第二章 流体静力学

一、流体静压强及其特性

二、重力场中流体静压强的分布

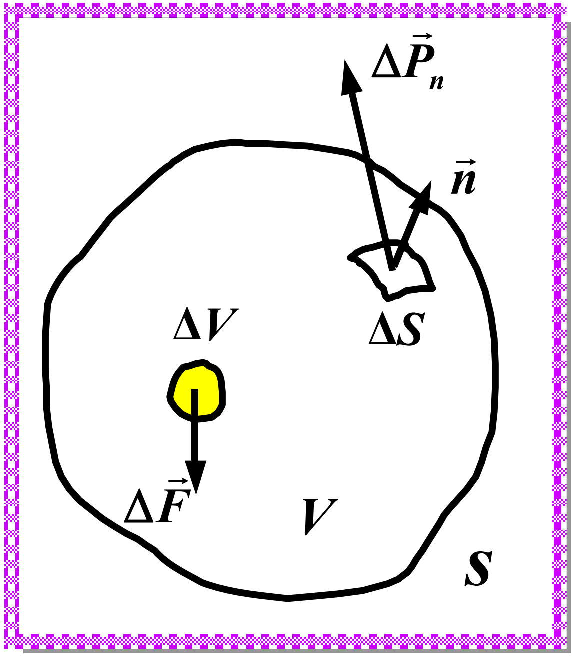
三、静压强的测量

四、作用在壁面上的流体静压力

2.1 作用在流体上的力

质量力

- 作用在流体的每个质点上
- 大小与流体质量成正比
- 重力、惯性力等

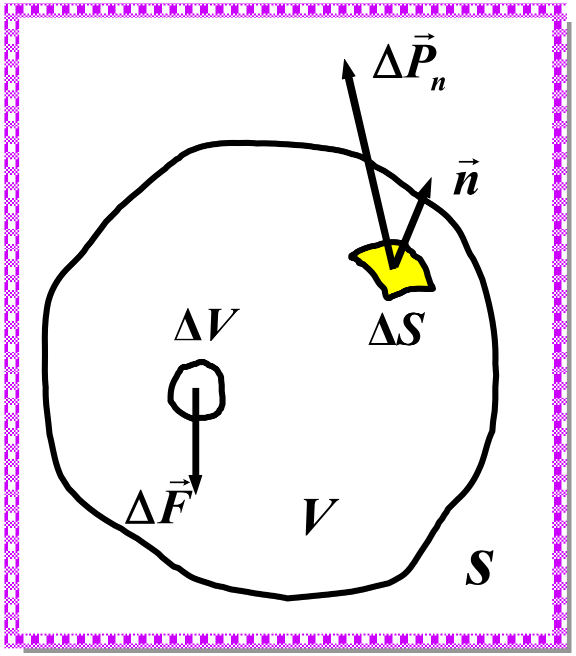


单位质量力 ⇒ $$\vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\rho \Delta V}$$ m/s^2

