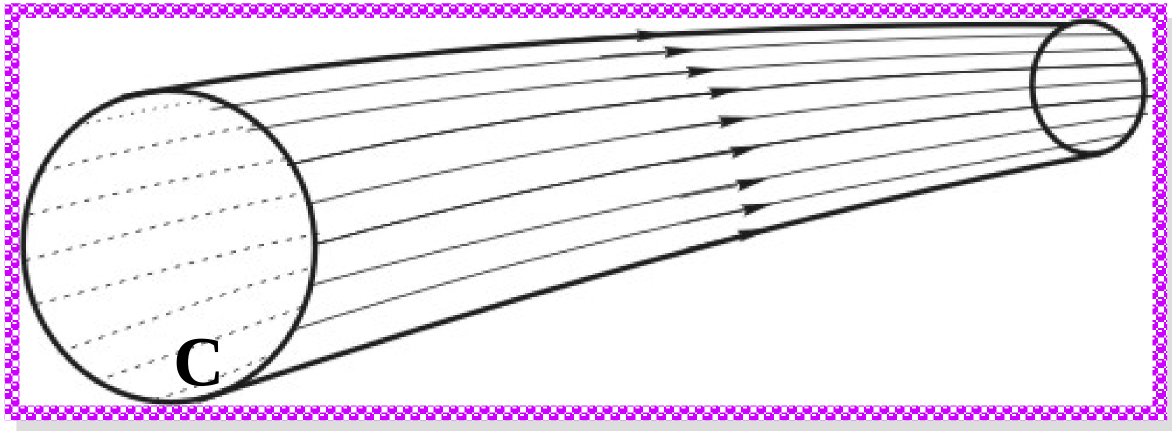




流管

在流场中做一封闭且不自相交的曲线 C，在某瞬时通过该曲线上的流线构成的管状表面称为流管

- 有限流管
- 流管元



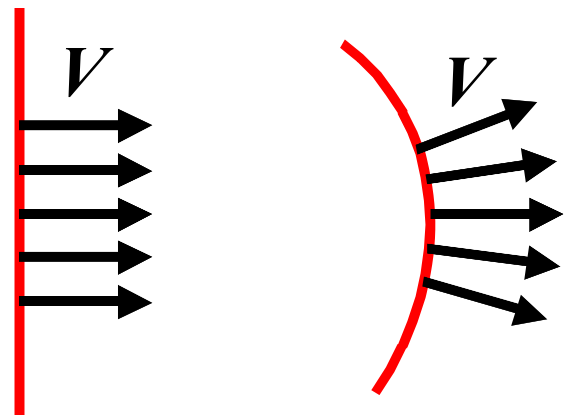
- 流体不能从侧壁穿入穿出定常流动时，流管形状不变，类似于固定管道

总流、过流断面

微小流束 → 微小流管内所有流线的总和

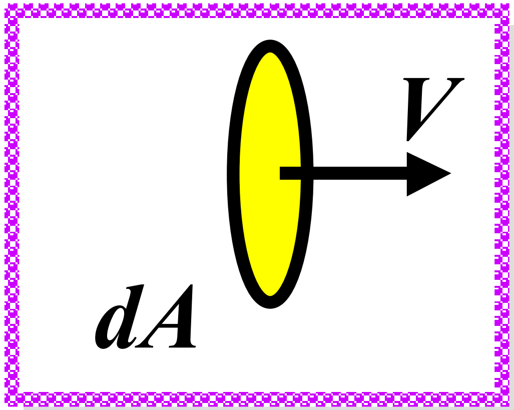
总流 → 流管内所有流线的总和

过流断面 → 与总流所有流线垂直的截面



质量流量 → 单位时间通过流管过流断面的流体质量

→ $$q_m = \int_A \rho v dA$$



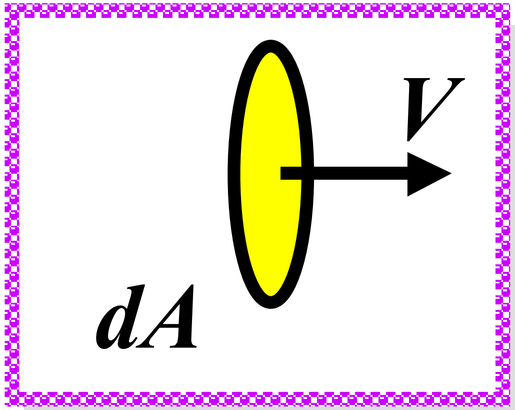
- 速度、密度在过流断面上均布

→ $$q_m = \rho v A$$

体积流量

体积流量 → 单位时间通过流管过流断面的流体体积

$$q_V = \int_A v dA$$



- 速度、密度在过流断面上均布

$$q_V = vA$$

平均速度

平均速度 → 假设过流断面上各点速度相等，通过的流量与实际流量相等

→ $$\bar{v} = \frac{\int_A v dA}{A}$$

- **以平均速度计算流量是准确的，但计算动量、动能等会引入误差，需要修正**

3.3 连续方程式

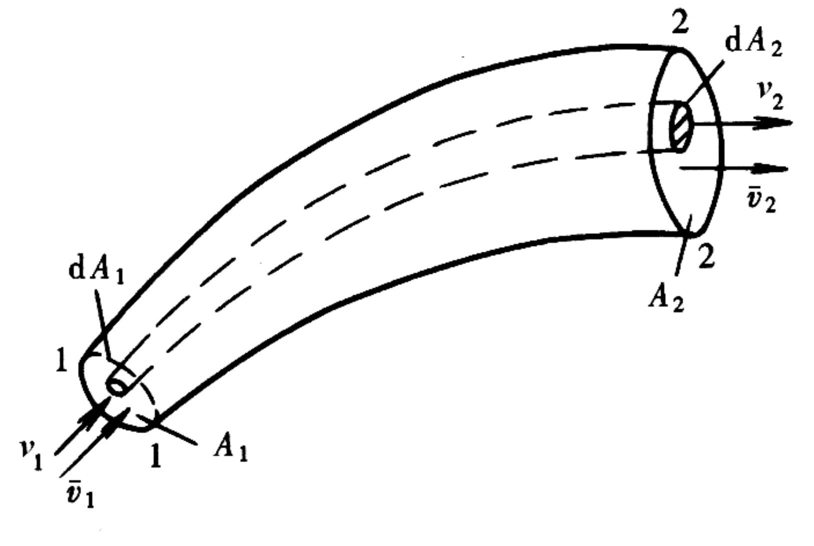
流体的连续性原理

拉格朗日观点 → 流体系统包含的质量在运动过程中始终保持不变

欧拉观点 → 净流出控制体的流体质量应等于控制体减少的流体质量

流量不变方程1

定常流质量守恒定律



单位时间由1-1流入dA_1的流体质量

$$dq_{m1} = \rho_1 v_1 dA_1$$

由2-2流出的流体质量

$$dq_{m2} = \rho_2 v_2 dA_2$$

根据质量守恒

$$\boxed{\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2}$$

流体密度、速度、过流断面面积之间的制约关系

流量不变方程2

不可压缩流体定常流连续方程

$$v_1 dA_1 = v_2 dA_2 \xrightarrow{\text{积分}} \bar{v}_1 A_1 = \bar{v}_2 A_2$$

$$q_V = \text{const}$$

流量沿程不变时，总流过流断面的面积与断面平均速度成反比

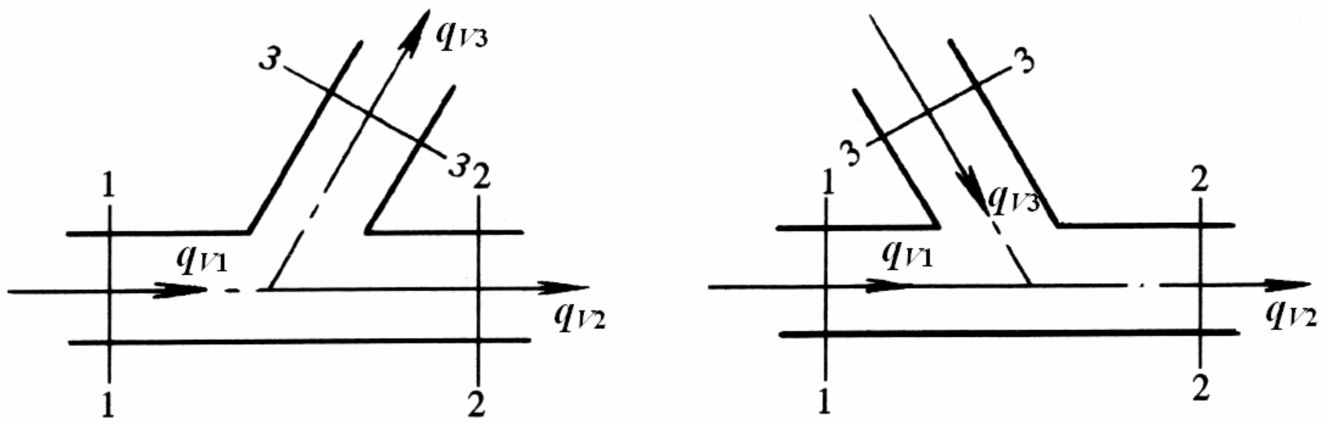
流量沿程改变时

- 有流体分出

$$q_{V1} = q_{V2} + q_{V3}$$

- 有流体汇入

$$q_{V1} + q_{V3} = q_{V2}$$



流量不变方程4

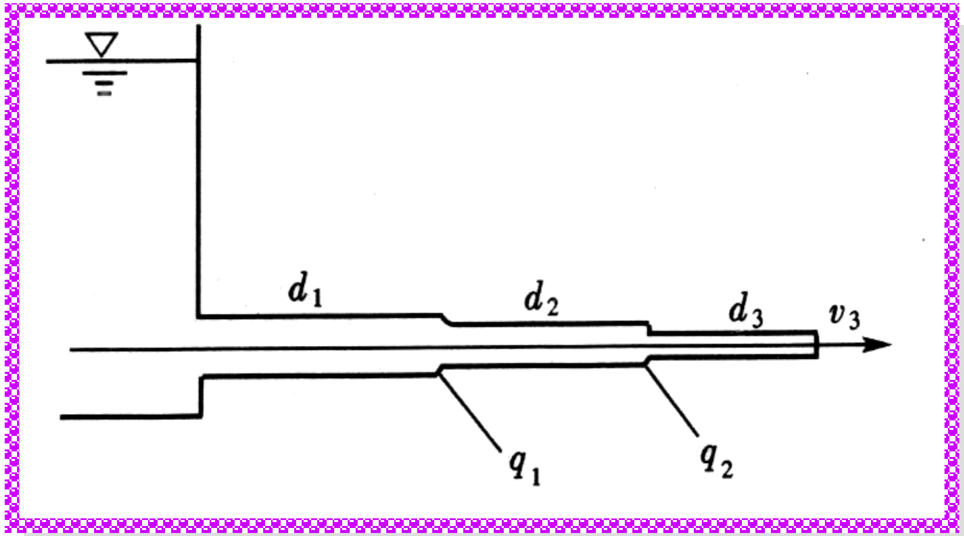
如图所示管路系统，各段管径为d_1 = 0.3m，d_2 = 0.2m，d_3 = 0.1m，若v_3 = 10m/s，求：(1)管路的流量和各管段的流速；(2)若节点处分出的流量q_1 = 50L/s，q_2 = 21.5L/s，则各段流量及流速为多少