作用在流体上的力2

表面力

- 作用在流体的封闭界面上
- 大小与流体表面积成正比
- 压力、摩擦力等



表面应力

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}_n}{\Delta S}$$

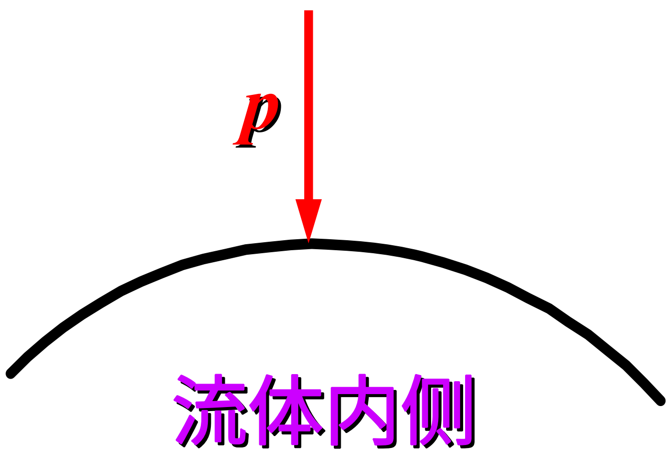
Pa

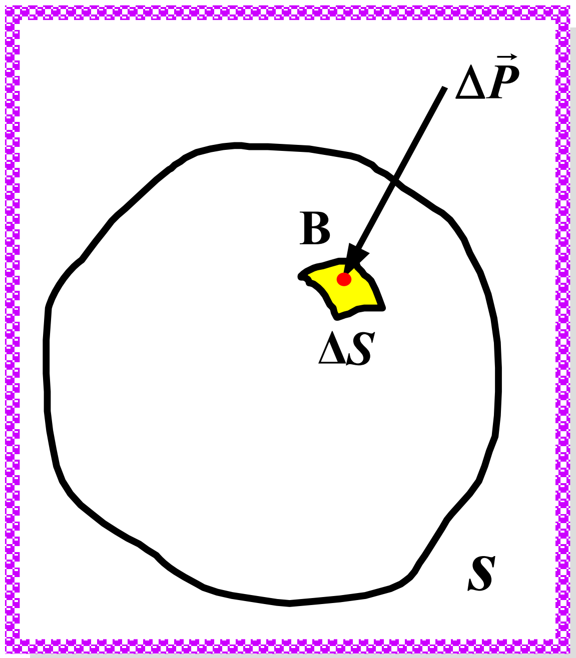
流体静压强及其特性

流体静压强

$$p=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}$$

流体静压强的方向垂直于作用面，并指向流体内部





流体静压强的特性2

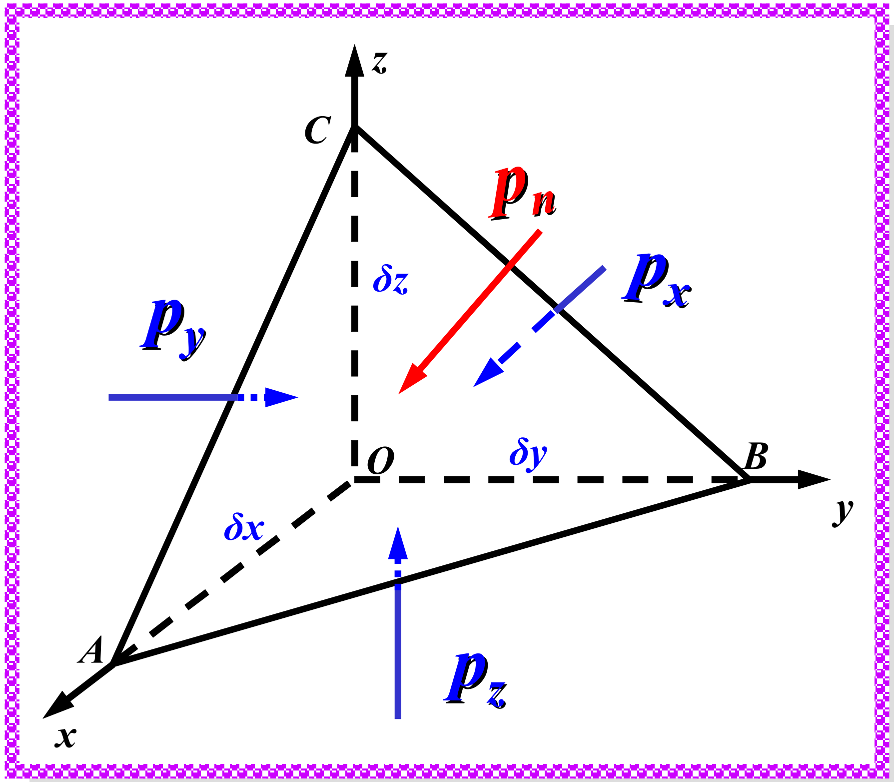
静止流体任意点处静压强的大小与其作用面方位无关，只是作用点位置的函数

- 质量力 ⇐ 重力、惯性力

$$\vec{f}\cdot\rho\frac{1}{6}\delta x\delta y\delta z$$

- 表面力 ⇐ 只有法向力

$$p_x\frac{1}{2}\delta y\delta z \qquad p_y\frac{1}{2}\delta x\delta z$$

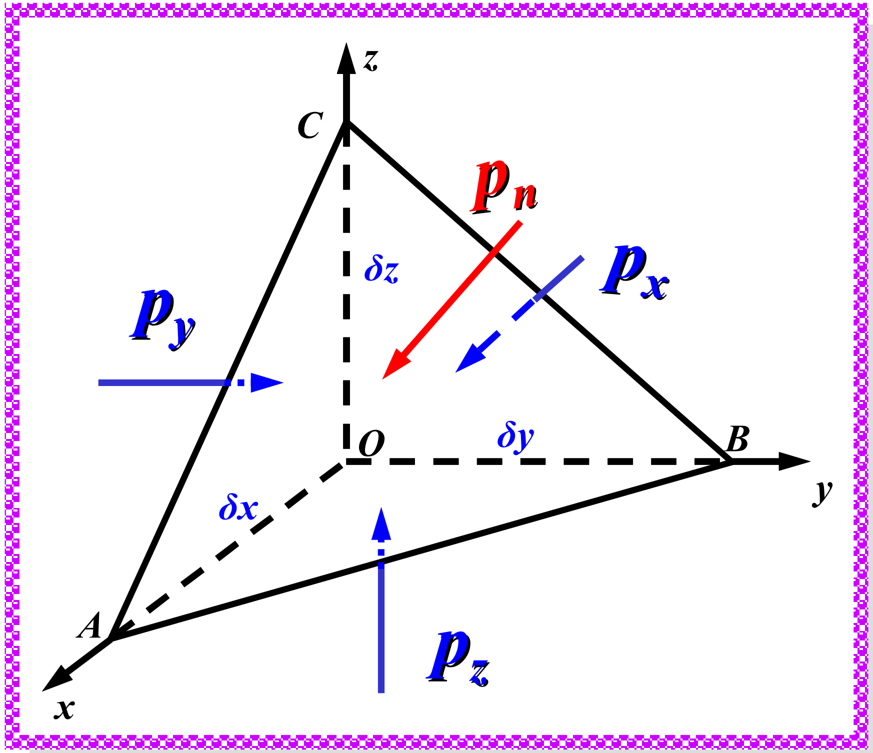


流体静压强的特性3

- **表面力** $p_z \frac{1}{2}\delta x \delta y$ $p_n \Delta A$

- **所受合力为零**

质量力与压力相平衡，压强只是作用点位置的函数



$$p = f(x, y, z)$$

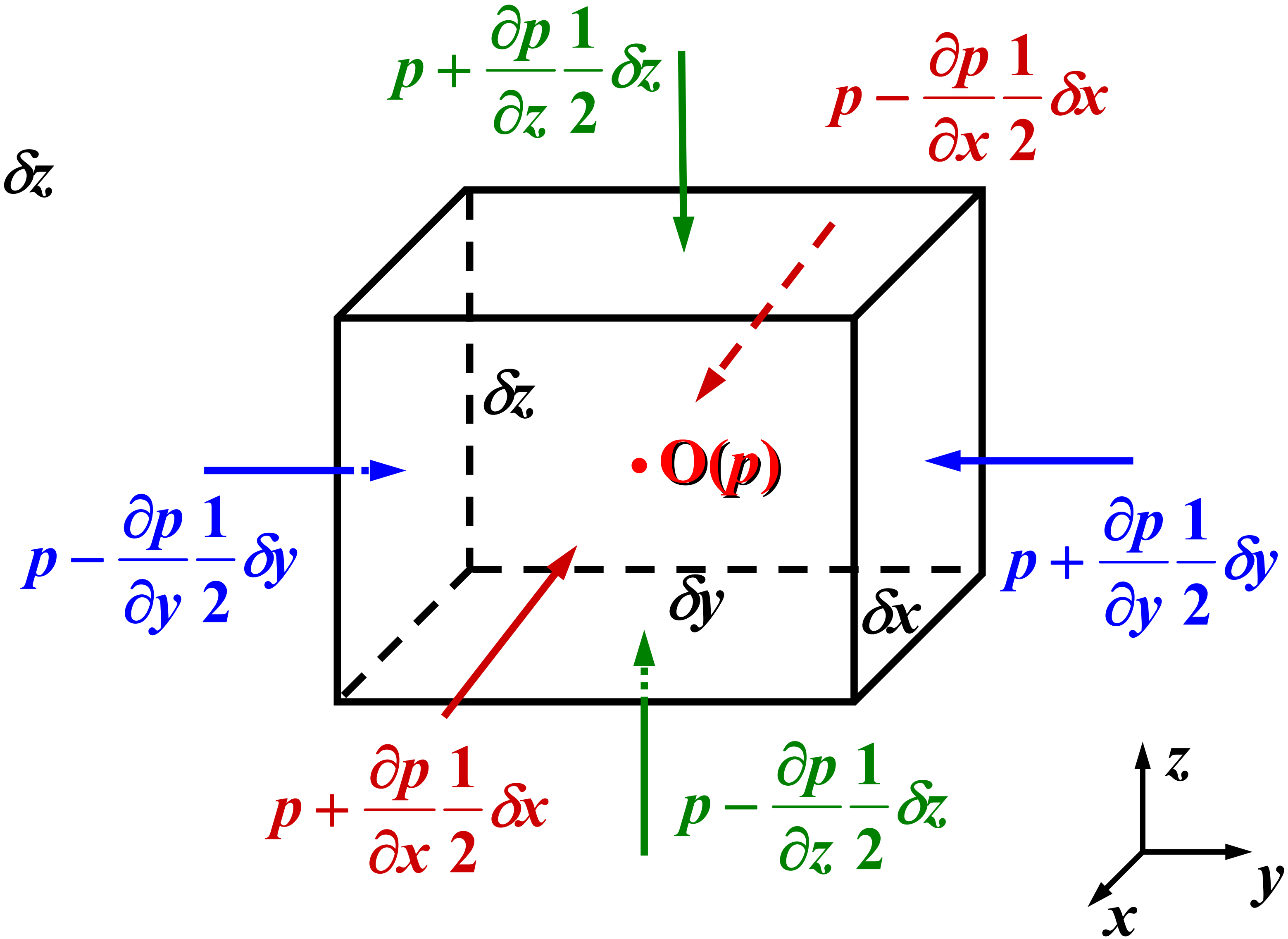
理想流体压强 $p = f(x, y, z)$ 流体中不存在切向力

- **质量力**

$$\vec{f}\cdot\rho\delta x\delta y\delta z$$

- **表面力**

泰勒级数展开略去高阶小项



静止流体平衡微分方程2

六面体微元所受的表面力合力

$$-\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z-\vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z-\vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

$$=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z=-\nabla p\,\delta x\delta y\delta z$$

压强梯度

静止流体平衡微分方程3

静止流体受力平衡

$$\underbrace{\vec{f}\cdot\rho\delta x\delta y\delta z}_{\text{质量力}}\ \underbrace{-\nabla p\delta x\delta y\delta z}_{\text{压力}}=0$$

静止流体平衡方程—欧拉平衡方程

$$\boxed{\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0}$$

静止流体中压强的变化由质量力引起

静止流体平衡微分方程4

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

- 压强梯度导致的净力必须由重力或加速度或流体其它效应平衡
- 压强梯度描述压强在空间中最大变化率的方向和大小，由质量力决定
- 压强在质量力方向上变化最快，与质量力垂直的方向无变化

⇒ 等压面与质量力处处垂直

力势函数

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{均质不可压}]{\rho = \text{常数}} \begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial y} = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial z} = \dfrac{\partial f_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial x} = \dfrac{\partial f_x}{\partial z} \end{cases}$$

力势函数 $\Rightarrow$ $W(x, y, z)$ 质量力做功与路径无关

$$\Rightarrow \boxed{f_x = -\frac{\partial W}{\partial x},\ f_y = -\frac{\partial W}{\partial y},\ f_z = -\frac{\partial W}{\partial z}}$$

平衡微分方程的积分

$$
\left.\begin{cases}
-\dfrac{\partial W}{\partial x}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 & \times dx \\
-\dfrac{\partial W}{\partial y}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 & \times dy \\
-\dfrac{\partial W}{\partial z}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 & \times dz
\end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{求和}} dW+\frac{dp}{\rho}=0
$$

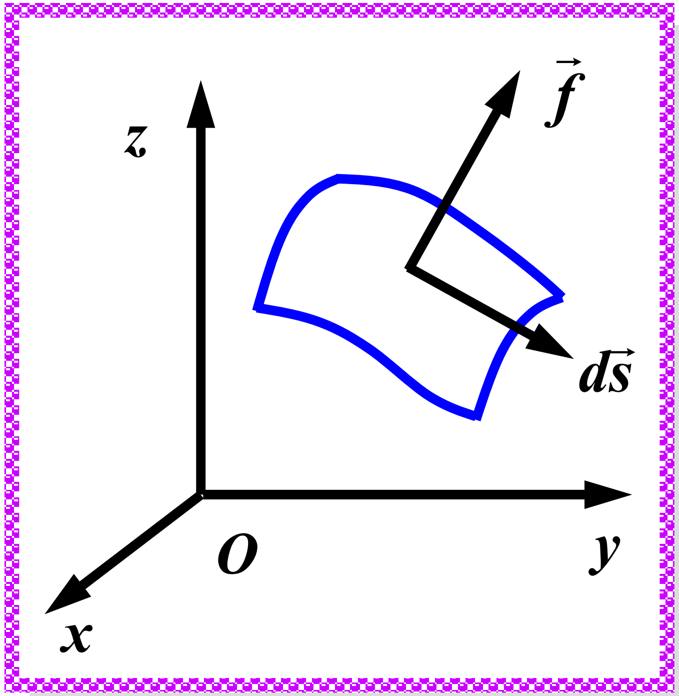
不可压缩流体平衡方程

$$
\Rightarrow \quad \boxed{p=p_0-\rho\left(W-W_0\right)}
$$

等压面和等势面

等压面微分方程

$$-dW = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \vec{f}\cdot d\vec{s} = \frac{dp}{\rho} = 0$$



等压面处处与质量力垂直

$W =$ 常数　　等压面与等势面重合

等压面思考题

一圆桶中盛有水，静止时自由面为________当圆桶以匀角速度绕中心轴旋转时，自由面为________

A、斜面

B、曲面

C、水平面

2.3 重力场中的平衡流体

条件 → 连通的静止流体，只在 z 向有重力作用，z 的正方向垂直向上

方程 →
$$\begin{cases} 0-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ 0-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ -g-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases}$$
→
$$\frac{dp}{dz}=-\rho g$$

压强只是 z 的函数，z 方向压强梯度为负

不可压缩流体压强分布1

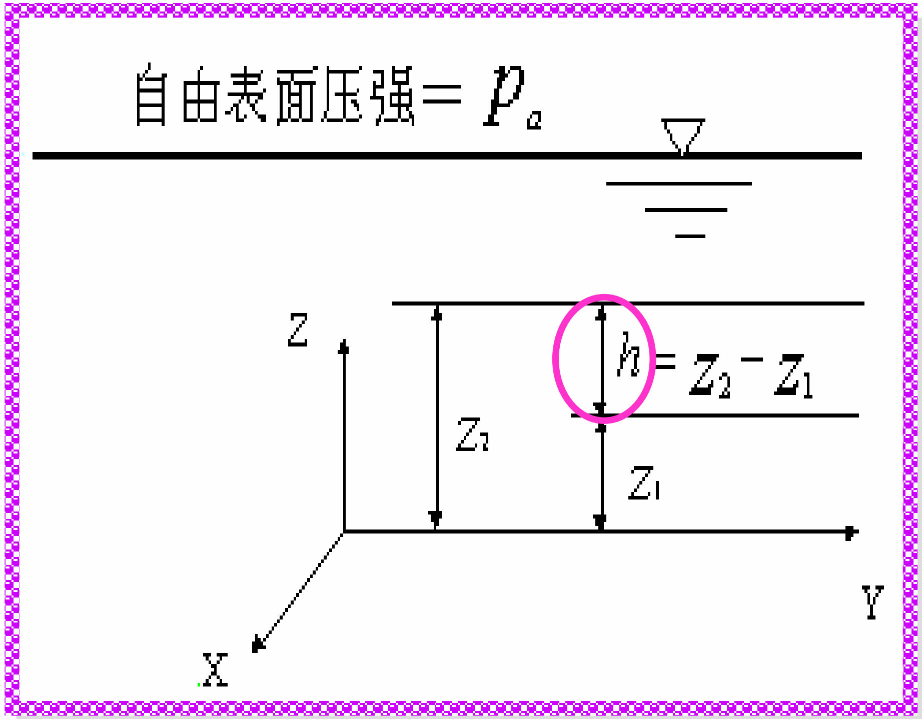
均质不可压缩流体 → $\rho =$ 常数

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

→ $$p_1 = p_2 + \rho g h$$

z_2 与自由面等高

→ $$p_1 = p_a + \rho g h$$



不可压缩流体压强分布2

公式的内涵 ⇐ $p_1 = p_2 + \rho g h$

- 在铅垂方向，压强与淹深成线性关系
- 等压面为水平面

$$p_1 = p_2 + \rho g h \Rightarrow h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

密度为 ρ，高度为 h 的一段液柱的重量

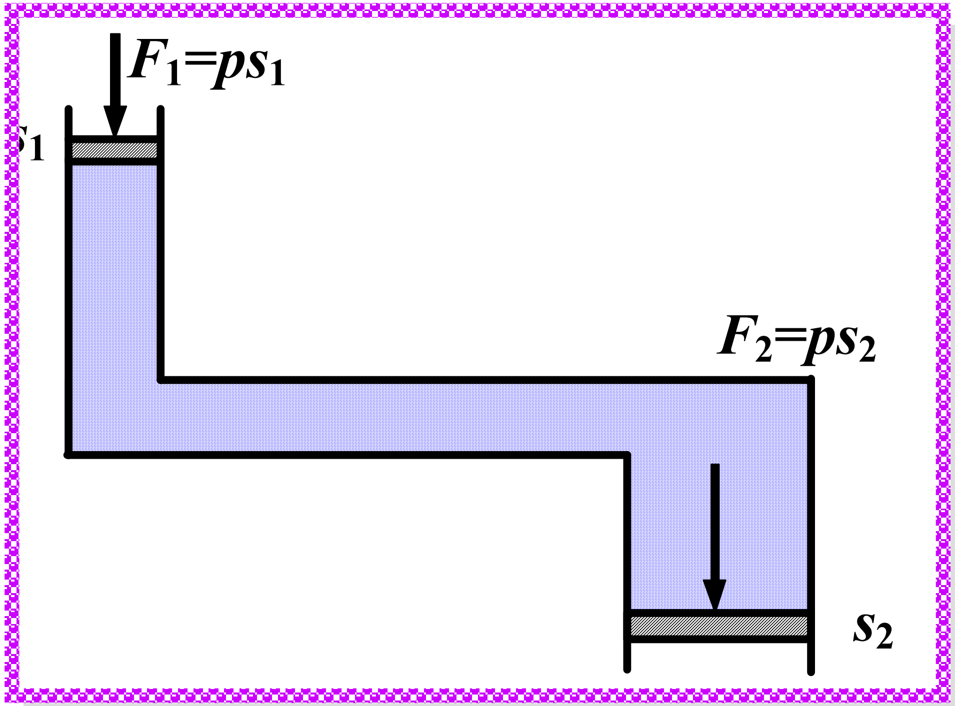
☞ $p_2 = 0$，绝对压强对应的液柱高度

☞ $p_2 = p_a$，表压（计示压强）对应的液柱高度

帕斯卡原理

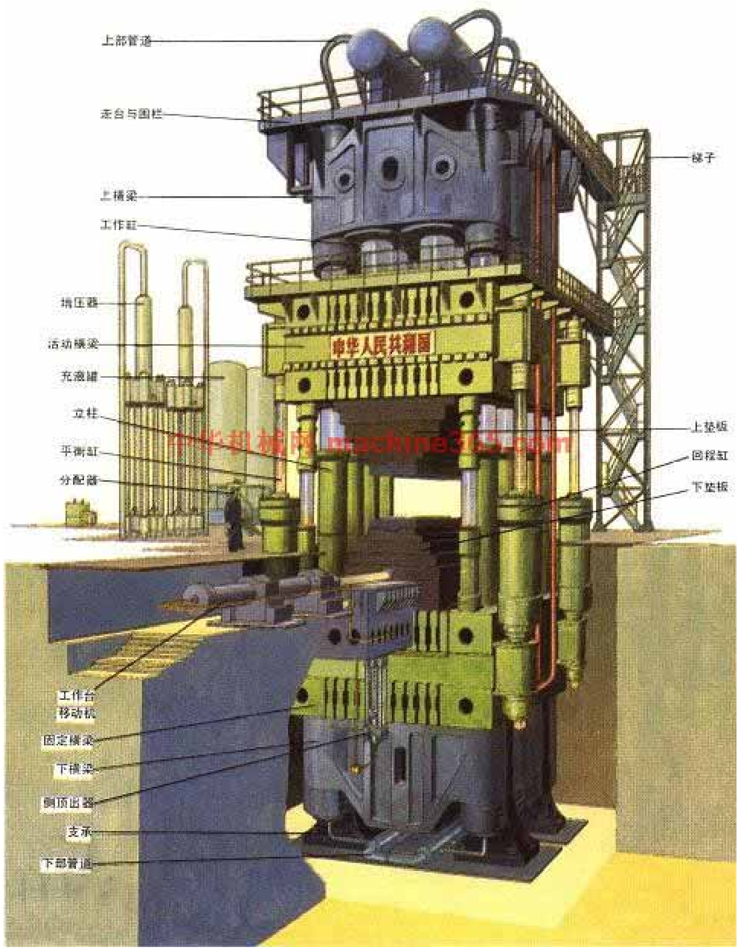
$$p_1 = p_2 + \rho g h \Rightarrow \delta p_1 = \delta p_2$$

充满液体的连通器内，一点的压强变化可瞬时间传递到整个连通器内



$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{s_2}{s_1}$$

水压机



六个工作缸，气压水，水压大活塞，大活塞压钢锭

中国一重，15000 吨水压机，2006. 12

几何意义和能量意义1

液体静压强分布的另一种表达方式

由 $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad p = -\rho g z + C$

$\Longrightarrow$

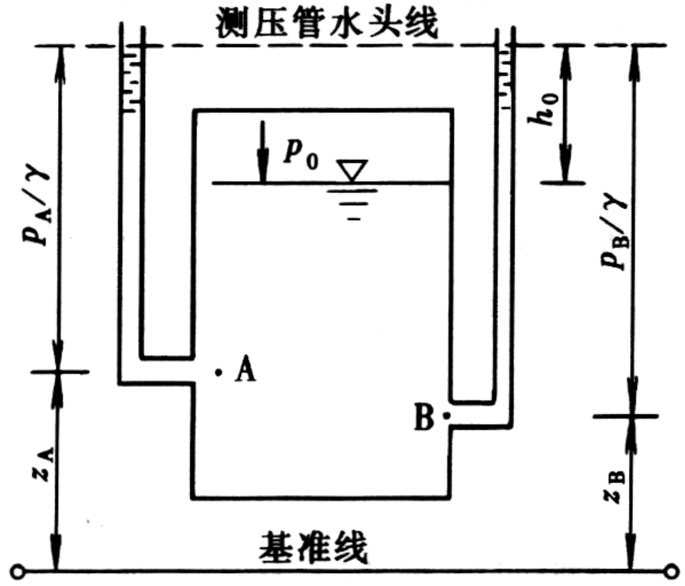
$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} = C}$$