解：(1) 管路的流量和各管段流速

节点处无流量分出

$$q_{V1} = q_{V2} = q_{V3}$$

$$= v_3 \frac{\pi d_3^2}{4} = 0.0785\text{m}^3/\text{s}$$



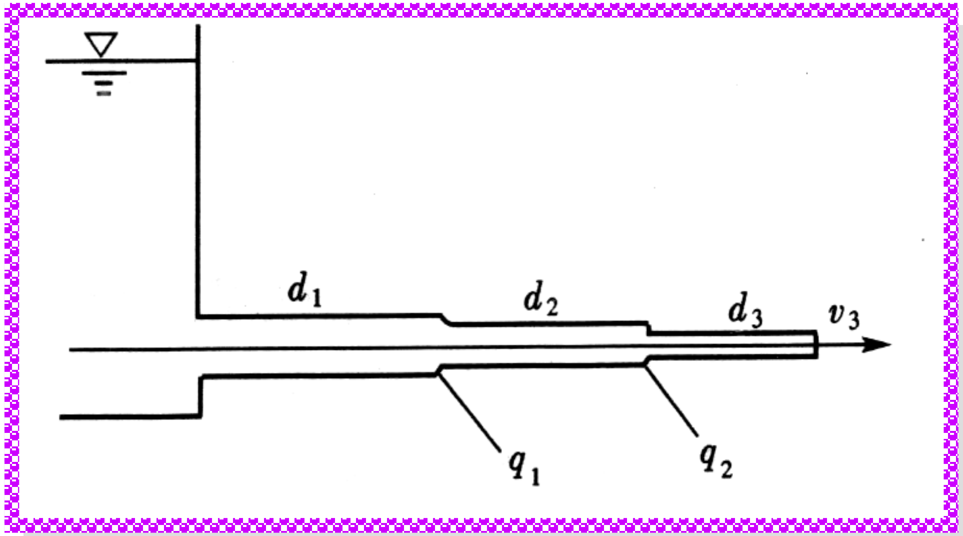
流量不变方程5

$$v_2 = v_3 A_3 / A_2 = 2.5\text{m/s}$$

$$v_1 = v_3 A_3 / A_1 = 1.11\text{m/s}$$

(2) 节点有流量分出时的流量及速度

节点处质量守恒



$$q_{V2} = q_{V3} + q_2$$

$$= 0.1\text{m}^3/\text{s}$$

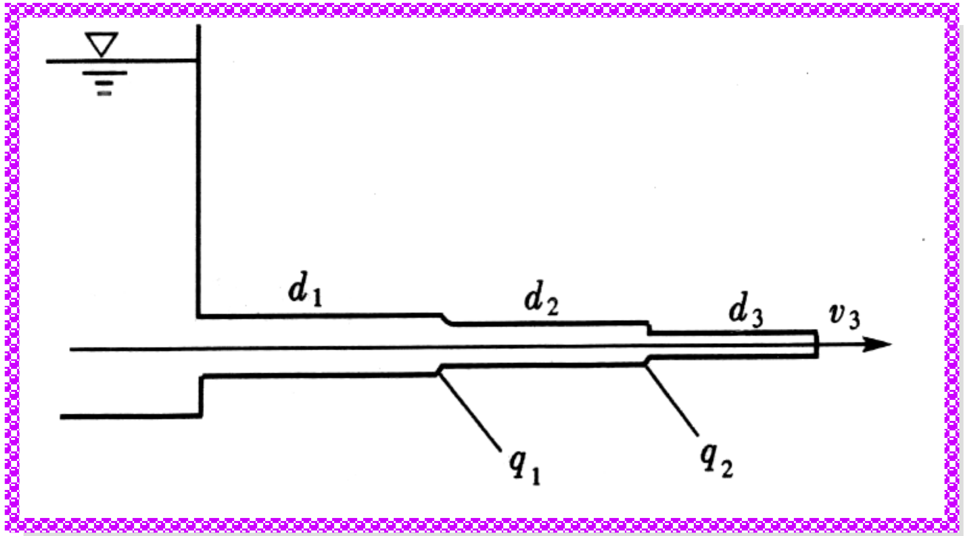
$$q_{V1} = q_{V2} + q_1$$

$$= 0.15\text{m}^3/\text{s}$$

流量不变方程6

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = 3.18\text{m/s}$$

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = 2.12\text{m/s}$$

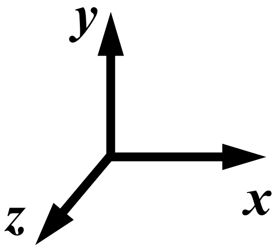


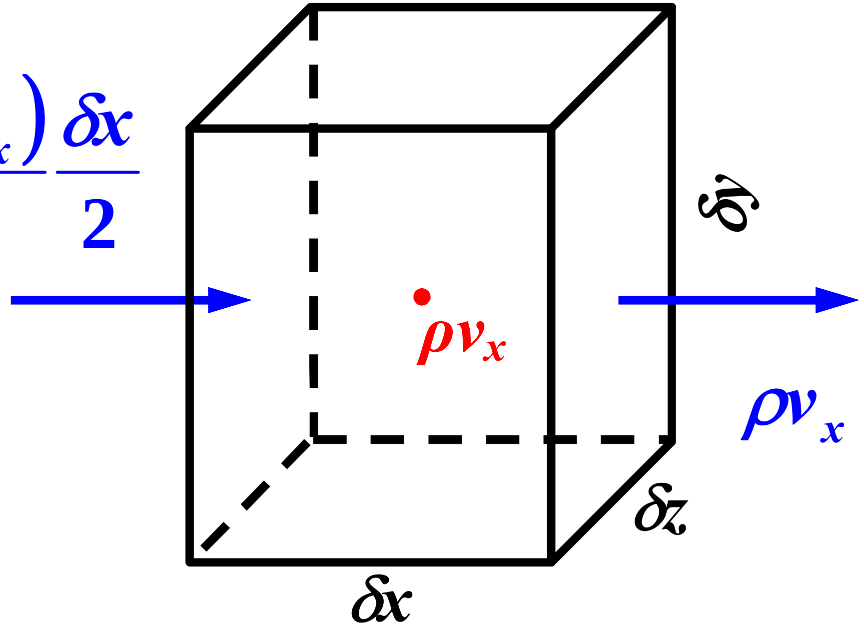
微分形式连续方程1

对微元控制体应用质量守恒定律

通过单位面积的质量流量

$$\rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$





$$\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

x 方向净流出控制体的质量流量 $\Rightarrow$ $$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

微分形式连续方程2

y、z 方向净流出控制体的质量流量

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\delta x\delta y\delta z \qquad \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

控制体内流体质量随时间的变化率

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

流体密度与速度之间的制约关系

连续方程

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0}$$

微分形式连续方程3

定常流动

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$$

$$\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$$

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z$$

净流出控制体的总质量流量

定常流动净流出单位控制体的质量流量为零

微分形式连续方程4

连续方程 $\Rightarrow$ $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

不可压缩流体 $\Rightarrow$ $$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

适用于定常及非定常流动

净流出单位控制体的体积流量为零

微分形式连续方程5

流体运动的连续性方程是
质量守恒定律在流体力学中的具体表达式

- 只有满足连续性方程的流动在实际中才可能存在
- 连续方程反映了流体密度与速度之间的制约关系
- 连续方程对理想流体和粘性流体均适用

微分形式连续方程6－例题1

例：设一不可压缩流场的速度分布为$v_x = t + 3x$, $v_y = 2t - 2y$, $v_z = 4y + z - 3$，问此流动是否存在?

解：由速度分布得

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 3\ ,\quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2\ ,\quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 3 - 2 + 1 = 2 \neq 0$$

故知此流动在实际中不可能存在

微分形式连续方程7—例题2

例：不可压缩流体的平面定常流动，x 方向的速度分量为$v_x = x^2 + y$，且$y = 0$时，$v_y = 0$，求 y 方向的速度分量v_y。

解：满足不可压缩流体连续方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -2x$$

$$\Rightarrow \quad v_y = -2xy + f(x)$$

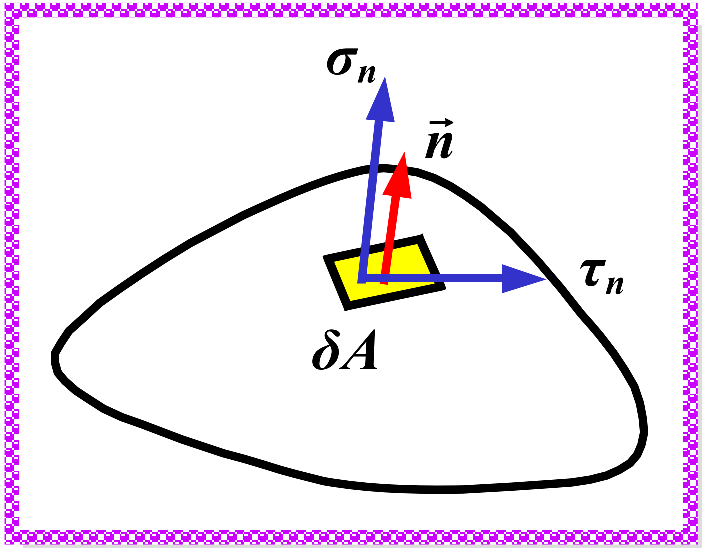
由 $y = 0$时，$v_y = 0$

$$\Rightarrow \quad v_y = -2xy$$

3.5 实际流体的运动微分方程

理想流体 → $p = p(x, y, z)$

粘性流体 → 法向应力 σ_n；切向应力 τ_n

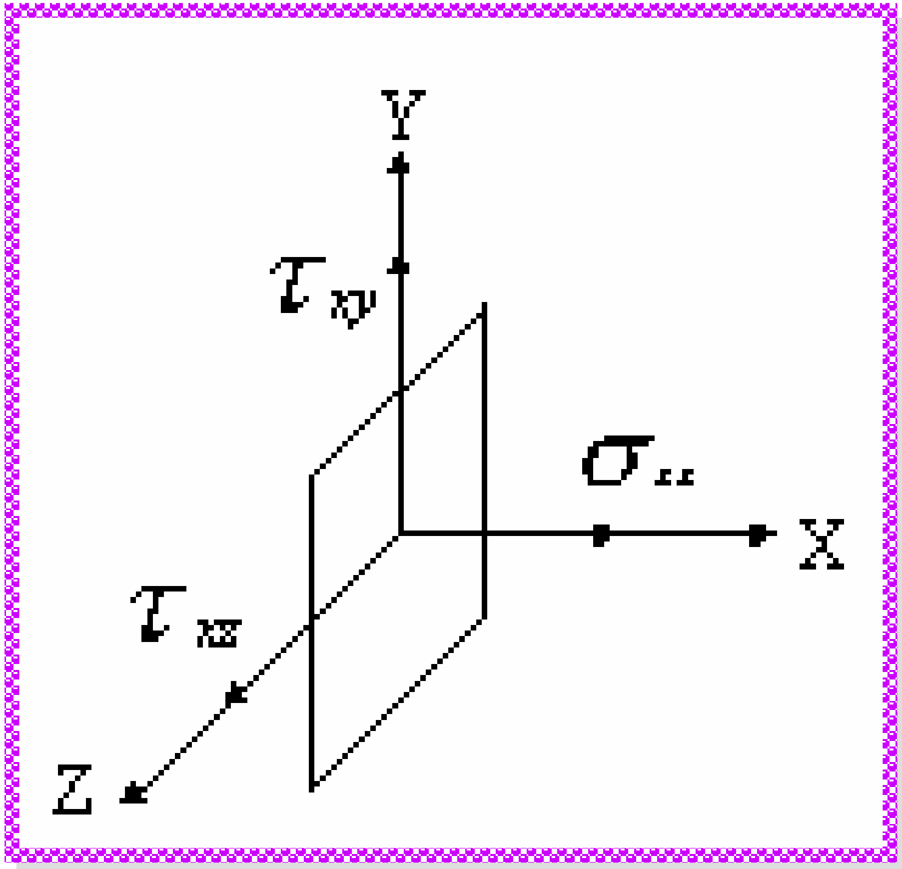


- 应力大小与作用面方位有关

应力的双下标表示法

- 取 $\vec{n}$ 与 x 正方向一致

$\sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}$



下标 1 ⟹ 作用面法线方向

下标 2 ⟹ 应力分量的指向

粘性流体中一点的应力状态

- 过一点作三个相互垂直的平面，则过该的任意方位表面上的应力都可以用这三个平面上的九个应力分量来表示

应力张量 ⇒

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

九个应力分量中只有六个是独立的

应力形式的微分动量方程

微分形式动量方程

牛顿第二定律应用于流体微团 $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

本构方程1

应力与变形速度的关系 → Stokes假设

- 小变形，应力与变形速度之间成线性关系
- 各向同性，应力与变形速度的关系不随坐标变换而变化
- 当$\mu \to 0$时，应力状态简化为理想流体应力状态

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

应力与变形速度的关系

法向应力

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v}$$

其中，p 为压强 $p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)$

应力与变形速度的关系

切向应力

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

- 切向应力与流体的角变形率成正比

Navier-Stokes方程1

微分形式动量方程(运动方程)—N-S方程

$$\frac{Dv_x}{Dt}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{Dv_y}{Dt}=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\nu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{Dv_z}{Dt}=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{v}\right)\right]$$

Navier-Stokes方程2

不可压缩流体，且 $\mu = \text{const}$ $\qquad \nabla \cdot \vec{V} = 0$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Navier-Stokes方程3

理想流体欧拉运动方程，$\mu = 0$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

静止流体

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

Navier-Stokes方程4

加速度＝ 单位质量流体所受合外力

不可压缩流体 N-S 方程 $\Rightarrow$ $$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}$$

欧拉运动微分方程 $\Rightarrow$ $$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

欧拉平衡微分方程 $\Rightarrow$ $$0 = \rho\vec{f} - \nabla p$$

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\right)=0$$

动量方程

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^{2}\vec{v}$$

不可压缩流动：四个未知数 v_x，v_y，v_z，p，四个方程，方程组封闭

粘性流体流动的定解条件

初始条件 → 非定常流动 $t=0$ 时刻的物理量场

边界条件

固壁 → 无滑移边界条件 $\vec{v}_{流}=\vec{v}_{固}$

进出口、无穷远处 → 物理量分布

流体相界面 → 速度、压强、粘性应力等连续

可压缩流体的控制方程组

- **连续方程、运动方程、能量方程**

五个方程，六个未知数 p、v_x、v_y、v_z、ρ、T，方程组不封闭

- **增加完全气体状态方程**

六个方程，六个未知数 p、v_x、v_y、v_z、ρ、T，方程组封闭

定常流动欧拉运动微分方程沿流线的积分

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Dv_x}{Dt} \quad (1)$$

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{Dv_y}{Dt} \quad (2)$$

$$f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{Dv_z}{Dt} \quad (3)$$

(1)×dx + (2)×dy + (3)×dz

沿流线积分

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

伯努利方程1

伯努利方程适用条件 ⇒ $$\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C$$

- 理想不可压流体
- 定常流动
- 质量力有势且只有重力
- 沿同一条流线成立
- 无其它能量输入输出

伯努利方程2

$$\frac{v_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}=\frac{v_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}$$

gz → 单位质量流体的重力势能

$v^2/2$ → 单位质量流体的动能

p/ρ → 单位质量流体的压强势能

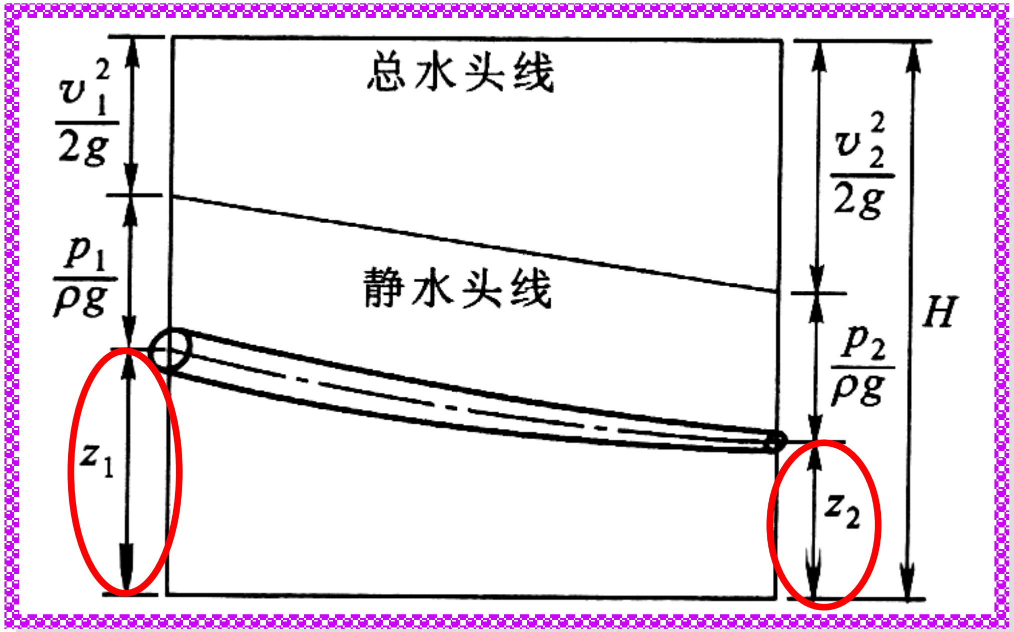
机械能守恒方程，单位质量流体的重力势能＋压强势能＋动能沿流线守恒

单位重量流体的伯努利方程

$$\frac{v_1^2}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\rho g}=\frac{v_2^2}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\rho g}$$