同一种静止液体中任意点的 $z + p/\rho g$ 总是常数

几何意义和能量意义2

几何意义

z → 位势头或位置水头



$p/\rho g$ → 测压管高度或压强水头

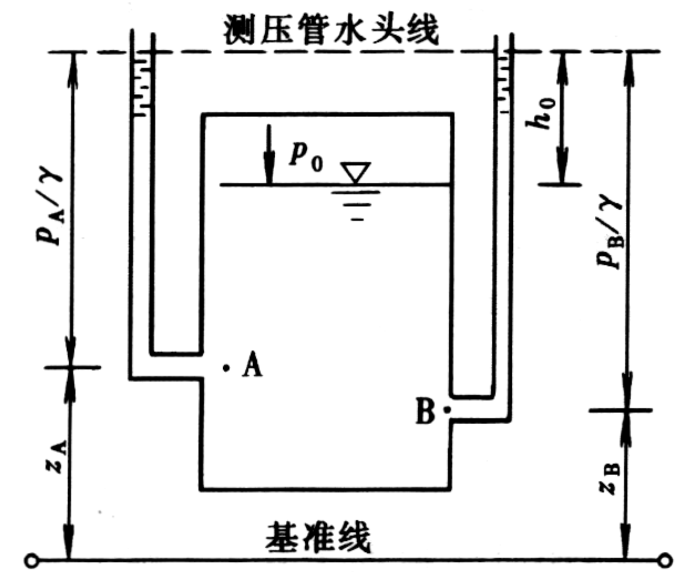
- 液体中某点在压强作用下液体沿测压管上升的高度

$z+p/\rho g$ → 测压管水头

- 测压管内液面相对于基准面的高度

$$z+p/\rho g=C$$

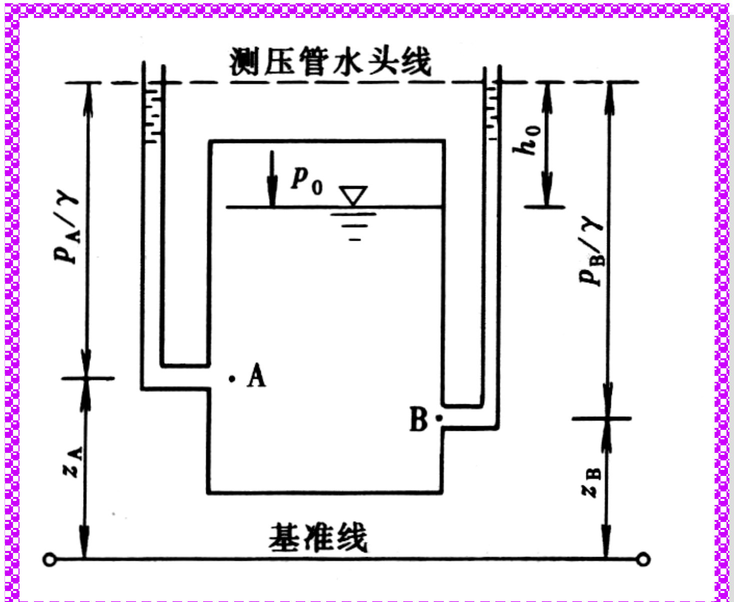
同一种静止液体中各点测压管水头均相等

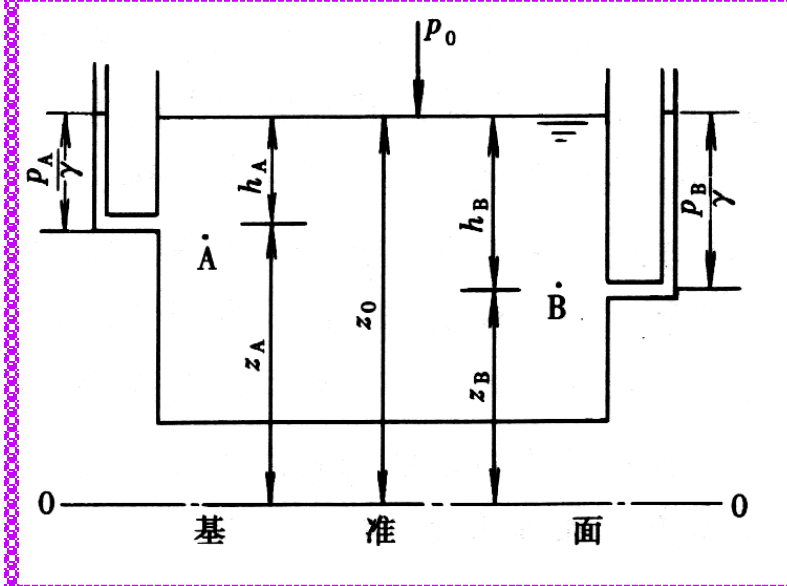


几何意义和能量意义4

测压管水头线

- **连接各点测压管水头的液面线，若测压管开口通大气，则液面线各点压强均为 p_a**





几何意义和能量意义5

物理意义　$z+p/\rho g=C$

z → 单位重量流体的位置势能

$p/\rho g$ → 单位重量流体的压强势能

$z+p/\rho g$ → 单位重量流体的总势能

同种静止流体中单位重量液体的总势能相等

2.4 静压强的计算与测量

基准

绝对真空

当地大气压强

绝对压强

p

计示压强（表压）

p_m

真空压强

p_v

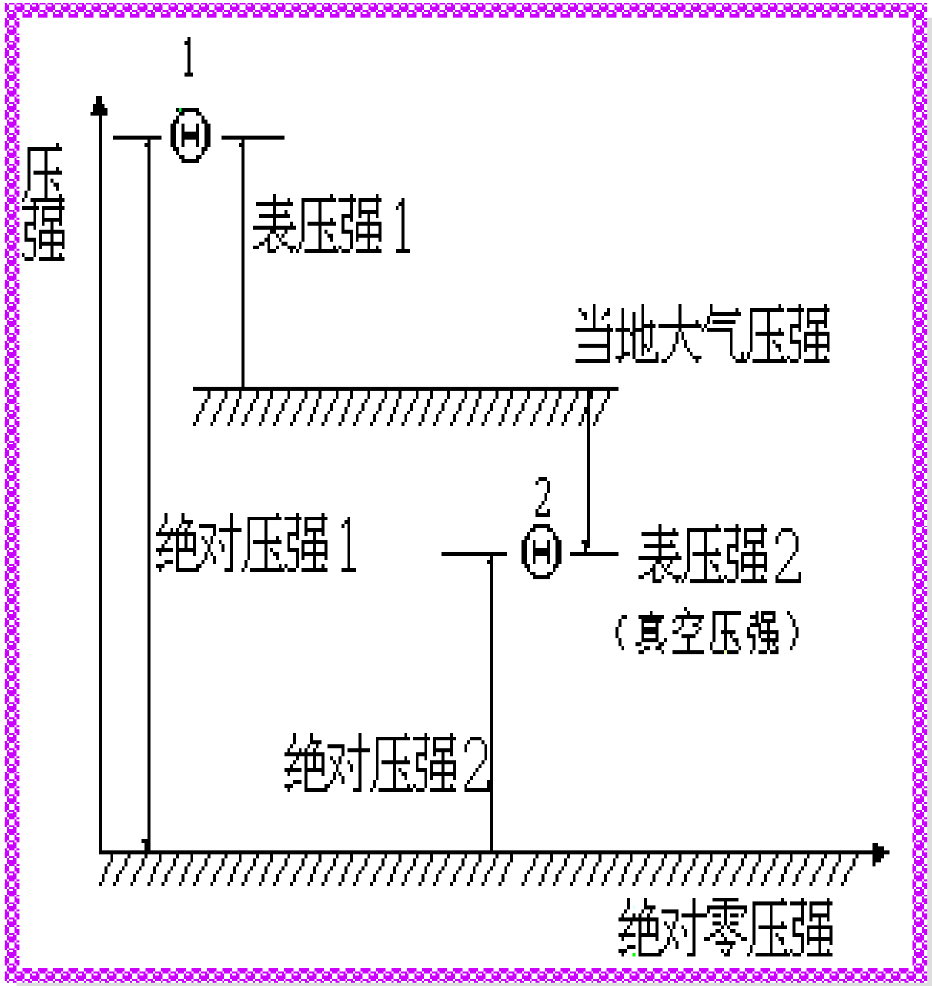
绝对压强、表压、真空压强

- 绝对压强总为正
- 表压有正有负

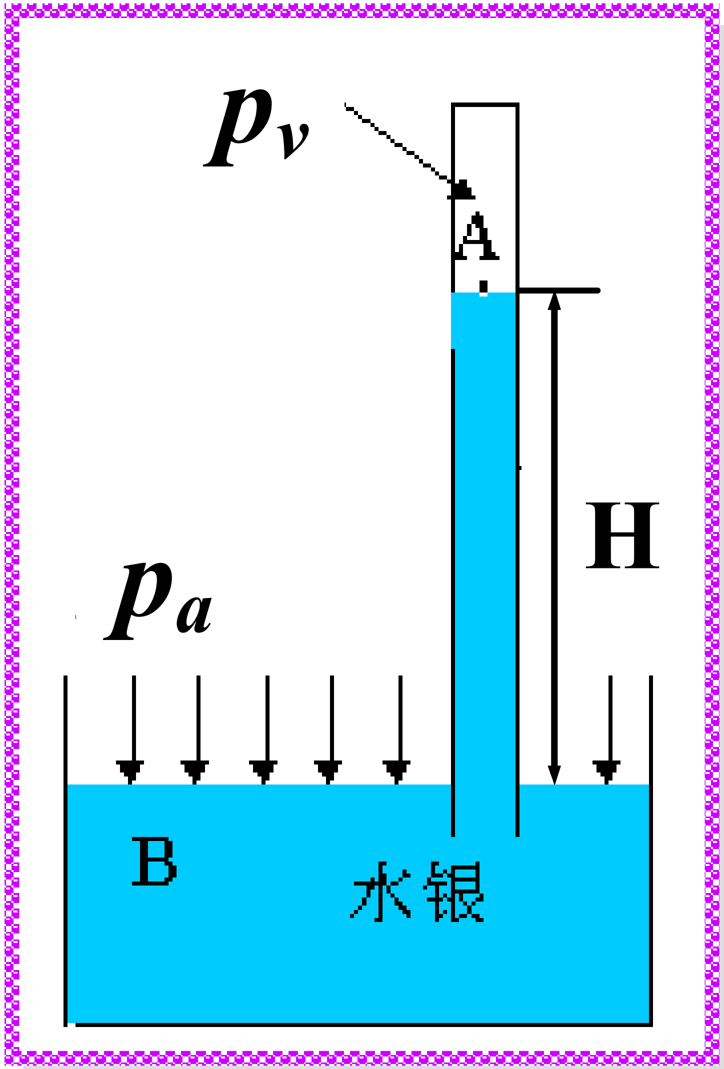
$$p_m = p - p_a$$

- 表压为负，取其绝对值，为真空压强

$$p_v = p_a - p$$



大气压强的测量



- 大气压强随当地经纬度，海拔高度及季节时间的不同而不同

1 标准大气压

$1.013 \times 10^5 \mathrm{Pa}$

$H = 760\mathrm{mmHg}$

压强的单位

国际单位制：$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$

工程单位制：大气压(at、atm), 巴(bar), 液柱高度

标准大气压

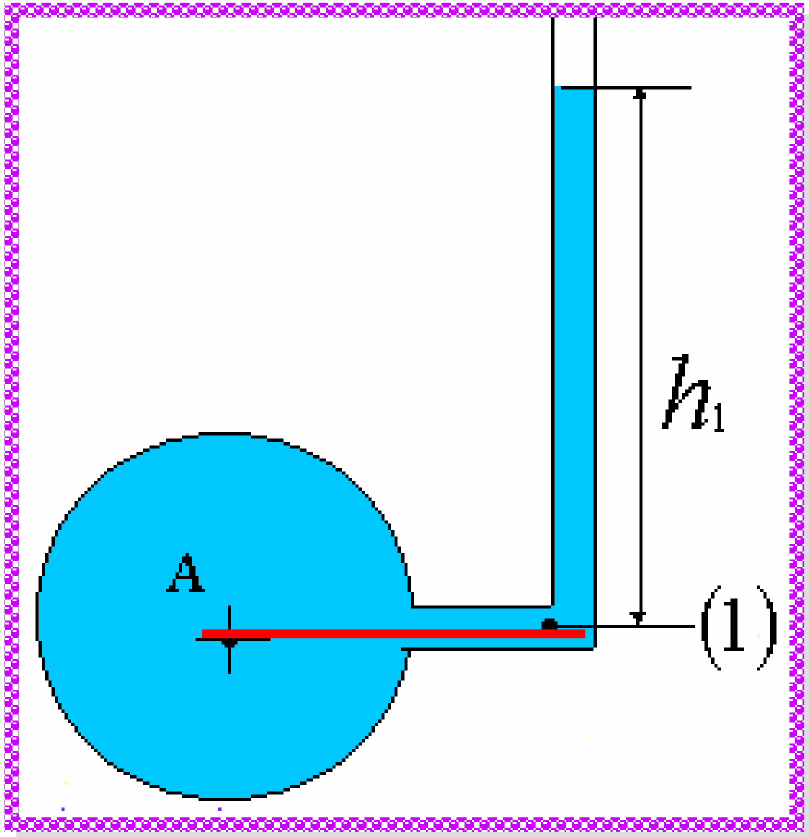
$$1\ \text{atm} = 1.013\times10^5\ \text{Pa} = 760\ \text{mm (Hg)} = 10.33\ \text{m}\ (H_2O)$$

工程大气压

$$1\ \text{at} = 1\ \text{kgf/cm}^2 = 0.981\times10^5\ \text{Pa} = 10\ \text{m}(H_2O)$$

单管测压计

$$p_{Am} = \rho g h_1$$



单管测压计的缺点

- 被测压强不能太大
- 只能测量液体压强
- 被测压强必须高于当地大气压强

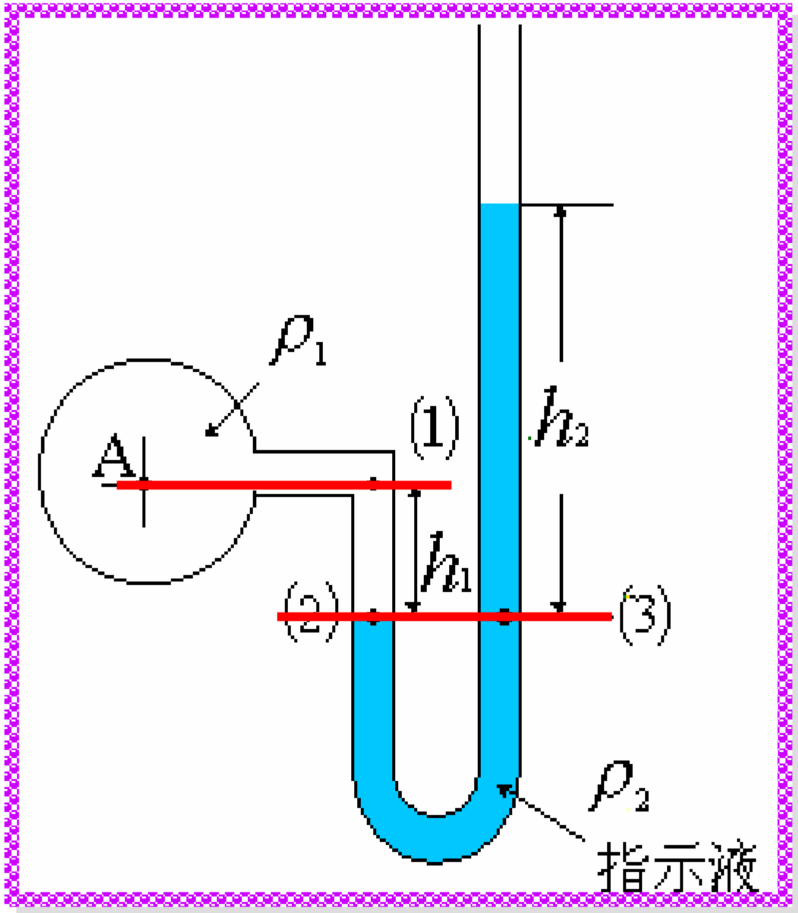
U 型管测压计1

$$p_{Am} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

- 作等压面

  被测点　　　相界面

- 等高的两点必须在连通的同一种液体中



- 沿液柱向上，压强减小液柱向下，压强增大

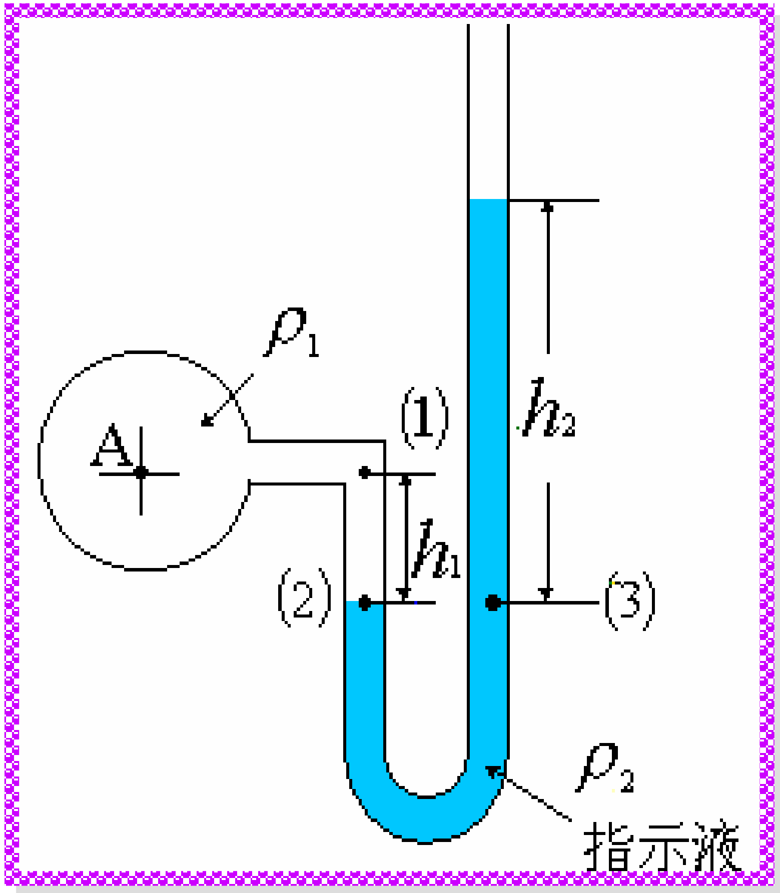
U 型管测压计2

U 型管测压计特点

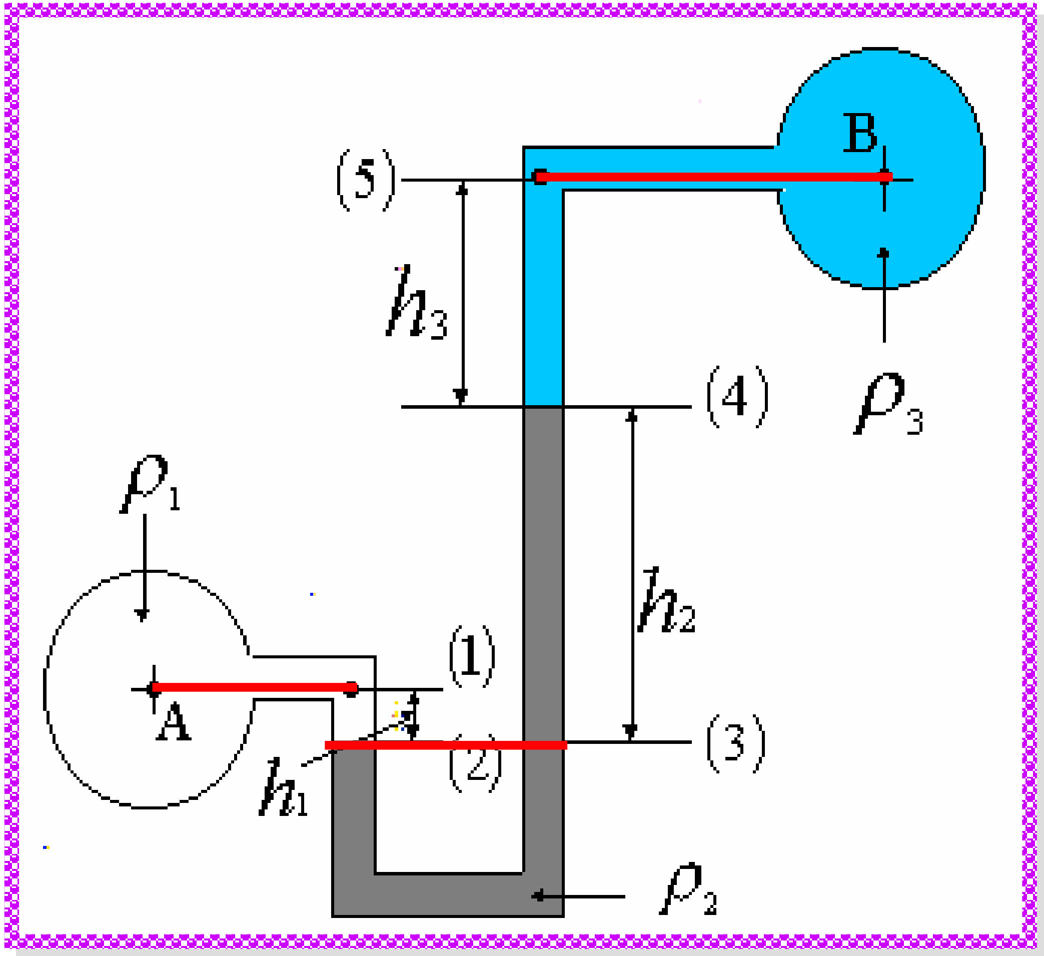
- 测量范围较大
- 可测量气体压强

$$p_{Am}=\rho_2 g h_2-\cancel{\rho_1 g h_1}\approx\rho_2 g h_2$$

- 可测量真空压强
- 指示液不能与被测液体掺混



差压计



$$p_A - p_B = \rho_3 g h_3 + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