z

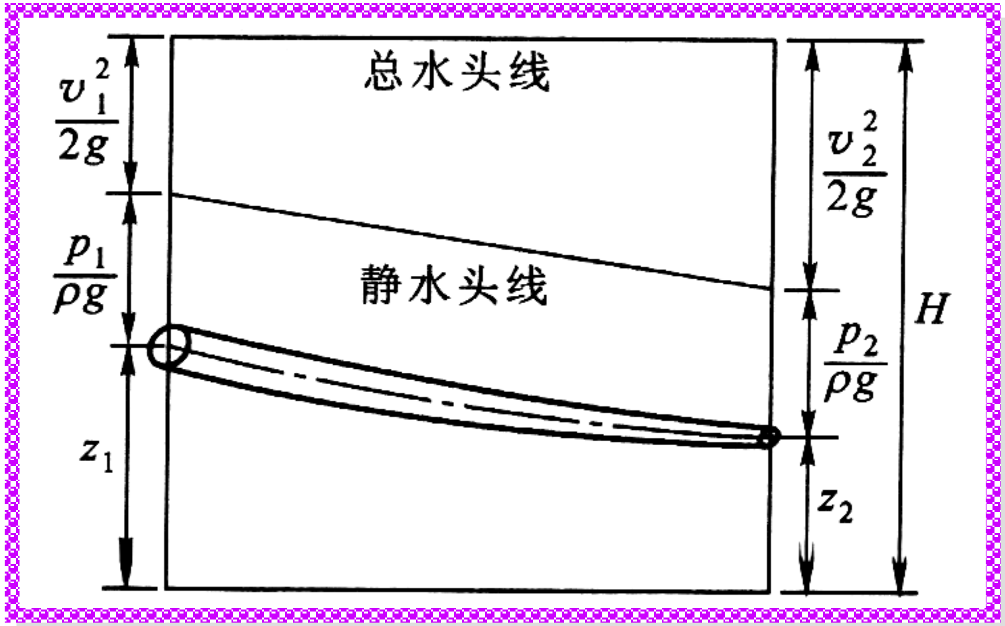
位置水头，流体质点相对于基准面的位置高度



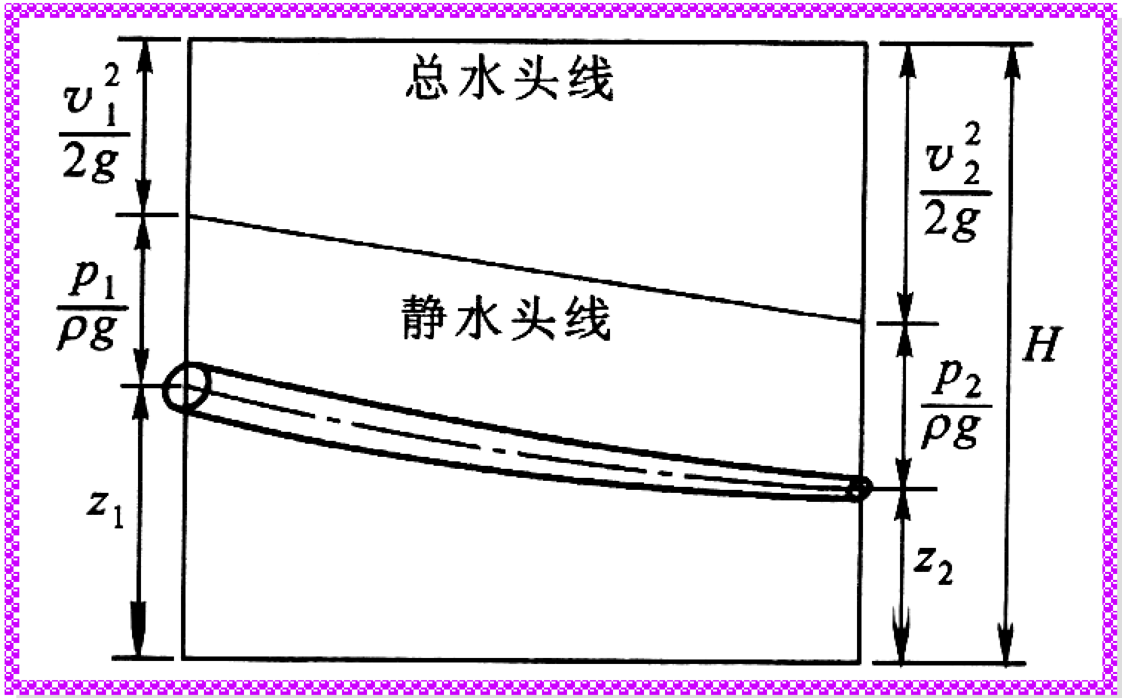
伯努利方程4

$\dfrac{v^2}{2g}$ ⇒ 速度水头，不考虑阻力时流体以速度 V 垂直上射的高度

$\dfrac{p}{\rho g}$ ⇒ 压强水头，测压管高度，产生压强 p 所需的流体柱高度



伯努利方程5



$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{const}$$ ⟹ **总能头 (总水头)**

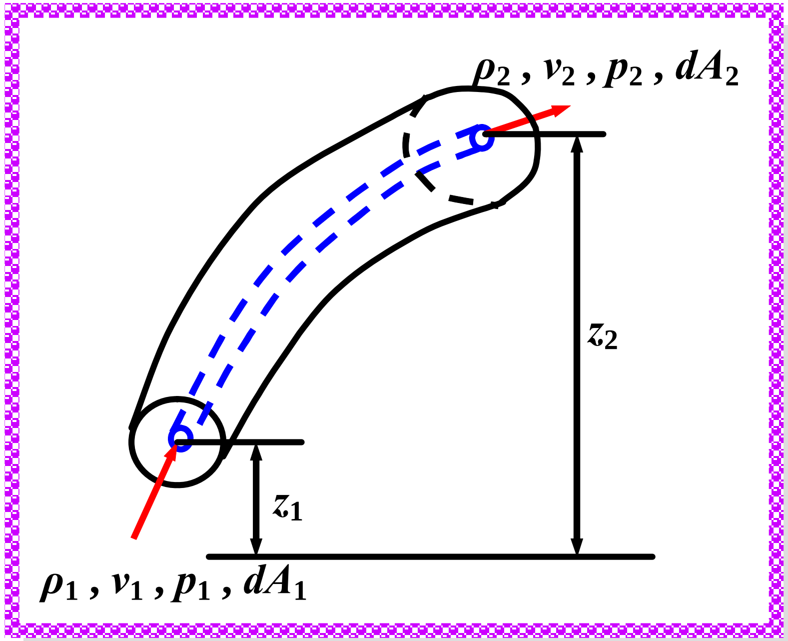
总能 (水) 头为常数，总能 (水) 头线为水平直线

总流伯努利方程1

沿流线的伯努利方程应用到总流

单位时间通过微小流束过流断面的不可压流体重量

$$\rho g dq_V = \rho g v_1 dA_1 = \rho g v_2 dA_2$$



总流伯努利方程

$$\int_{A_1}\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}\right)\rho g v_1 dA_1=\int_{A_2}\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}\right)\rho g v_2 dA_2$$

总流伯努利方程2

动能修正系数 → $\rho g\int_A \frac{v^2}{2g} v dA$

取平均流速 $\bar{v}$ 计算动能，需加以修正

$$\frac{\rho g}{2g}\int_A v^3 dA = \frac{\rho g \alpha}{2g}\int_A \bar{v}^3 dA = \frac{\alpha \bar{v}^2}{2g}\rho g A \bar{v}$$

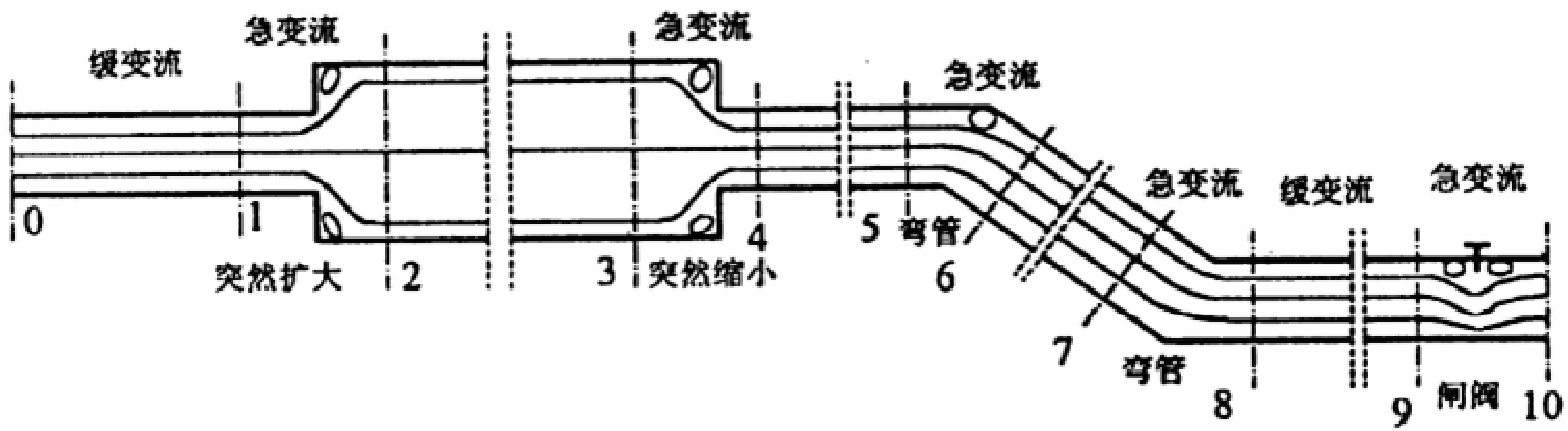
$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{\bar{v}^3 A}$$

反映过流断面上速度分布的不均匀性，工程上 α 一般取 1

总流伯努利方程3

缓变流 ⟹ $$\rho g\int_A\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)vdA$$

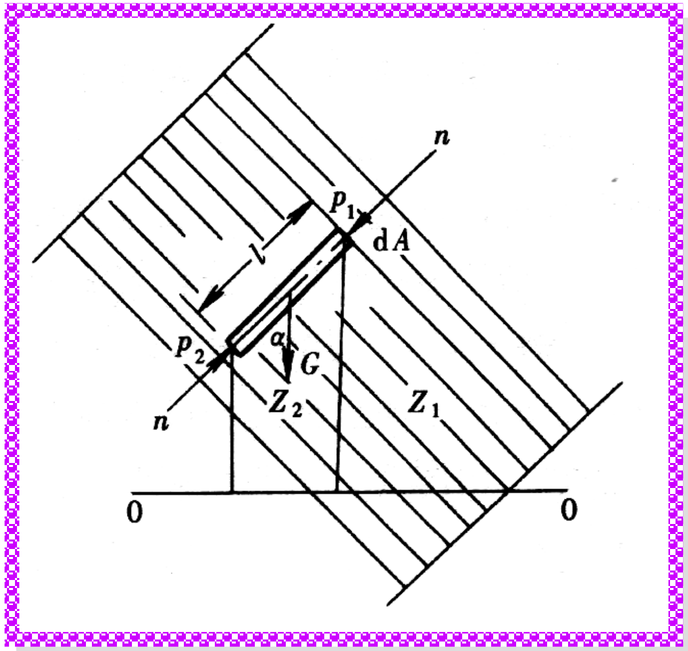
- 流线切线之间夹角很小，即流线近似于平行
- 流线曲率很小，即流线近似于直线



总流伯努利方程4

n-n向微圆柱受力平衡

$$\rho g l dA\cos\alpha + p_1 dA = p_2 dA$$



由 $l\cos\alpha = z_1 - z_2$

$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} = C}$$

缓变流过流断面

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g}\right)\rho g\int_{A_1} v_1 dA_1 = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g}\right)\rho g\int_{A_2} v_2 dA_2$$

=

总流伯努利方程5

总流伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \bar{v}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2^2}{2g}$$

适用条件

- 理想不可压缩流体
- 定常流动
- 质量力有势且只有重力
- 两过流断面必须是缓变流过流断面
- 两过流断面间无能量输入输出

总流伯努利方程6

注意

- 断面压强要求采用同种压强表示方法
- z，$p/\rho g$ 可以是过流断面上任意一点处的值，但必须为同一点的值
- 两过流断间可以不是缓变流动
- 取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

注意

- 两过流断面间有其它能量输入输出

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1\bar{v}_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2\bar{v}_2^2}{2g}+h_{轴}$$

量纲：[L]