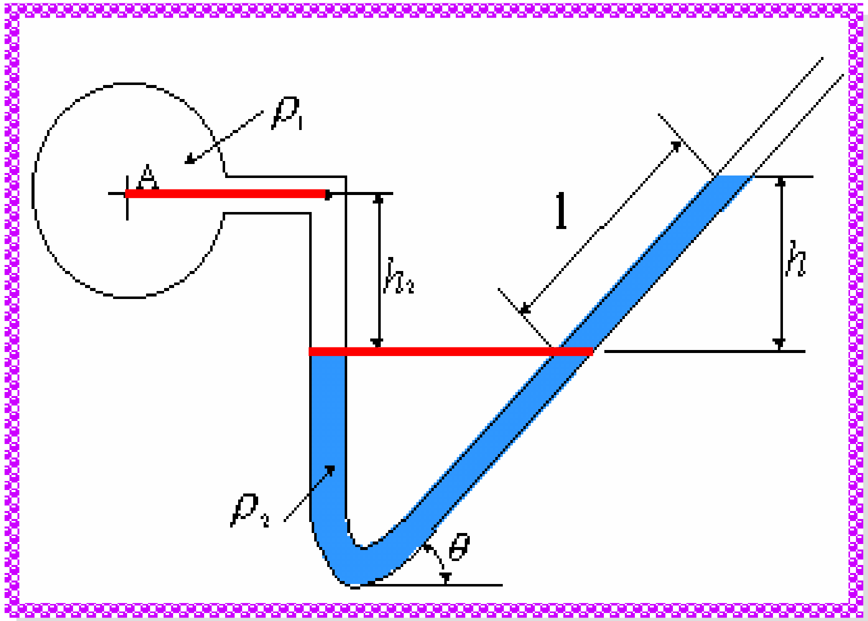
倾斜式测压计（微压计）

通常用来测量气体压强

$$p_{Am} = \rho_2 g l \sin\theta - \rho_1 g h_1$$

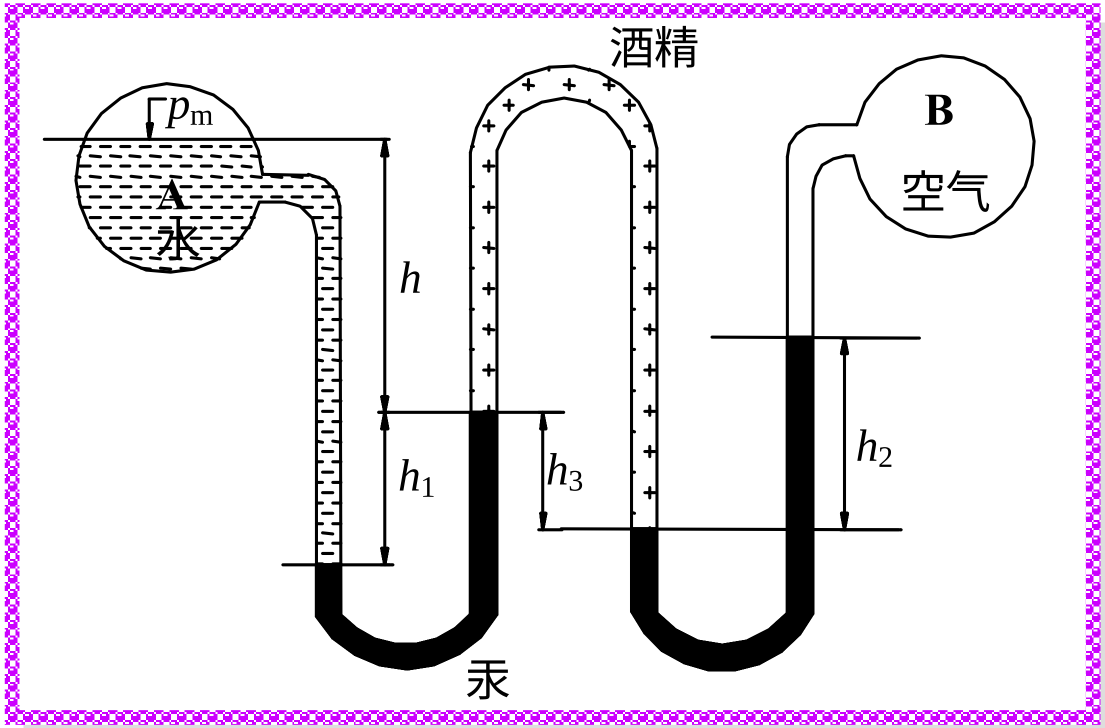
- 倾斜管放大了测量距离，提高了测量精度

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\sin\theta}$$



U型管测压计例题

如图所示多管式压强计，B容器中空气表压 $p_{Bm}=-2.74\times10^4$ Pa，h = 500mm，h_1 = 200mm，h_2 = 250mm，h_3 = 150mm，求容器A上部的表压 p_m



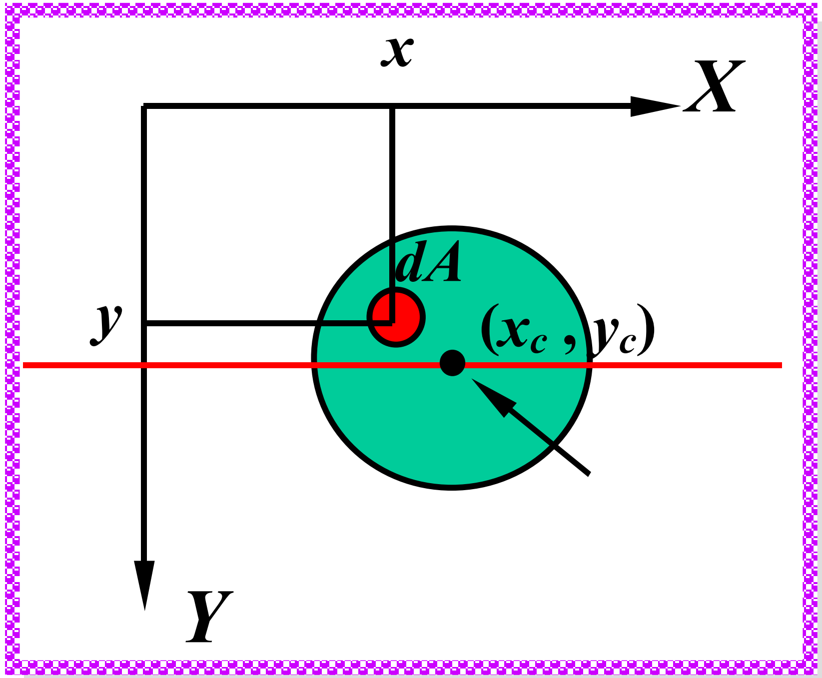
均质平板形心

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x\,dA$$

$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA$$

A 对 x 轴的惯性矩

$$I_x = \int_A y^2\,dA$$

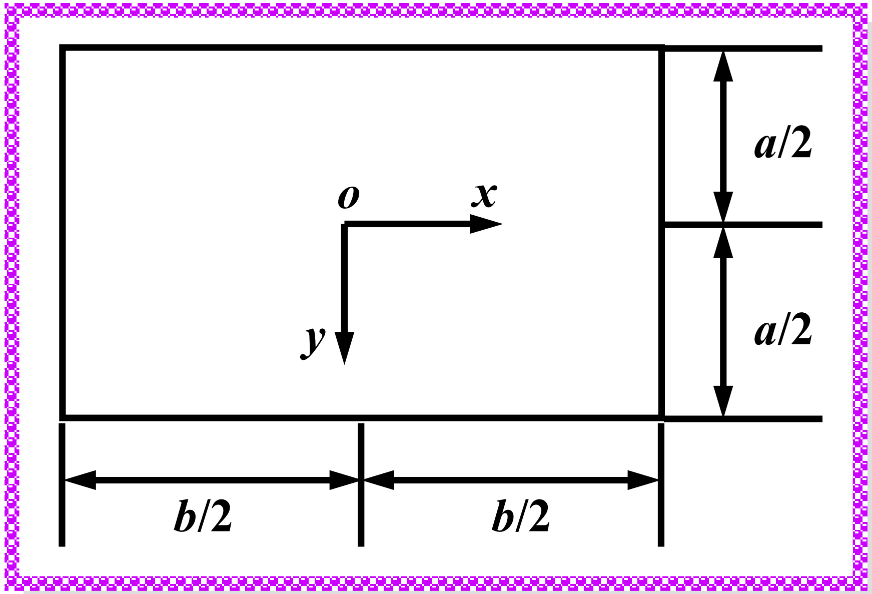


惯性矩移轴定理

$$\boxed{I_x = I_{xc} + y_C^2 A}$$

I_{xc} 为A对通过形心并与x 轴平行的轴的惯性矩

常见形状的惯性矩及离心矩

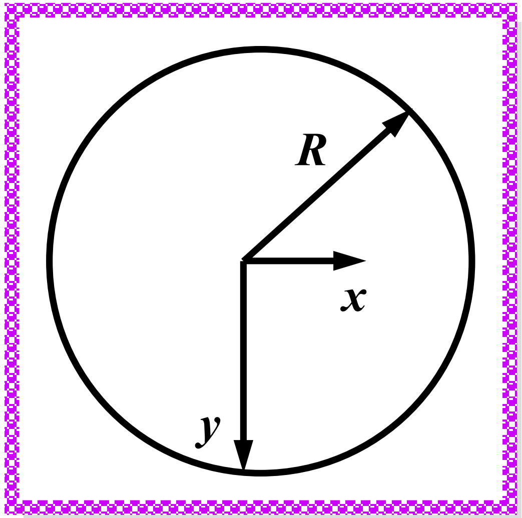


$$A = ba$$

$$I_{xC} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yC} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyC} = 0$$