单位：m

能量输入 $h_{轴}$ 为负：泵、压缩机；能量输出 $h_{轴}$ 为正：涡轮机

- 功率

$$P=\rho g q_V h_{轴}$$

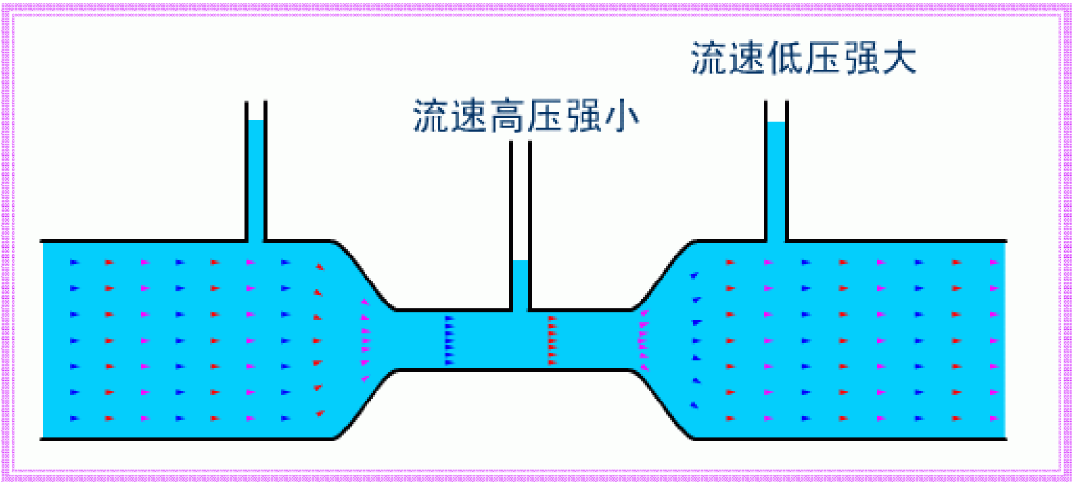
流体水平流动时，或者高度差的影响不显著时（如气体的流动）

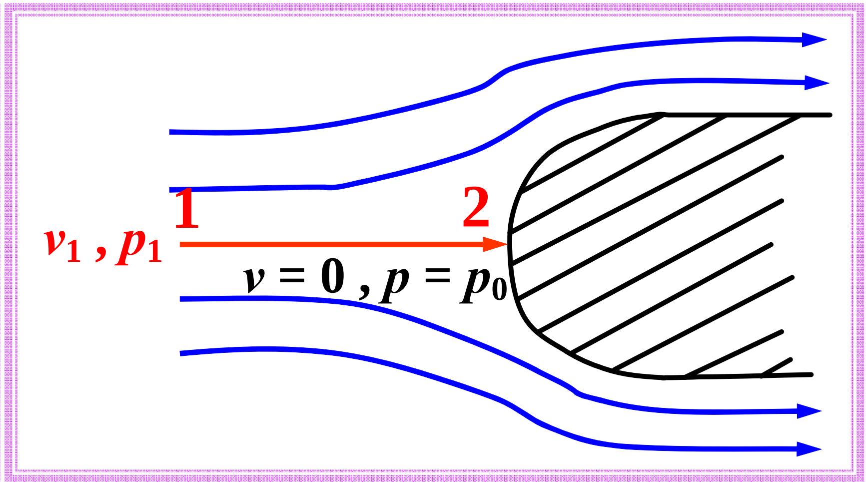
$$p+\frac{1}{2}\rho\overline{v}^{2}=C$$

静压　动压

$$p_0=p+\frac{1}{2}\rho\overline{v}^{2}$$

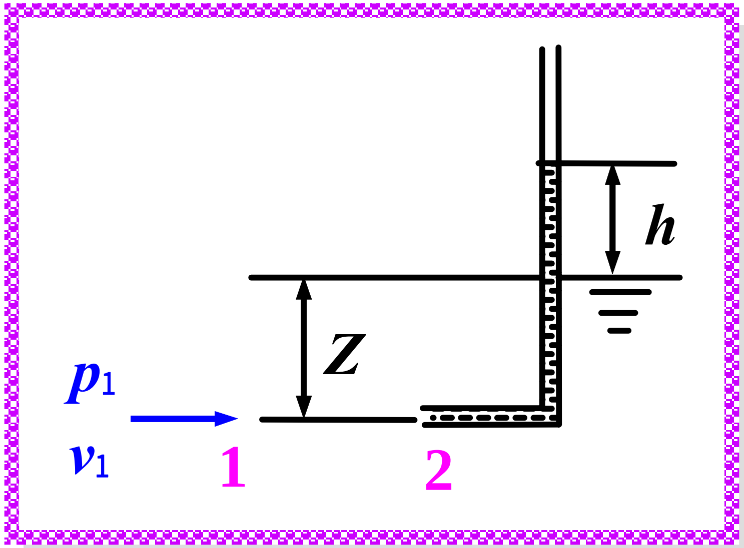
滞止压强

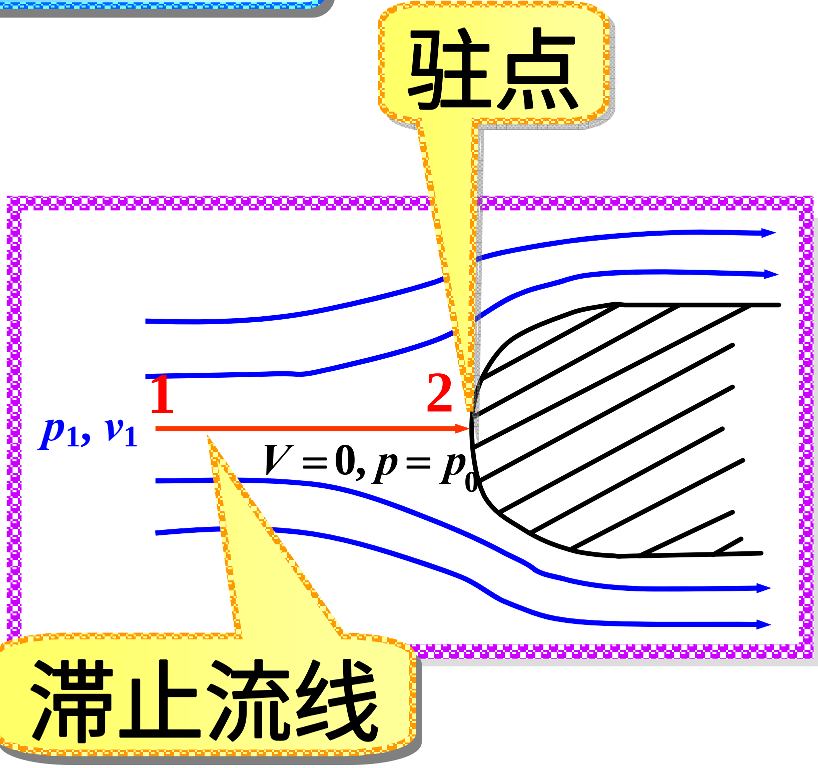




伯努利方程的应用1

速度测量 → 简单毕托管



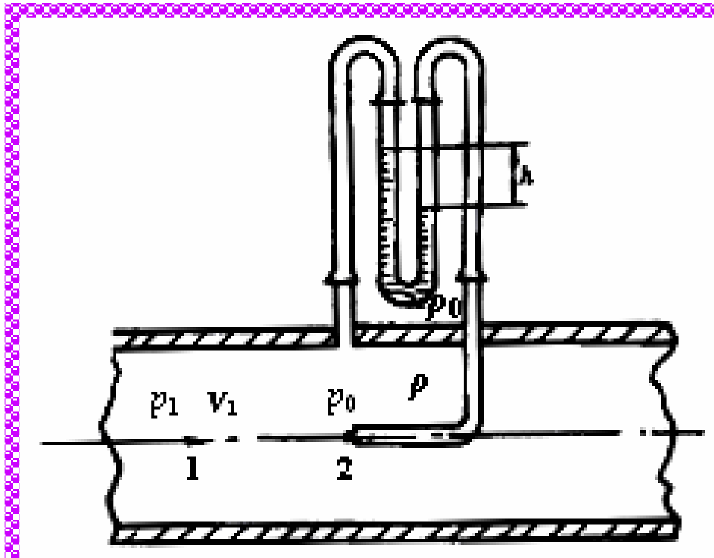


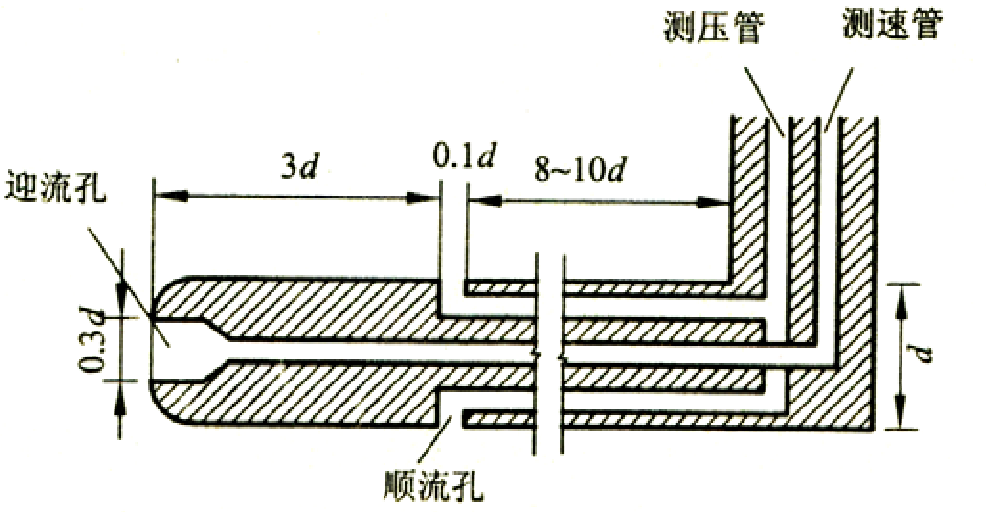
→ $$v_1 = \sqrt{2gh}$$

伯努利方程的应用2

毕托管

$$v_1 = \sqrt{2gh\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}}$$

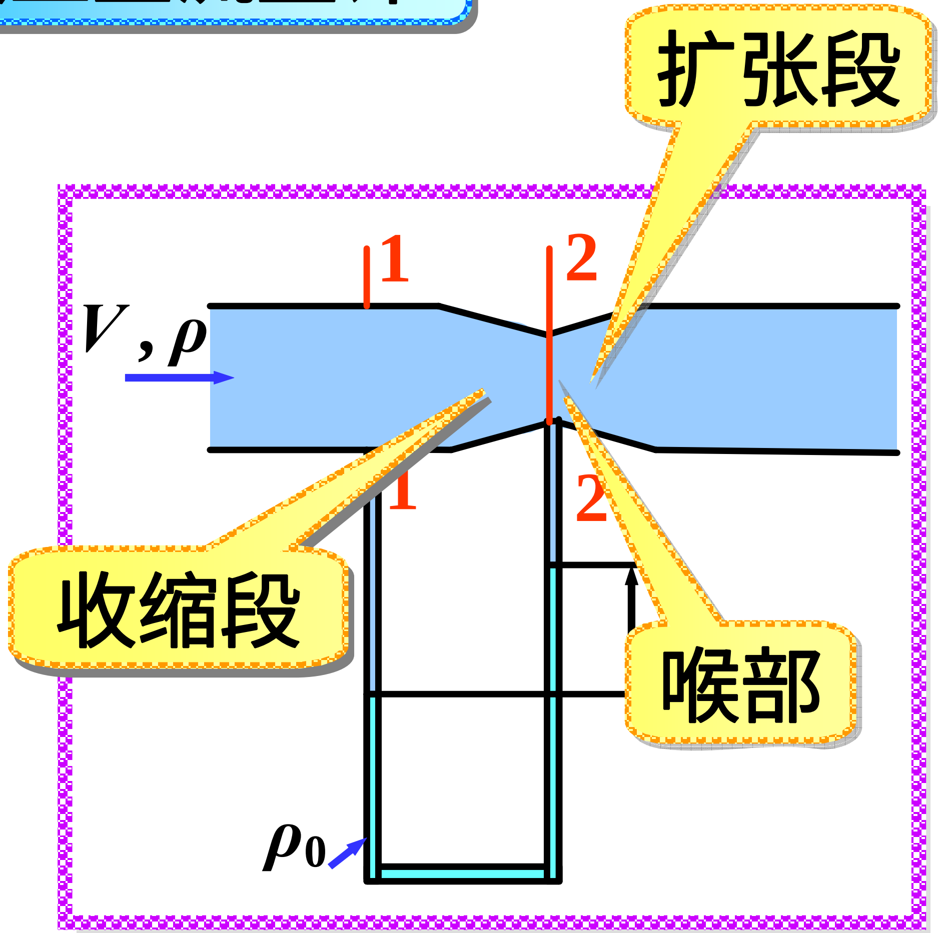




伯努利方程的应用3

流量测量 → 文丘里流量计

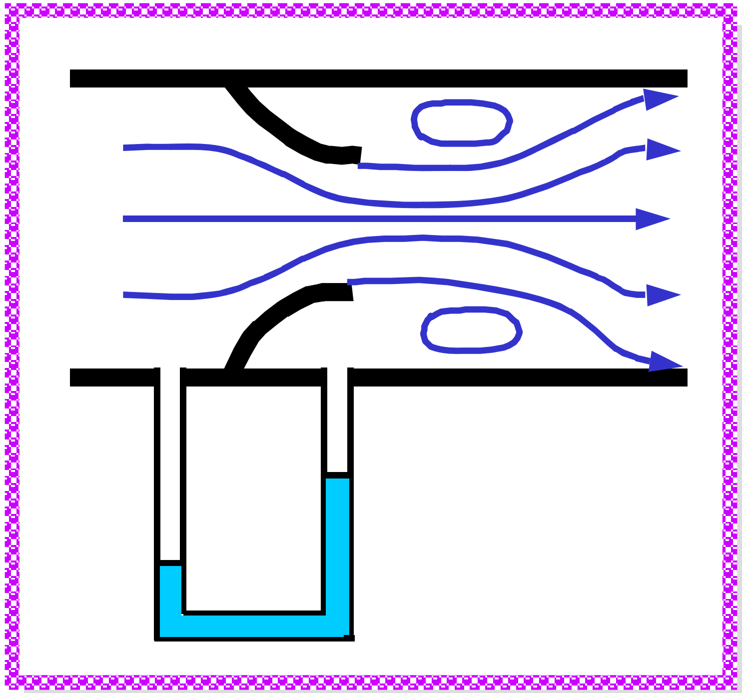
$$q_V = A_2 \sqrt{\frac{2gh(\rho_0 - \rho)}{\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\rho}}$$



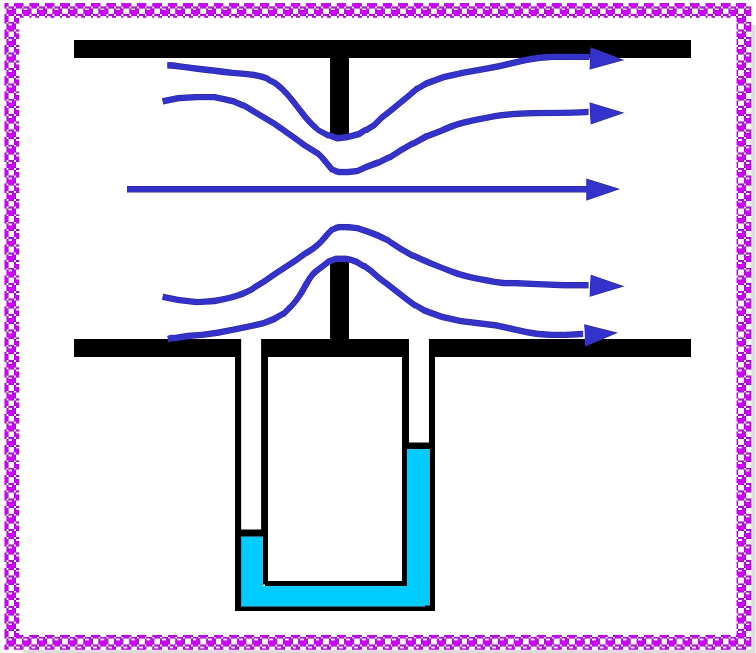
- 考虑粘性影响，需乘以流量系数C_d

节流式流量计

喷嘴流量计



孔板流量计



伯努利方程的应用5

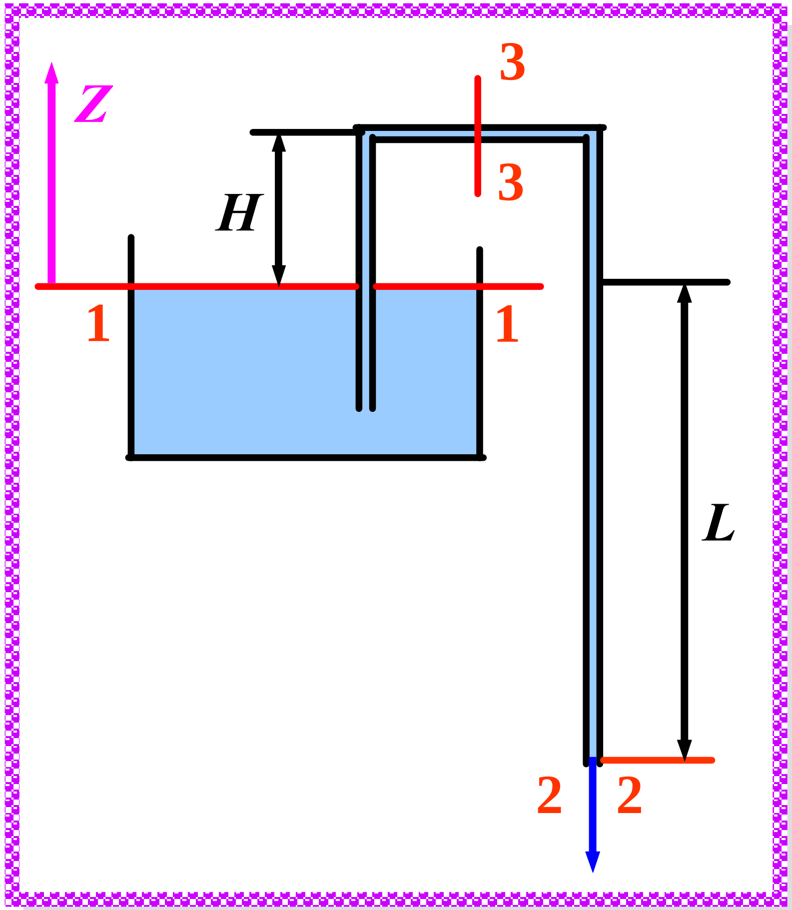
虹吸管

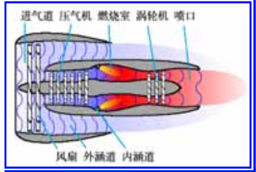
$$v_2 = \sqrt{2gL}$$

- **最高截面表压**

$$p_{3m} = -\rho g\left(H + L\right)$$

- **注意冷沸腾现象**





3.7 动量方程及其应用

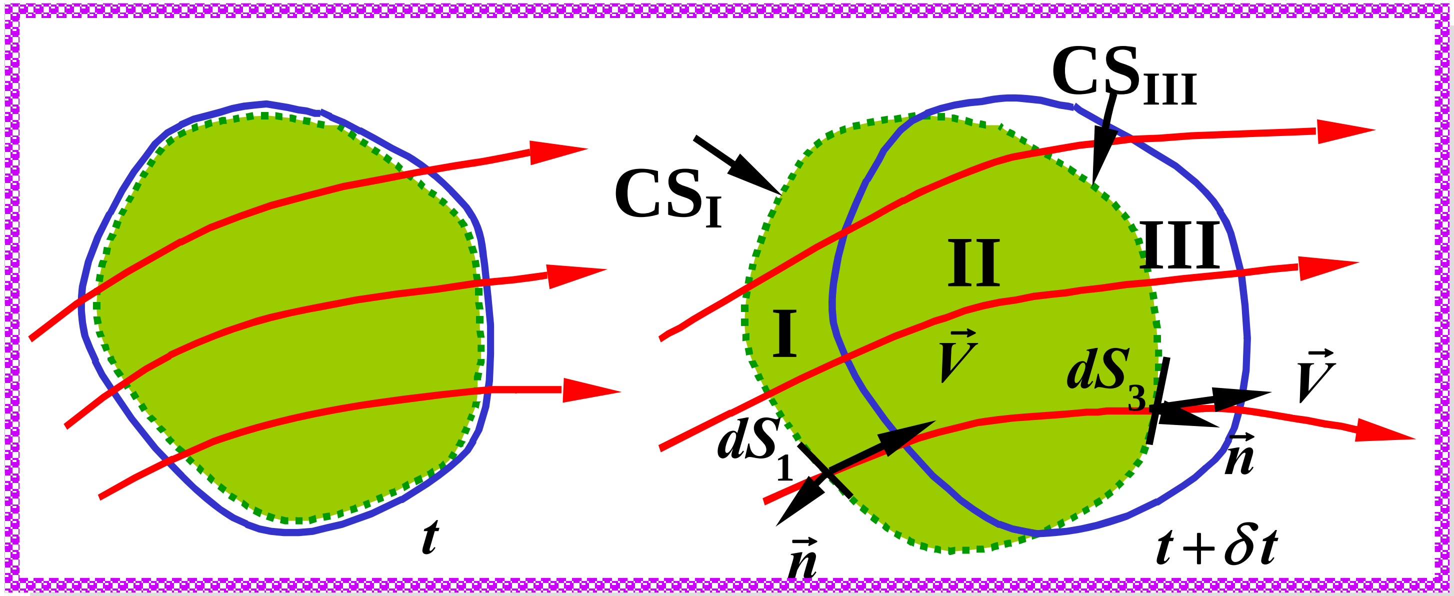
动量方程 → 理论力学中的动量定理在流体力学中的具体表现

- 系统体积为τ，动量为$\vec{k}$，动量定理

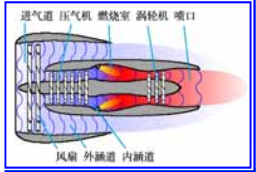
→ $$\sum \vec{F} = \frac{D\vec{k}}{Dt}$$

- 拉格朗日观点的动量方程

欧拉方法描述系统动量对时间的变化率



$$\frac{D\vec{k}_{sys}}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\vec{k}_{sys}(t+\delta t)-\vec{k}_{sys}(t)}{\delta t}$$



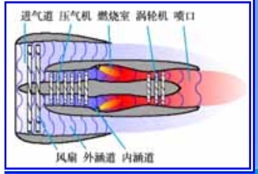
对控制体的动量方程2

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \vec{v}\, d\tau + \int_{CS} \rho \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$$

$\sum \vec{F}$ ⟹ 作用在控制体上的外力之和

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \vec{v}\, d\tau$ ⟹ 控制体中流体的动量对时间的变化率

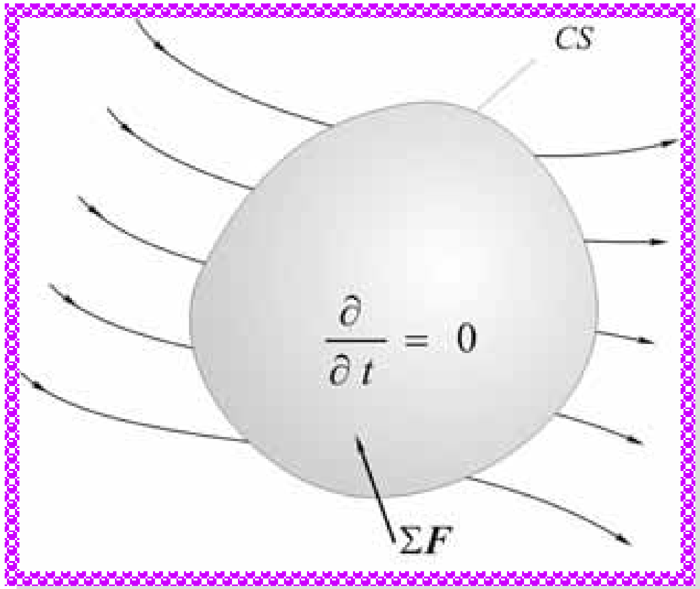
$\int_{CS} \rho \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$ ⟹ 流出 CV 的流体动量净流率



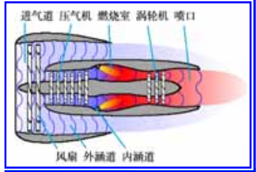
对控制体的动量方程3

定常流动 ⟹ $\sum \vec{F} = \int_{CS} \rho \vec{v}\vec{v} \cdot \vec{n} dS$

$$\begin{cases} \sum F_x = \int_{CS} \rho v_x \vec{v} \cdot \vec{n} dS \\ \sum F_y = \int_{CS} \rho v_y \vec{v} \cdot \vec{n} dS \\ \sum F_z = \int_{CS} \rho v_z \vec{v} \cdot \vec{n} dS \end{cases}$$



- 控制体上所受的合外力只与流体动量的净流出率有关，与控制体内的细节无关



对控制体的动量方程4

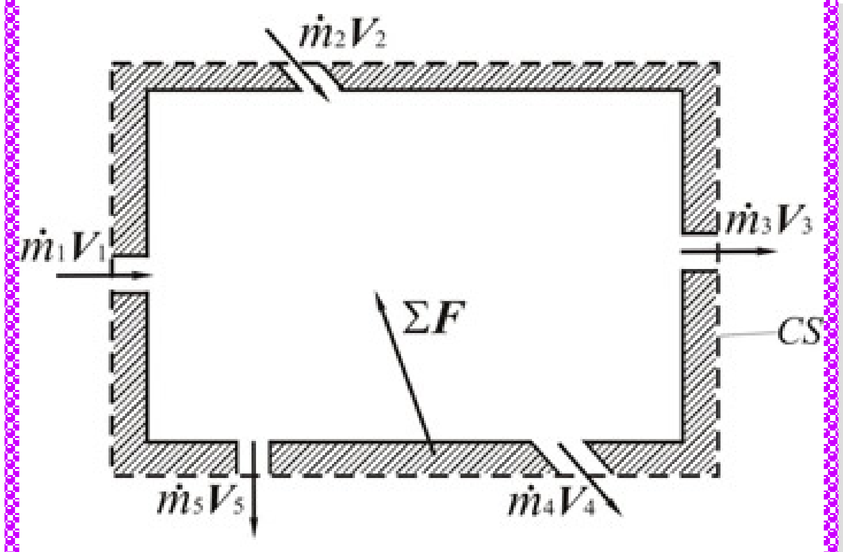
流体仅在控制面的有限个区域流入流出

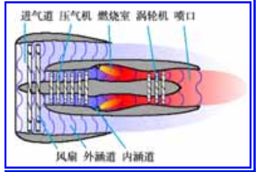
定常不可压缩流体流动

$$\sum\vec{F}=\sum\left(\rho q_{Vi}\beta_i\vec{v}_i\right)_{\text{out}}-\sum\left(\rho q_{Vi}\beta_i\vec{v}_i\right)_{\text{in}}$$

- 速度均布 β 取 1
- 力与速度的正负号

  与选定坐标方向一致者取正，反之取负

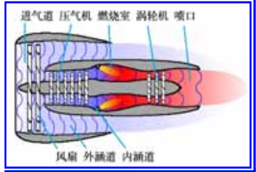




对控制体的动量方程5

动量方程适用条件

- 理想流体或粘性流体
- 定常流动或非定常流动
- 可压缩流体或不可压缩流体
- 控制体内有无流动参数不连续面均可
- 外界与控制体有无质量能量交换均可



对控制体的动量方程6

求解步骤

- 建立坐标系
- 选取控制体 → 是否运动、是否包含所有进出口，所求力是否为外力
- 控制体受力分析 → 质量力、表面力
- 连续方程（速度）、伯努利方程（压强）、动量方程（矢量方程，分量方程求解各分力）

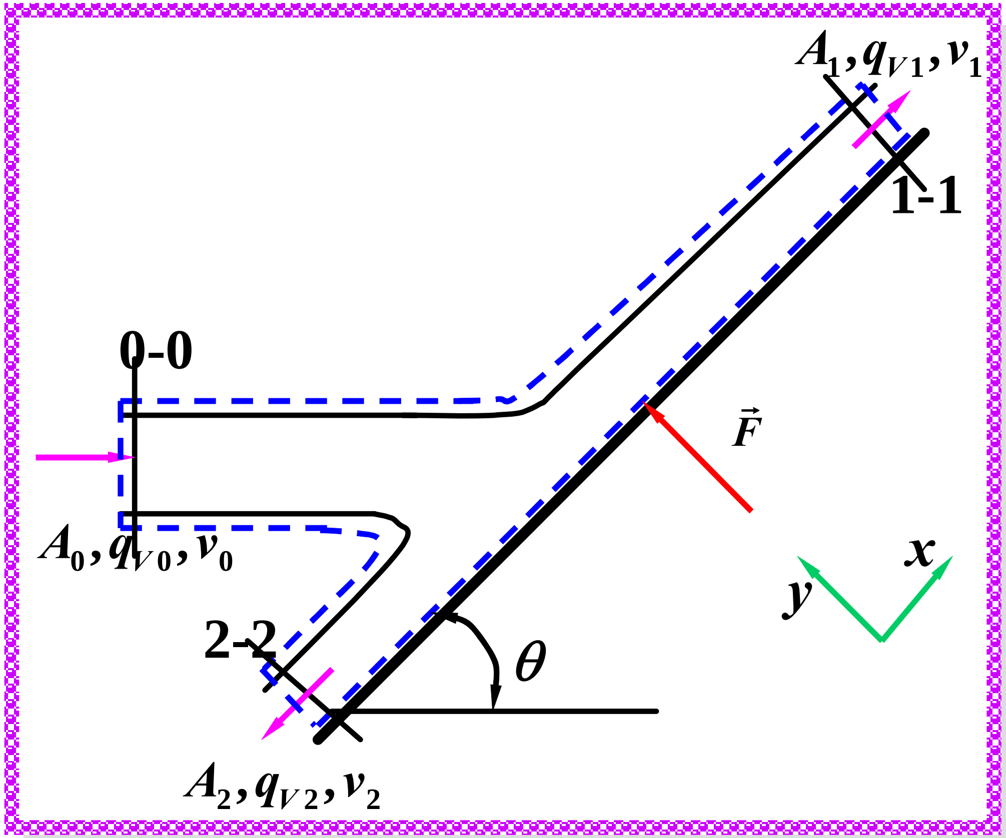
理想不可压缩流体自由射流：已知q_{V0}，v_0，ρ=const，重力和摩擦力可以忽略，$v_1 = v_2 = v_0$，求：q_{V1}, q_{V2} 以及液体对平板的作用力。