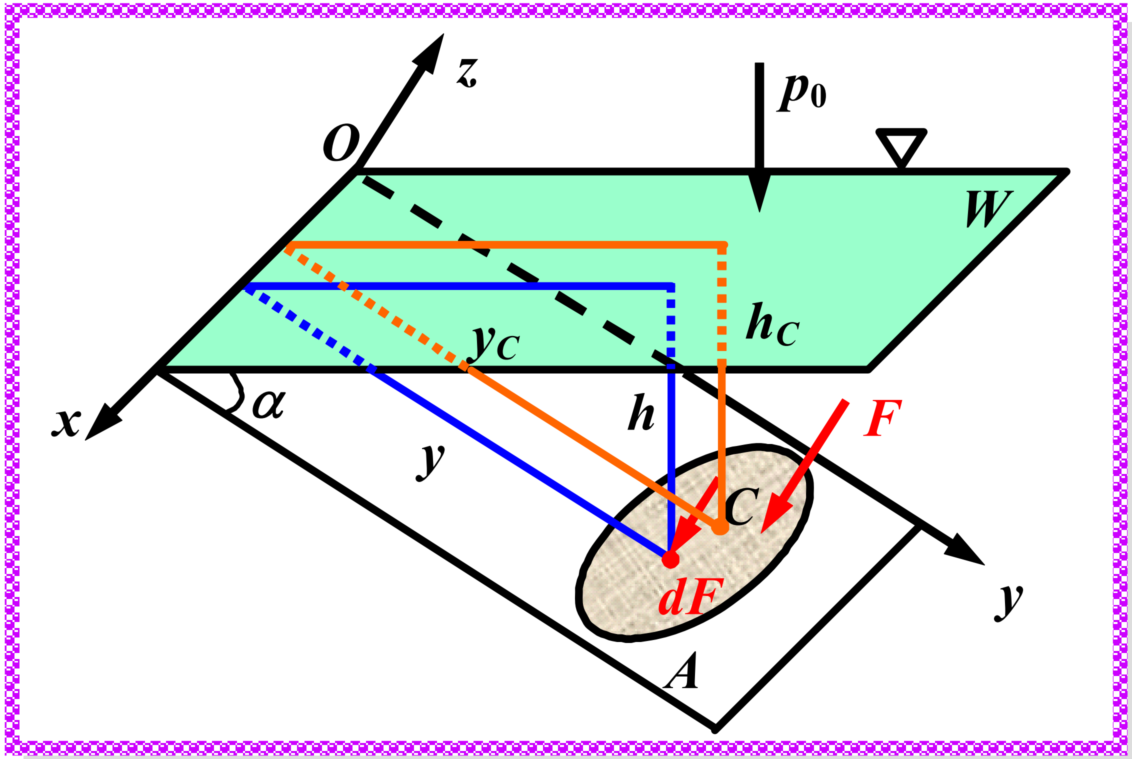


$$A = \pi R^2$$

$$I_{xC} = I_{yC} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyC} = 0$$

作用在平面上的总压力



- 平行力系作用在一侧平板上的合力

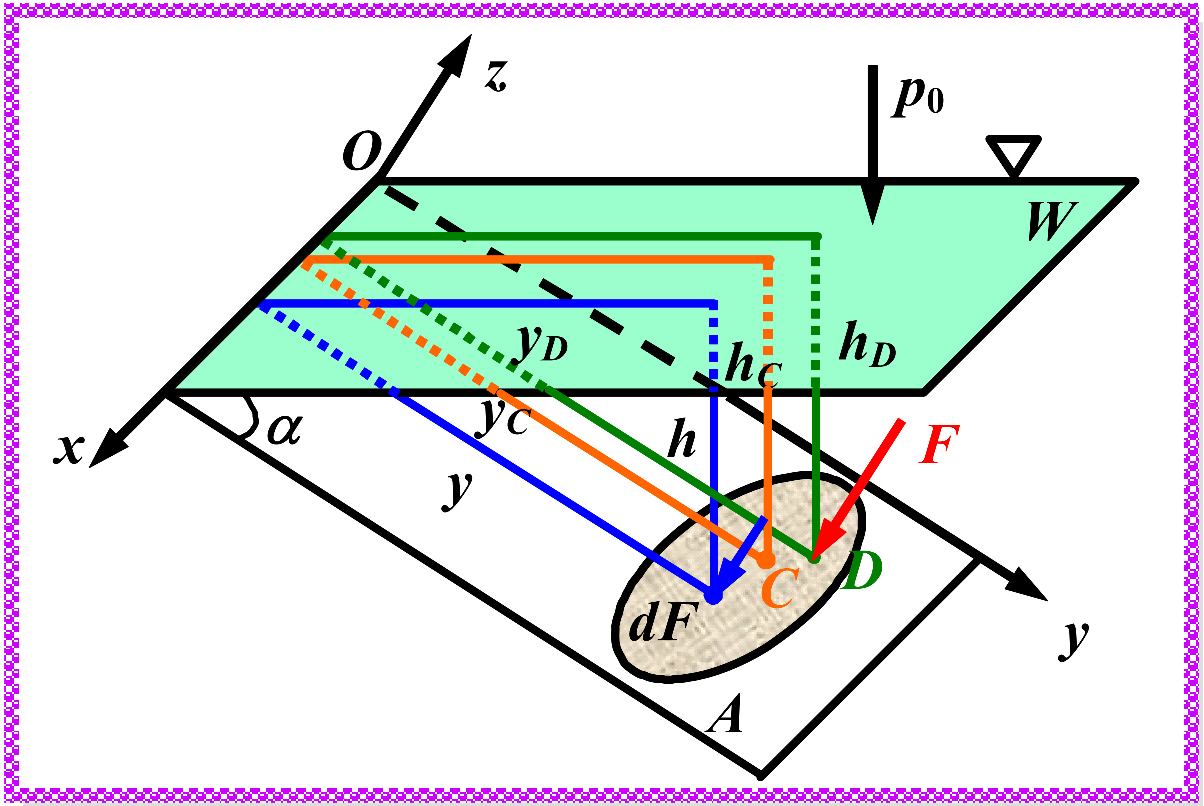
$$F=\left(p_0+\rho g h_C\right)A$$

$h_C = y_C \sin\alpha$ 形心淹深

$$F=\rho g h_C A$$

- 平板静压力等于形心处压强与平板面积的乘积，与平板形状无关，静压力方向与平板垂直

压力中心（x_D，y_D）1



平行力系对 x 轴的力矩之和等于合力对 x 轴的力矩

$$\int y dF = y_D F$$

压力中心（x_D，y_D）2

压力中心 y_D → $$y_D = y_C + \frac{I_{XC}\rho g \sin\alpha}{\left(p_0 + \rho g \sin\alpha\, y_C\right)A}$$