解：(1) 坐标系

(2) 控制体

(3) 受力分析

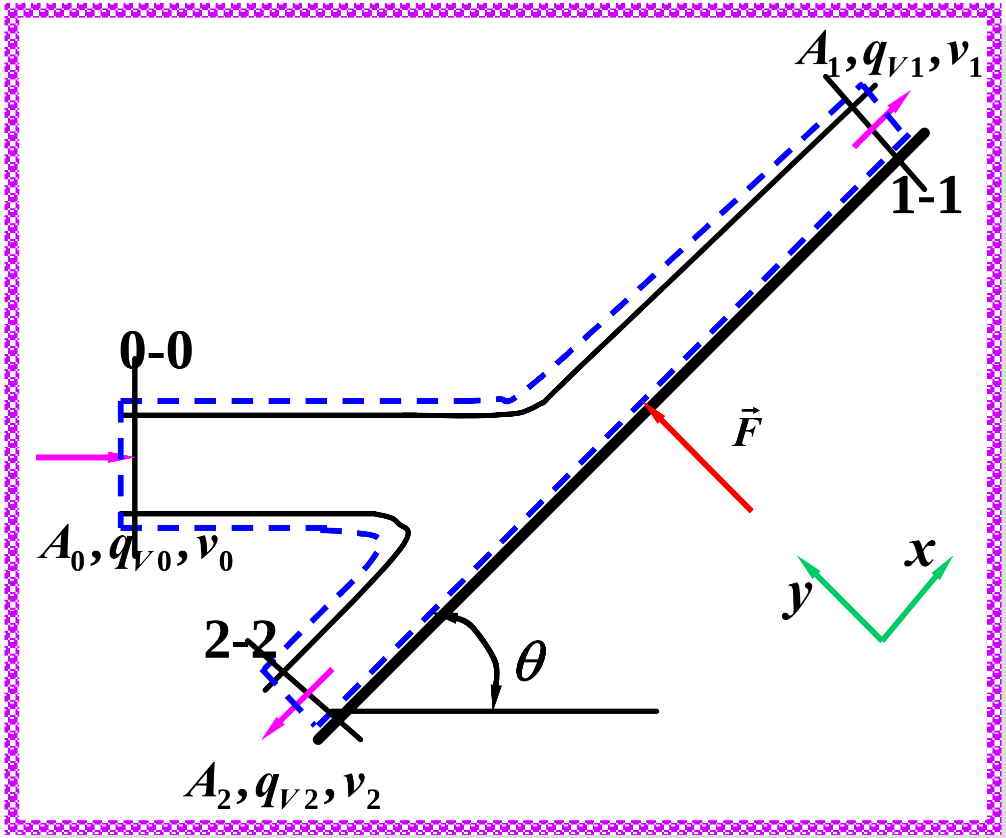
平板对控制体的力 F，y 方向



(4) 连续方程

$$\sum(q_V)_{\text{in}} = \sum(q_V)_{\text{out}}$$

$$q_{V0} = q_{V1} + q_{V2}$$



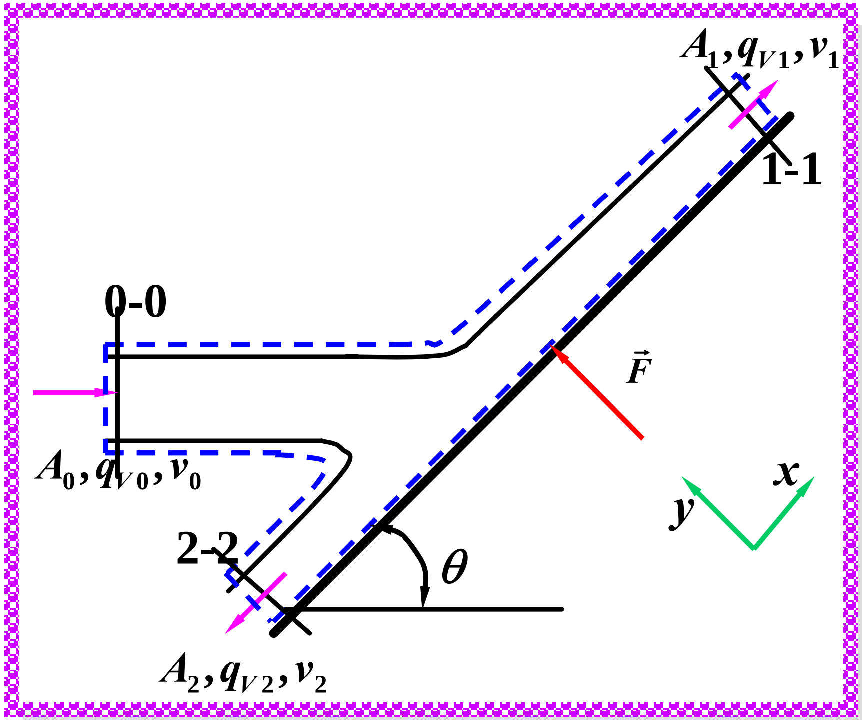
(5) 动量方程－x 方向

$$F_x = 0$$

$$= \sum(\rho q_{Vi} v_{xi})_{\text{out}} - \sum(\rho q_{Vi} v_{xi})_{\text{in}}$$

$$v_1 q_{V1} - v_0 \cos\theta q_{V0} - v_2 q_{V2} = 0$$

$$\begin{cases} q_{V1} = \dfrac{q_{V0}}{2}\left(1+\cos\theta\right) \\ q_{V2} = \dfrac{q_{V0}}{2}\left(1-\cos\theta\right) \end{cases}$$



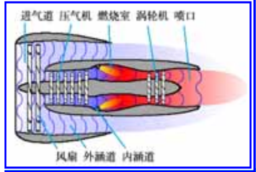
动量方程－y 方向

$$\boxed{F_y = F}$$

$$= \sum\left(\rho q_{Vi} v_{yi}\right)_{\text{out}} - \sum\left(\rho q_{Vi} v_{yi}\right)_{\text{in}}$$

$$F = \rho v_0 q_{V0} \sin\theta$$

所求力与F大小相等，方向相反



动量方程的应用4—例题2

管道流动：已知$A_1 = 0.01\text{m}^2$，$A_2 = 0.0025\text{m}^2$，$v_2 = 16\text{m/s}$，$\rho = 999\text{kg/m}^3$，$p_1 = 221\text{kPa}$，$p_a = 101\text{kPa}$，忽略重力和摩擦力。求弯头所受支撑力

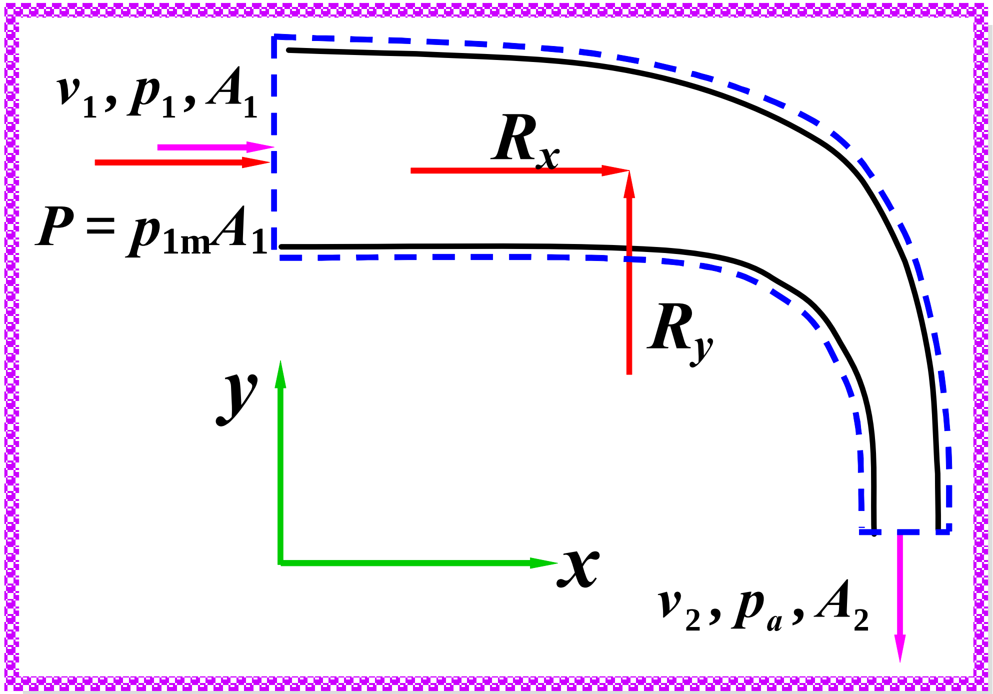
解：(1) 坐标系

(2) 控制体

(3) 受力分析

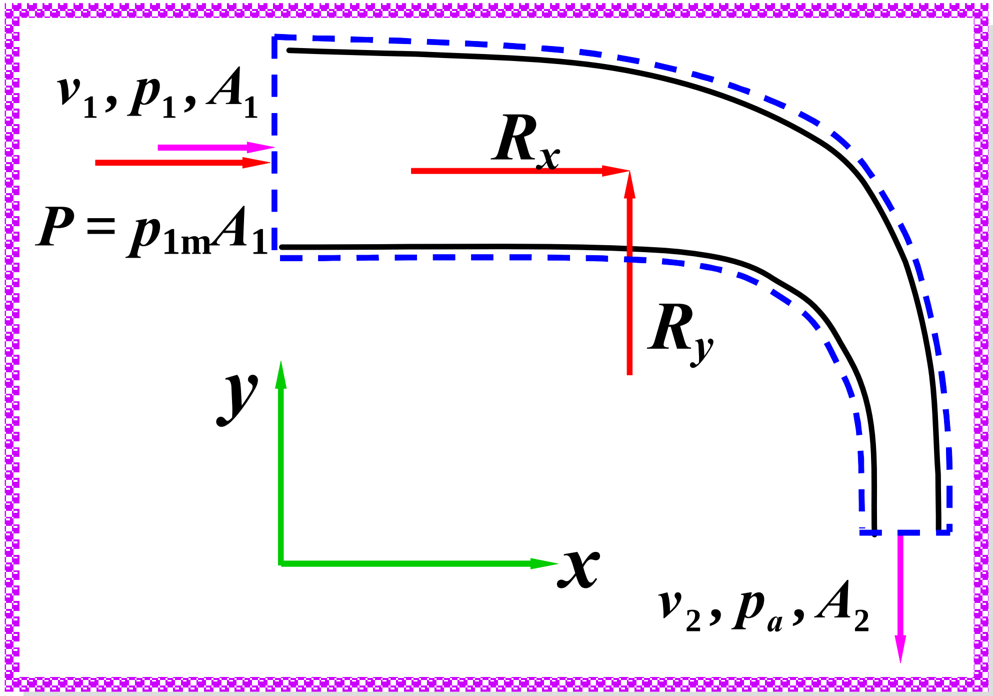
弯头支撑力R_x，R_y

表压力 P



(4) 连续方程

$$\sum(q_V)_{\text{in}} = \sum(q_V)_{\text{out}}$$



$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

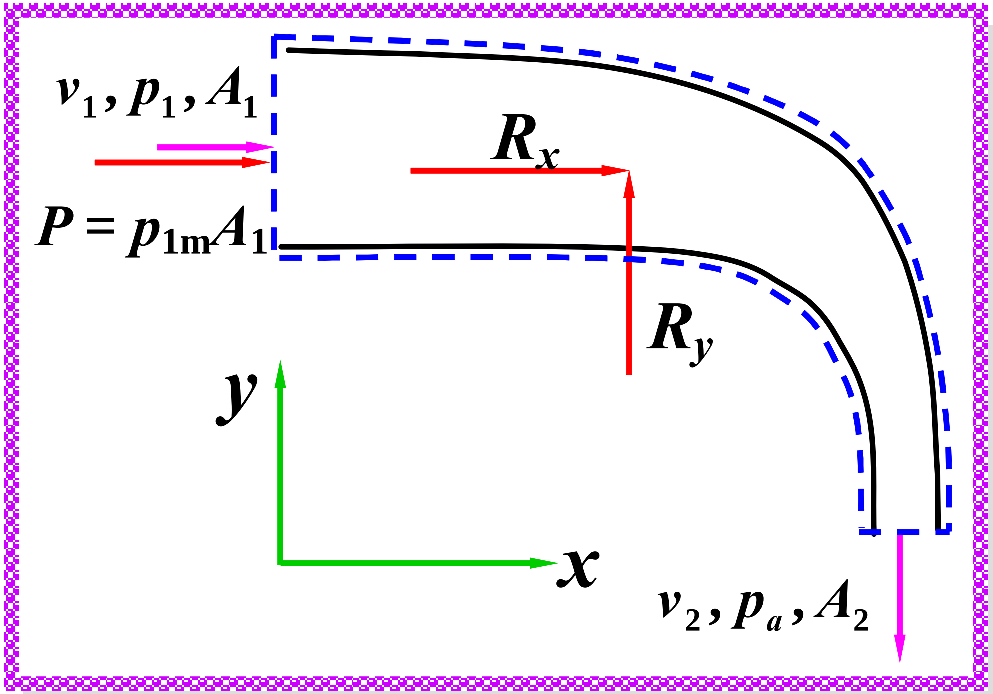
$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = 4(\text{m/s})$$

(5) 动量方程 – x 方向

$$\boxed{F_x = R_x + P} = \sum\left(\rho q_{Vi} v_{xi}\right)_{\text{out}} - \sum\left(\rho q_{Vi} v_{xi}\right)_{\text{in}}$$

$$R_x = -p_{1m}A_1 - \rho v_1^2 A_1$$

$$= -1.36\times 10^3\left(\text{N}\right)$$



动量方程 – y 方向

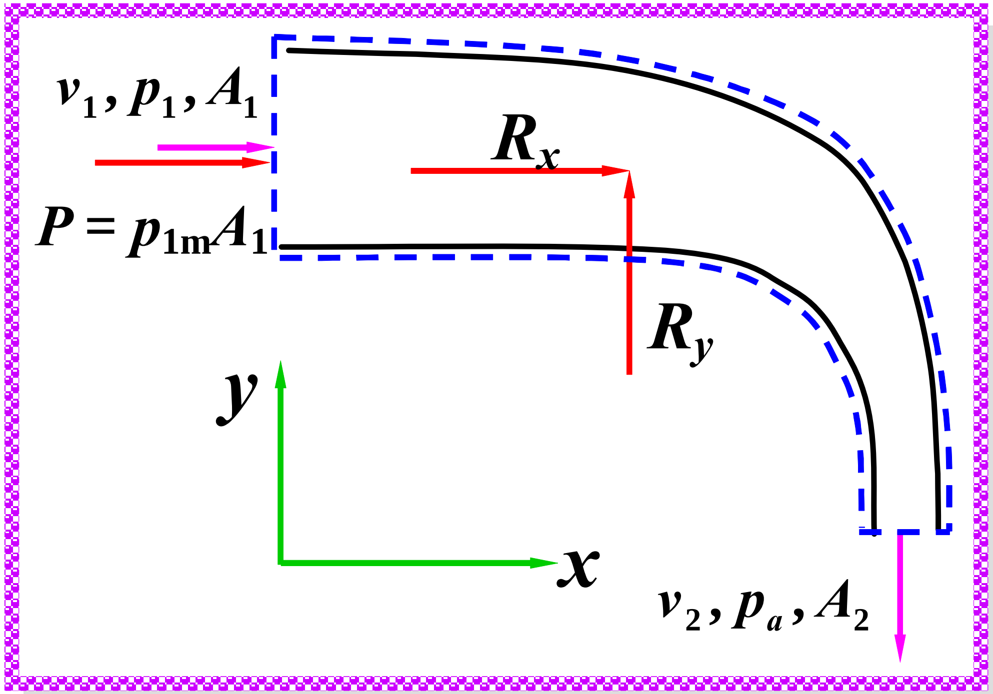
$$\boxed{F_y = R_y}$$

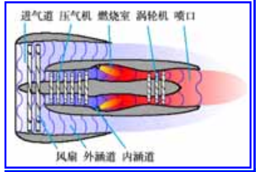
动量方程 - *y*方向

$$\boxed{F_y = R_y} = \sum\left(\rho q_{Vi} v_{yi}\right)_{\text{out}} - \sum\left(\rho q_{Vi} v_{yi}\right)_{\text{in}}$$

$$R_y = -\rho v_2^2 A_2$$

$$= -0.639\times 10^3\left(\text{N}\right)$$





动量方程的应用8－解题注意事项

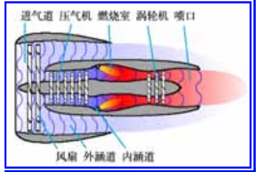
控制体的选择

- **控制体是否运动，包含所有进出口，使要求解的力为控制体所受的外力**

定常流动、控制面有限个区域有流体流入流出，且各进出口参数均布

$$\sum(\rho q_V)_{\text{in}} = \sum(\rho q_V)_{\text{out}}$$

$$\sum \vec{F} = \sum(\rho q_{Vi}\vec{v}_i)_{\text{out}} - \sum(\rho q_{Vi}\vec{v}_i)_{\text{in}}$$



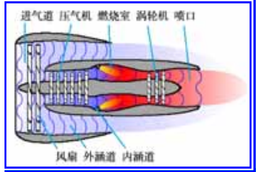
动量方程的应用9－解题注意事项

正负号的确定

- 力与速度在各坐标轴上投影的方向同坐标方向一致时，取正号，反之取负号

大气压强的作用

- 大气压强作用于闭合控制体四周，所产生的静压力相互抵消，可采用表压计算压力



动量方程的应用10—解题注意事项

管道问题和自由射流问题

- 管道问题需考虑表压力不为零的情况

运动控制体

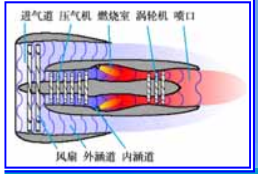
- CV 做匀速运动，所有运动量均相对于 CV，若 CV 做加速运动或旋转，则需添加惯性力

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}}\rho\vec{v}_r d\tau+\int_{\mathrm{CS}}\rho\vec{v}_r\vec{v}_r\cdot\vec{n}dS=\Sigma\vec{F}$$

- 流体仅在控制面的有限个区域流入流出且 ρ，v 在进出口截面均布，定常流动

$$\sum\vec{F}=\sum\left(\rho q_{Vri}\vec{v}_{ri}\right)_{\mathrm{out}}-\sum\left(\rho q_{Vri}\vec{v}_{ri}\right)_{\mathrm{in}}$$

其中 $\vec{v}_r=\vec{v}-\vec{v}_{\mathrm{CV}}$



动量方程的应用12—例题3

已知v = 30m/s，U = 10m/s，忽略重力和摩擦力，出口截面A_1= 0.003m²，求对小车支撑力R_x和 R_y

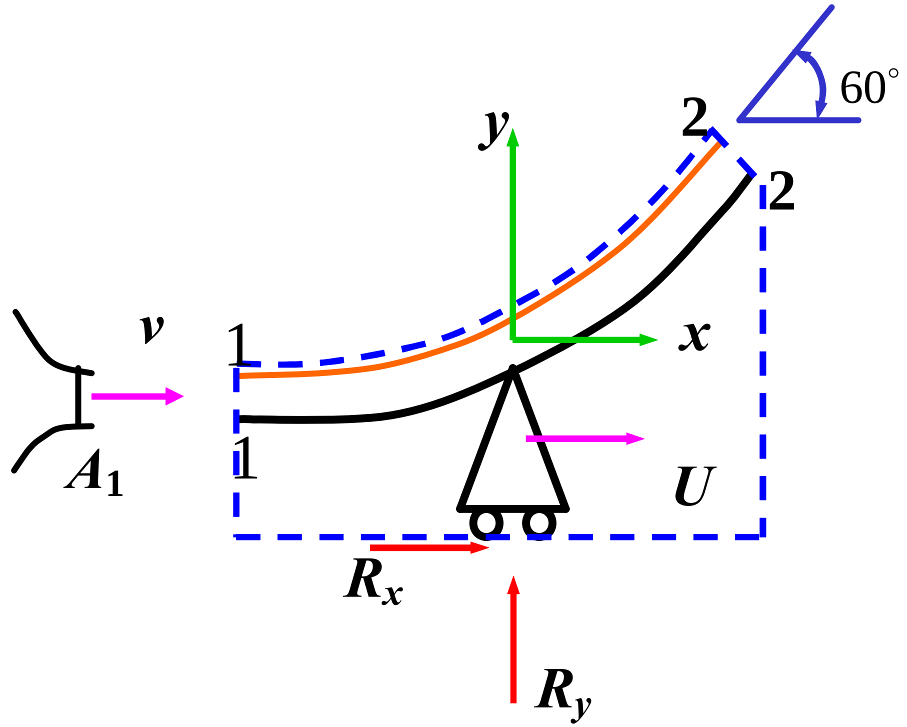
解：(1) 坐标系

(2) 控制体

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{U}$$

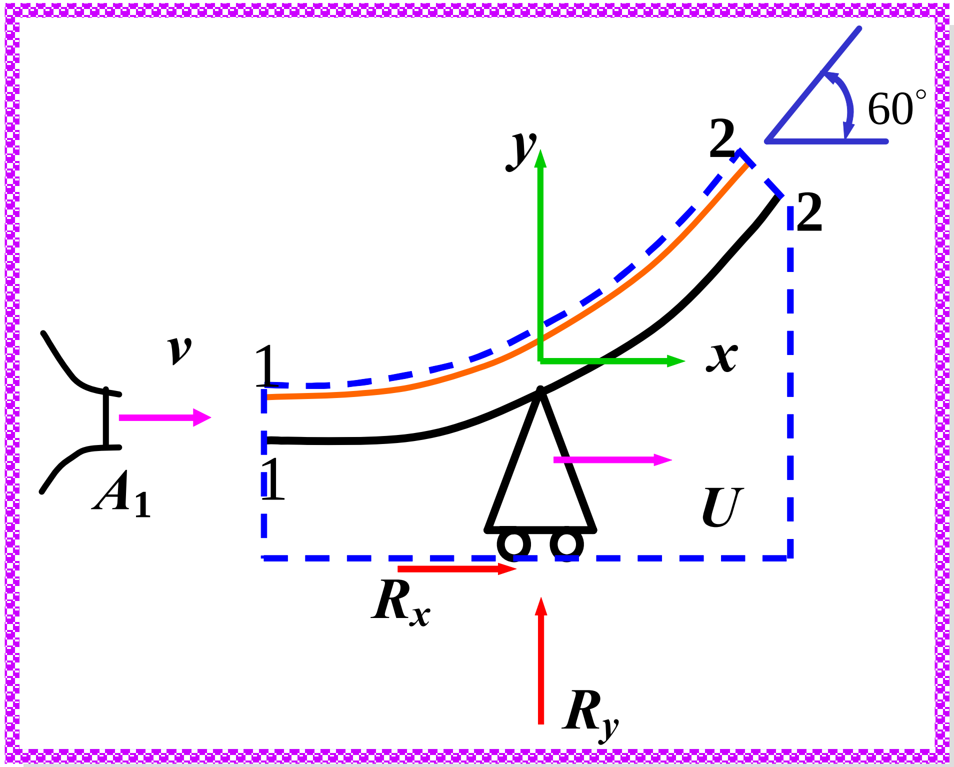
(3) 受力分析

维持叶片做匀速直线运动的力 R_x，R_y



(4) 连续方程

$$\boxed{q_{Vr1} = q_{Vr2}}$$

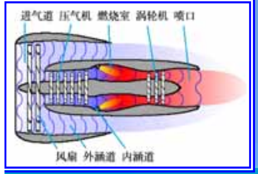


(5) 动量方程 – x 方向

$$\boxed{F_x = R_x}$$

$$= \sum\left(\rho q_{Vri}\vec{v}_{ri}\right)_{\text{out}} - \sum\left(\rho q_{Vri}\vec{v}_{ri}\right)_{\text{in}}$$

$$\Rightarrow \quad R_x = \rho A_2 v_{r2}^2 \cos 60^\circ - \rho A_1 v_{r1}^2$$

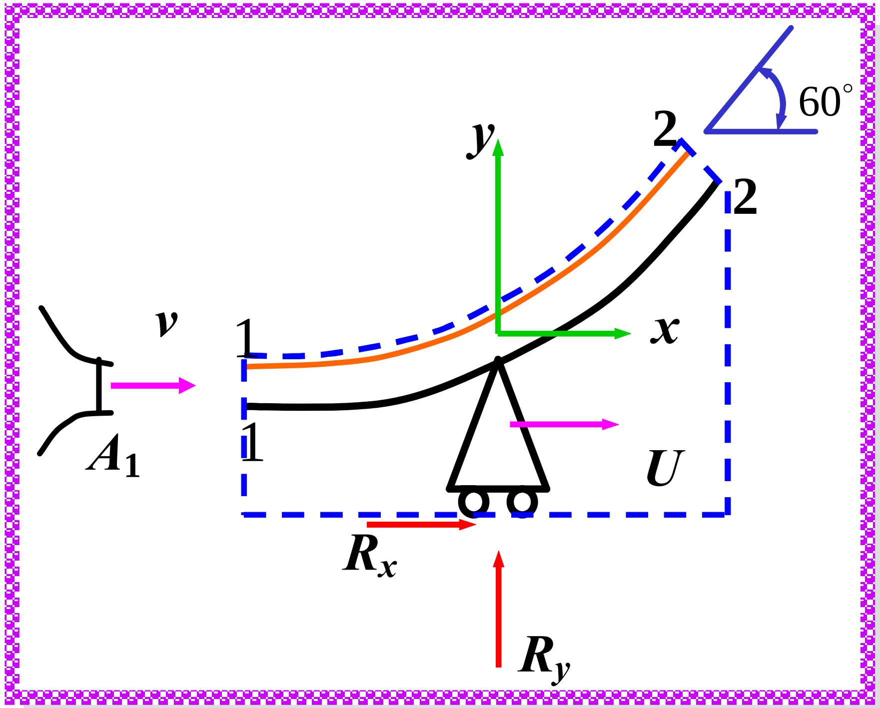


动量方程的应用14—例题3

$$R_x = \rho(v-U)^2 A_1(\cos\theta - 1) = -599(\text{N})$$

动量方程 – y 方向

$$\boxed{F_y = R_y}$$



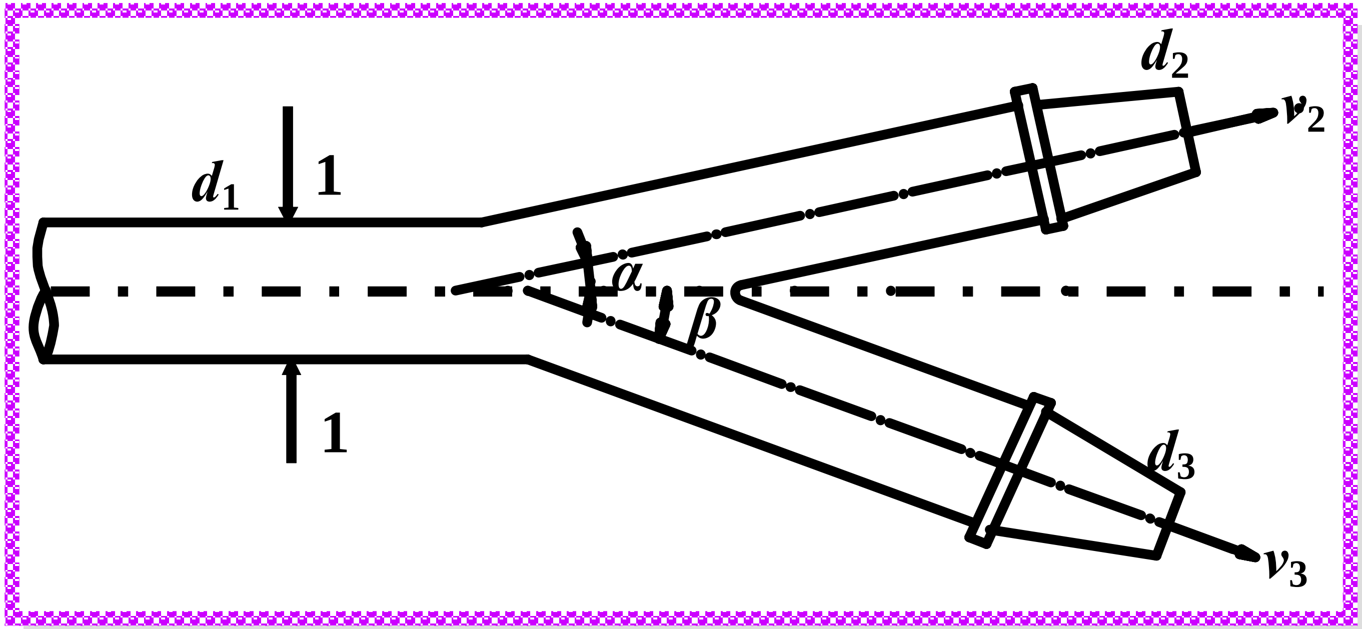
$$R_y = \rho v_{r2}^2 A_2 \sin 60^\circ$$

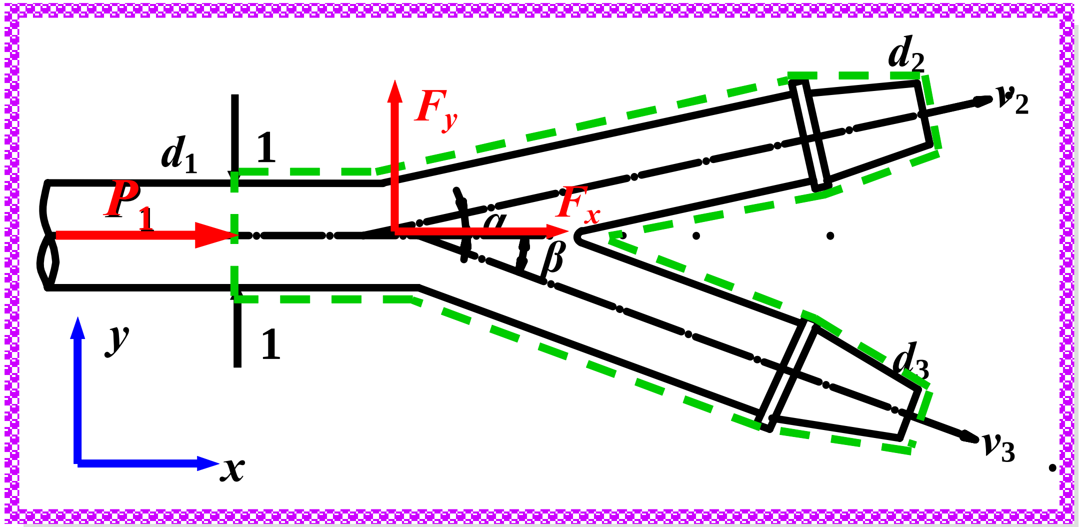
$$R_y = \rho(v-U)^2 A_1 \sin\theta$$

$$= 1.04\times 10^3(\text{N})$$

动量方程、伯努利方程综合应用1

输水管出口处通过设置的两个分叉的喷嘴将水流射入大气中(两分叉管在同一水平面内)，已知：d_1=150mm ，d_2=100mm，d_3=75mm，v_2= v_3= 12 m/s，不计重力和阻力损失，α =15°，β = 30 °,求为固定分叉喷嘴所需外力。





解：(1) 坐标系

(2) 控制体

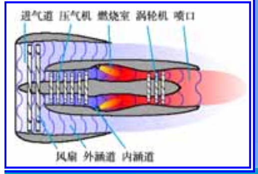
(3) 受力分析

F_x，F_y　　1截面表压力P_1

(4) 连续方程

$$q_{V1} = q_{V2} + q_{V3}$$

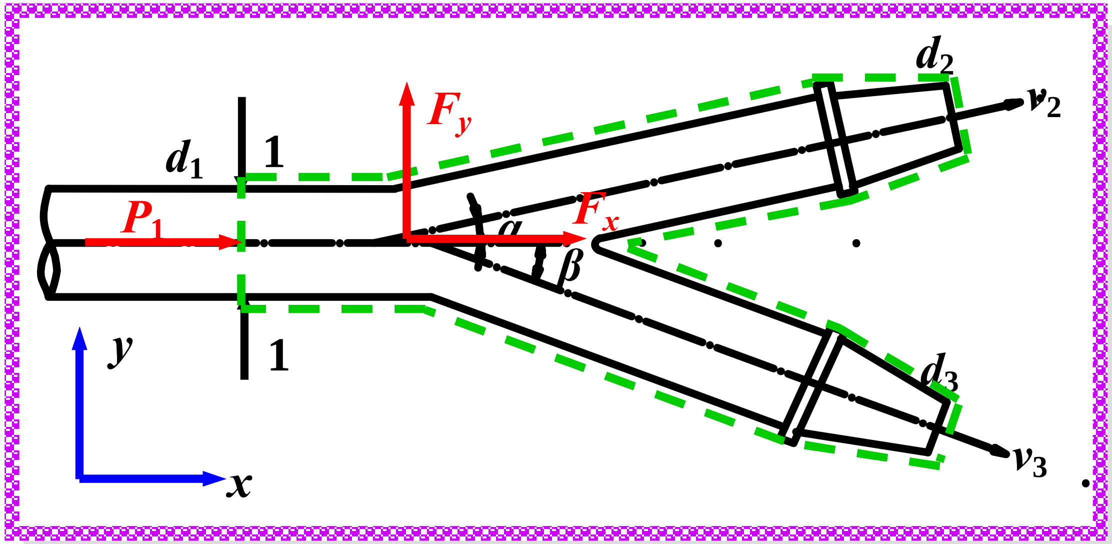
$$v_1 = 8.318\left(\mathrm{m/s}\right) \qquad q_{V1} = 0.147\left(\mathrm{m^3/s}\right)$$



动量方程、伯努利方程综合应用3

(5) 伯努利方程

$$p_{1m}=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)$$
$$=37450\,(\mathrm{Pa})$$

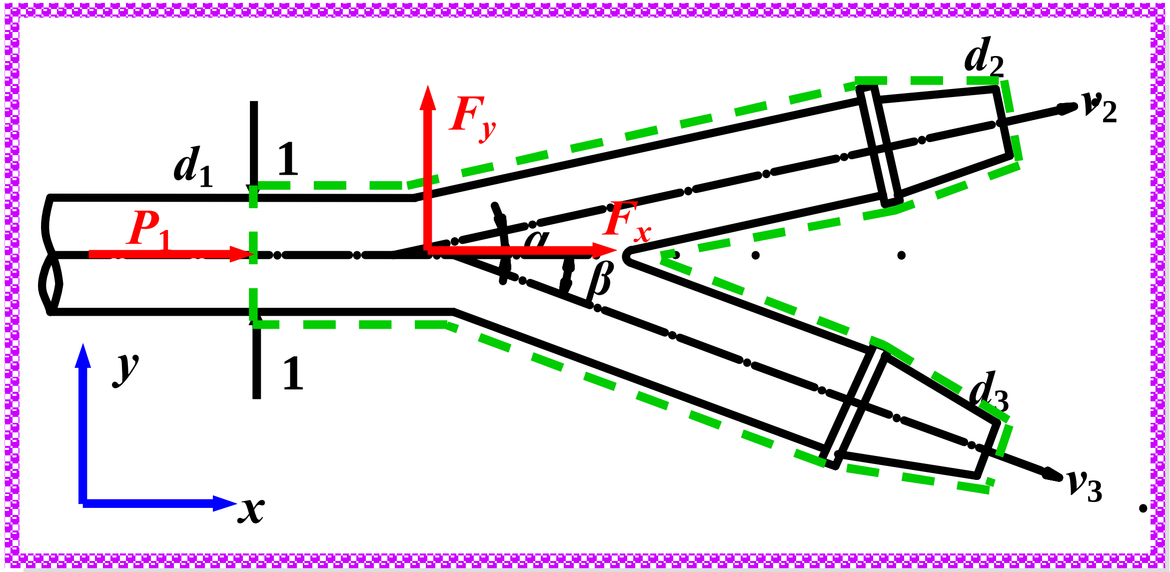


(6) 动量方程 — x 方向

$$F_x+p_{1m}A_1=-\rho v_1^2A_1+\rho v_2^2A_2\cos\alpha+\rho v_3^2A_3\cos\beta$$

$$F_x=-240.3\,(\mathrm{N})$$

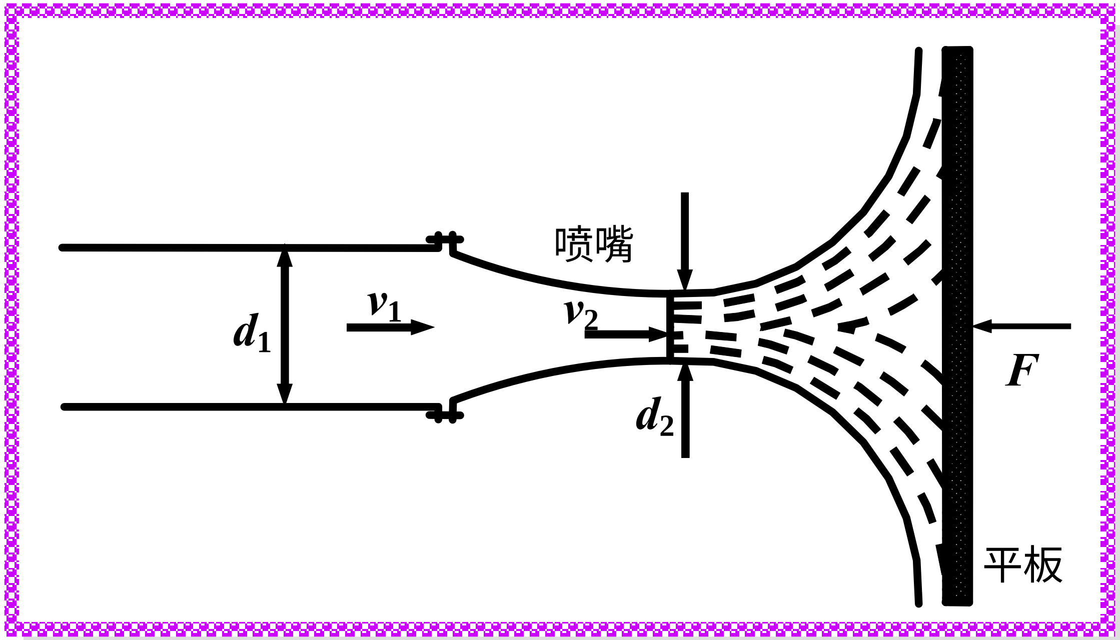
(6) 动量方程 － y 方向

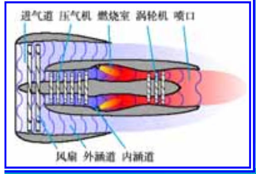


$$F_y = \rho v_2^2 A_2 \sin\alpha - \rho v_3^2 A_3 \sin\beta = 25.37(\mathrm{N})$$

动量方程、伯努利方程综合应用5

水从水平放置的带有喷嘴管道流出后，喷到一垂直平板上。已知：$d_1 = 80$ mm，$d_2 = 40$mm。若平衡平板所需的水平力为502.4N，求：(1) 喷嘴进口处的表压强、水流体积流量；(2) 固定喷嘴所需的水平方向的力。（不计重力和摩擦力）





动量方程、伯努利方程综合应用6

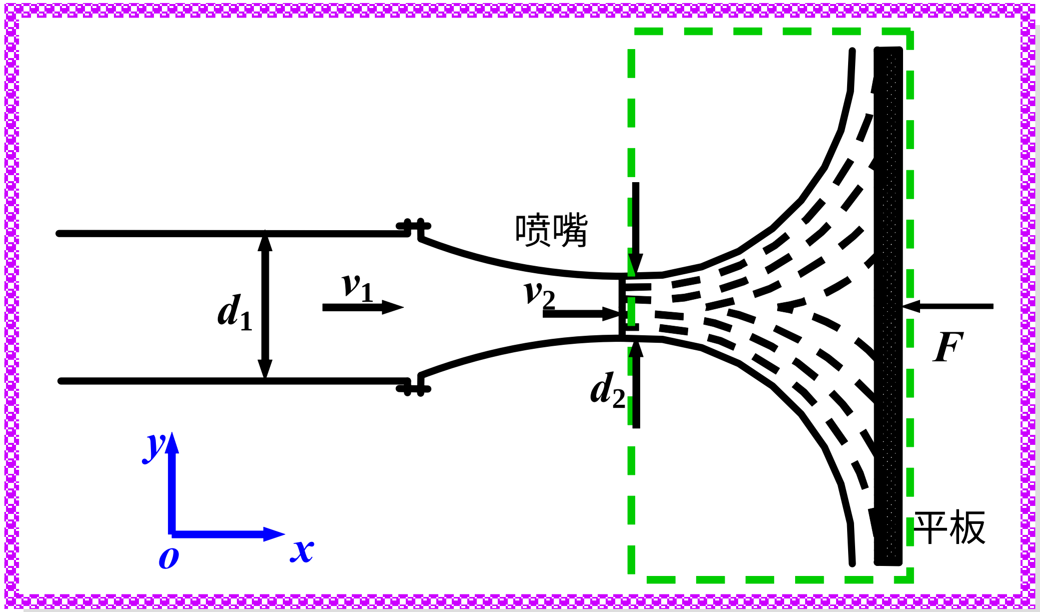
1 求流量 q_V

(1) 坐标系

(2) 控制体

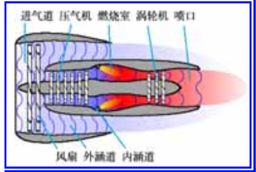
(3) 受力分析 F

(4) 动量方程



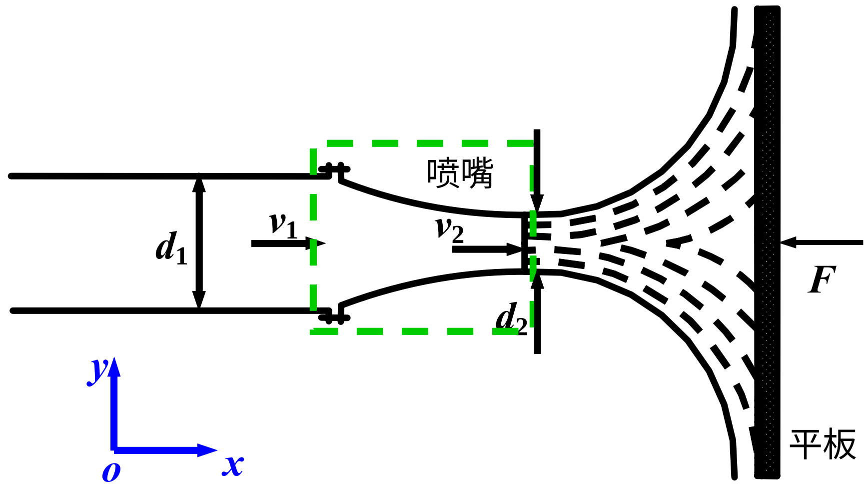
$$F = \rho v_2^2 A_2 \Rightarrow v_2 = 20\,(\mathrm{m/s})$$

$$\Rightarrow q_V = \frac{\pi}{4} d_2^2 V_2 = 0.025\,(\mathrm{m^3/s})$$



动量方程、伯努利方程综合应用7

2 求喷嘴进口表压



(1) 连续方程

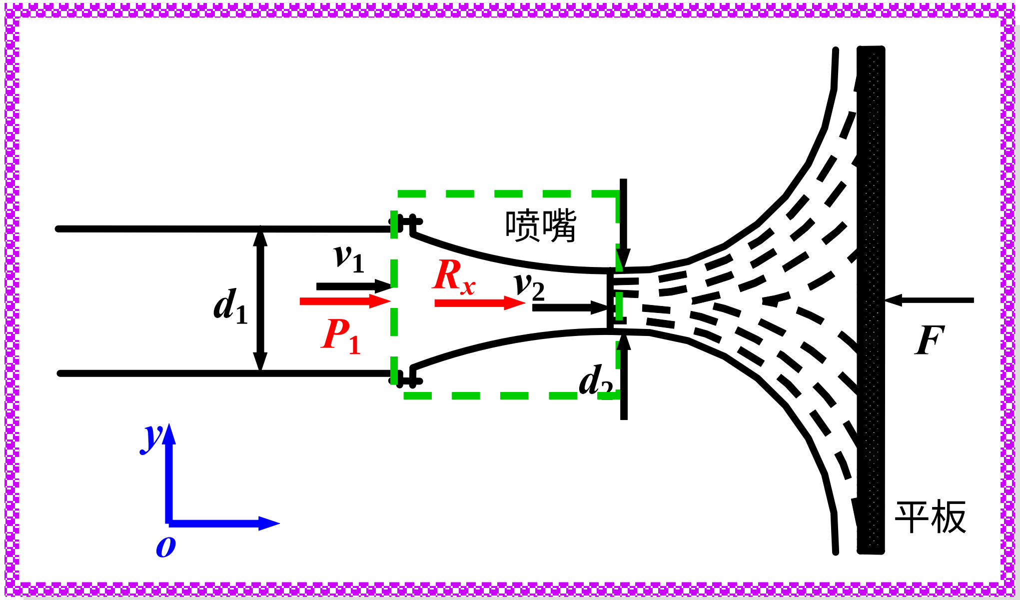
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = q_V$$

$$v_1 = 4.97\ (\mathrm{m/s})$$

(2) 伯努利方程

$$p_{1m} = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 187649.55\ (\mathrm{Pa})$$

3 固定喷嘴的力R_x



(1) 控制体

(2) 受力分析

R_x，P_1

(3) 动量方程 － x方向

$$R_x + p_{1m} A_1 = \rho q_V \left(v_2 - v_1 \right)$$

$$R_x = -567.5\,(\mathrm{N})$$

作业

作业：P.198～207

- 3 – 6
- 3 – 11
- 3 – 16
- 3 – 30
- 3－34 入口表压140kPa

小结1

描述流体运动的两种方法

- 拉格朗日方法
- 欧拉方法

物质导数

采用欧拉变量描述流体质点某物理量对时间的变化率

小结2

迹线、流线、染色线

- 三种线的特点、区别与联系
- 迹线方程、流线方程

伯努利方程－沿流线积分，总流

适用条件，物理、几何意义、应用

小结3

动量方程及其应用

➡ 不可压缩定常流，有限个进出口

微分形式的连续方程和运动方程

➡ 定常、不可压、理想

流量不变方程

小结4

公式

- **物质导数**

$$\frac{DN}{Dt}=\frac{\partial N}{\partial t}+v_x\frac{\partial N}{\partial x}+v_y\frac{\partial N}{\partial y}+v_z\frac{\partial N}{\partial z}$$

- **迹线方程**

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}=dt$$

小结5

- 流线方程

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}$$

- 质量流量和体积流量

$$q_m=\int_A \rho v dA \qquad q_V=\int_A v dA$$

- 微分形式连续方程

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{v}=0$$

小结6

- 欧拉运动微分方程 $$\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{D\vec{v}}{Dt}$$
- 流量不变方程 $$(q_m)_{in}=(q_m)_{out} \qquad (q_V)_{in}=(q_V)_{out}$$
- 沿流线积分的伯努利方程 $$\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C$$
- 总流伯努利方程 $$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1\bar{v}_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2\bar{v}_2^2}{2g}$$

小结7

动量方程

$$\sum \vec{F} = \sum \left(\rho q_{Vi} \beta_i \vec{v}_i\right)_{\text{out}} - \sum \left(\rho q_{Vi} \beta_i \vec{v}_i\right)_{\text{in}}$$