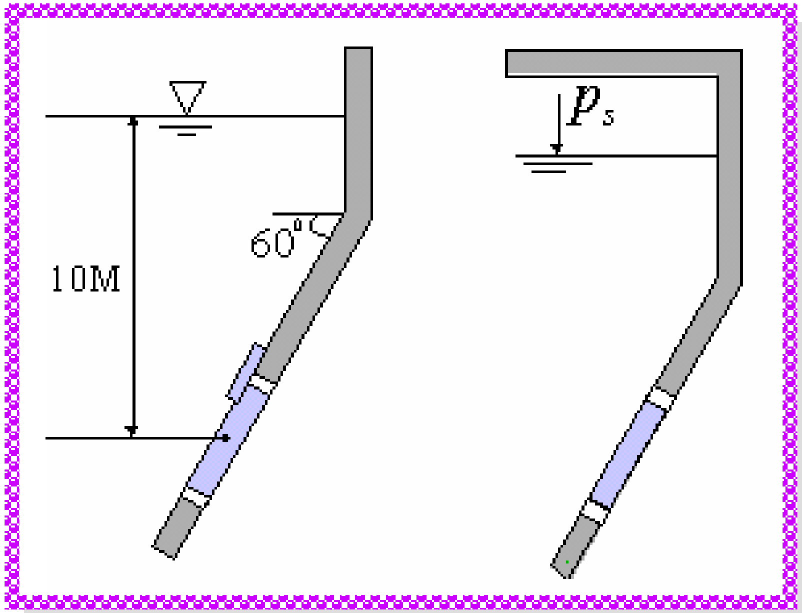
表压压力中心 y_D

平板两侧作用均布的大气压强
大气压强产生的力矩相互抵消

→ $$y_D = y_C + \frac{I_{XC}}{y_C A}$$

压力中心总是位于形心之下

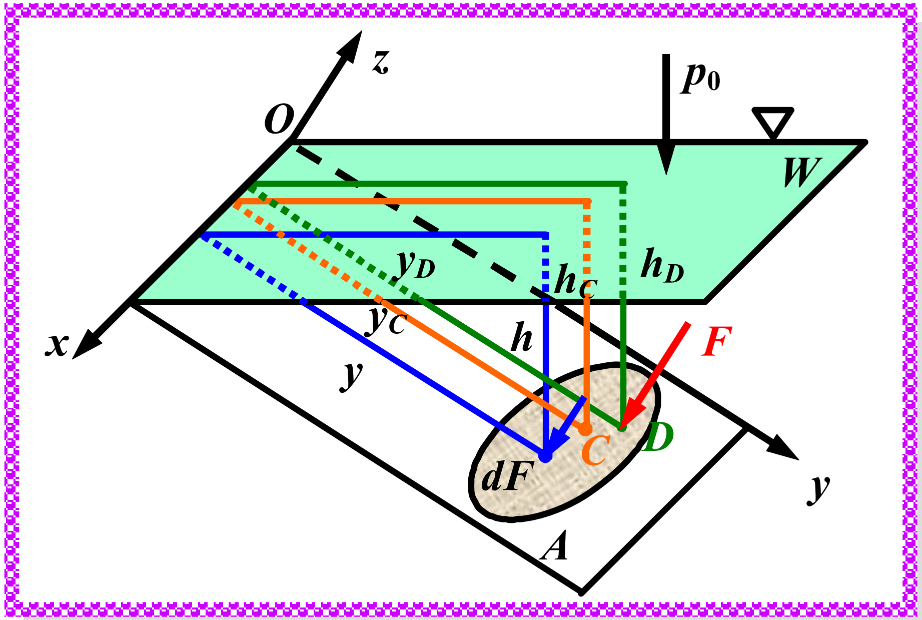
$$y_D > y_C$$
$$h_D > h_C$$



压力中心（x_D，y_D）3

表压压力中心 x_D ⇐ $\int x dF = x_D F$

⇒ $$x_D = x_C + \frac{I_{xyc}}{y_C A}$$



- 面积相对于通过形心的某一轴对称时

⇒ $$x_D = x_C$$

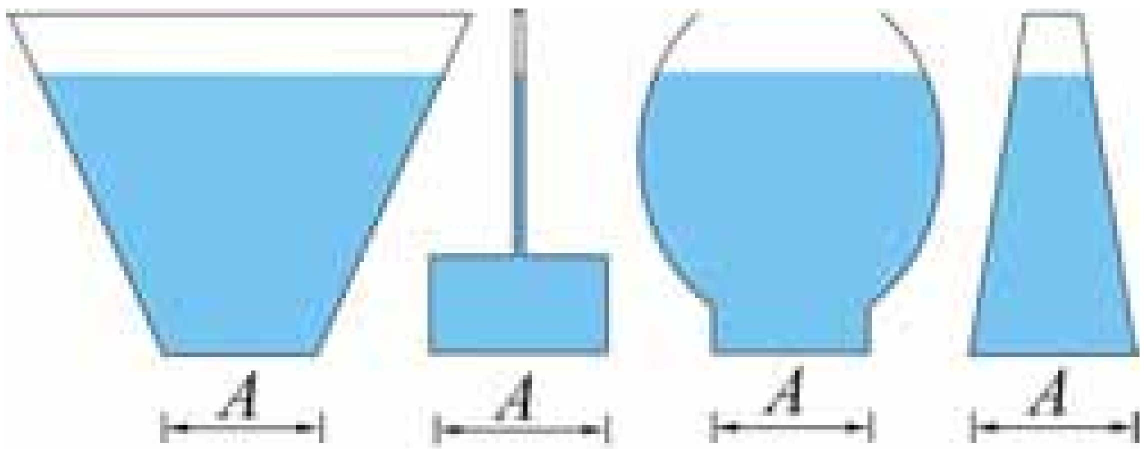
平板静压力思考题

四种敞口盛水容器的底面积相同，水位高相同。容器中水的重量比为（自左向右）9:1:10:2，则水作用于各容器底部的静压力为

A、9:1:10:2

B、相同

C、与形状有关

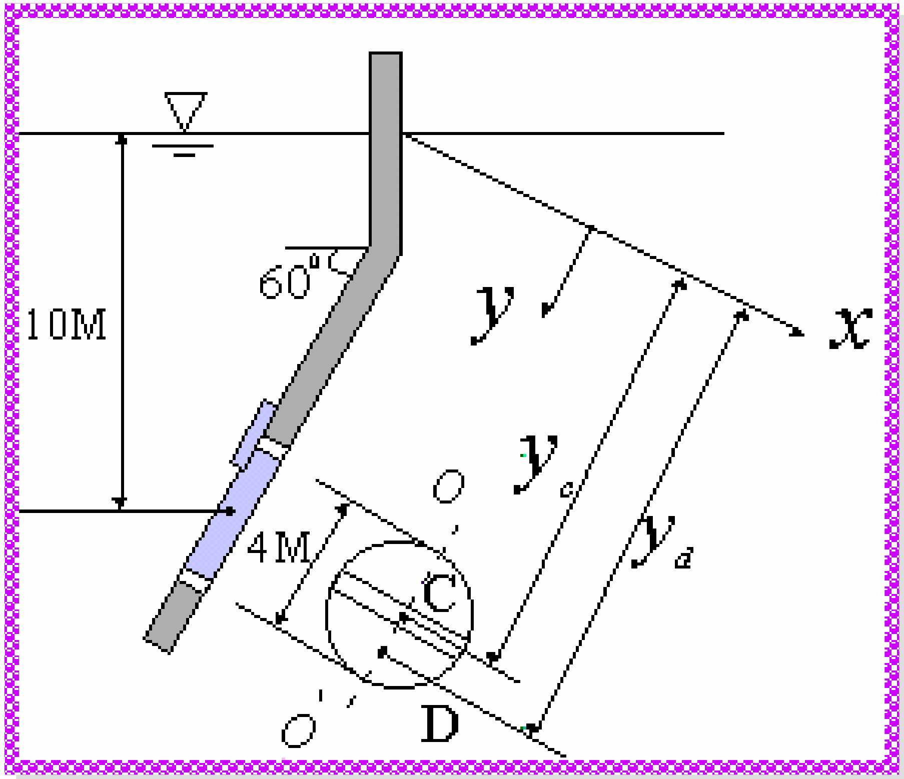


平面上的流体静压力例题1－1

例：水箱倾斜壁面上有一直径为4m的圆型闸门该闸门可以围绕通过圆心的水平轴旋转，轴位于水面以下10m处。

求：1)闸门所受总压力

2)为使闸门不旋转需施加的力矩大小设水密度$\rho = 1000\text{kg} / \text{m}^3$，壁面倾斜角为60°



平面上的流体静压力例题1－2

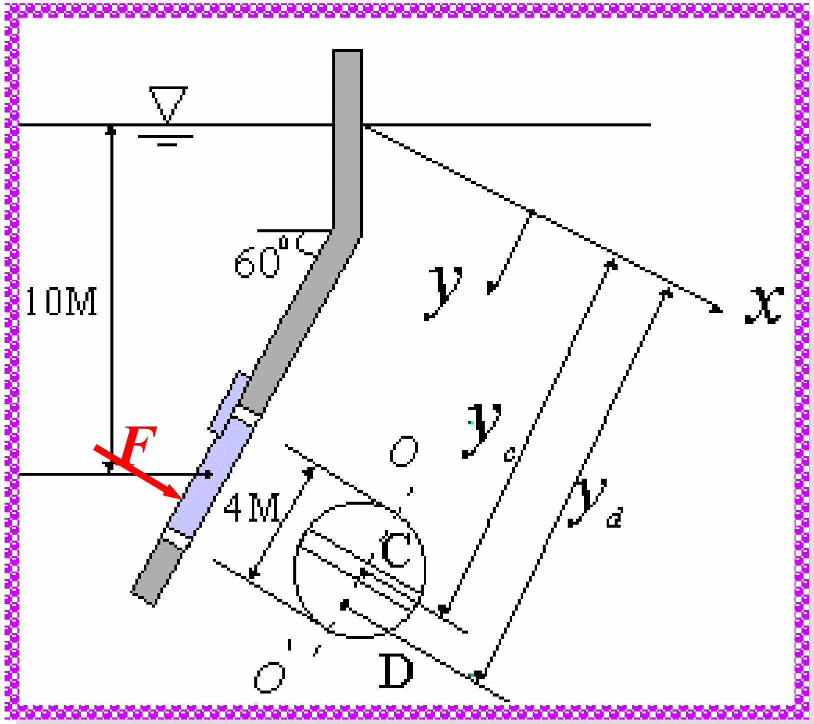
解：1) 闸门所受总压力

$$F=\rho g h_C A$$

$$=10^3\times 9.8\times 10\times\frac{1}{4}\times\pi\times 4^2=1.23\times 10^6(\mathrm{N})$$

压力中心位于*OO'*上

$$y_D=y_C+\frac{I_{xC}}{y_C A}$$



由 $I_{xC}=\dfrac{1}{4}\pi R^4$

平面上的流体静压力例题1—3

$$y_C = h_C / \sin 60^\circ$$

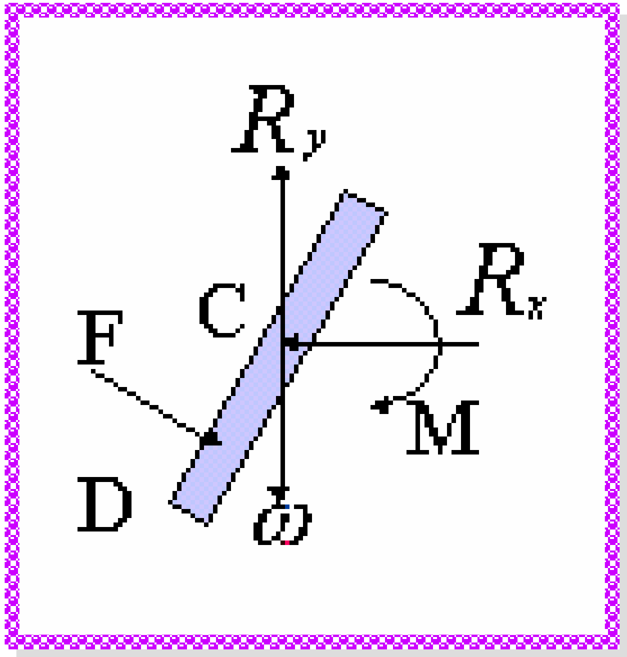
$$y_D = \frac{10}{\sin 60^\circ} + \frac{0.25\pi \times 2^4}{10/\sin 60^\circ \times 0.25\pi \times 2^2}$$

$$= 11.6366(\mathrm{m})$$

2) 求力矩

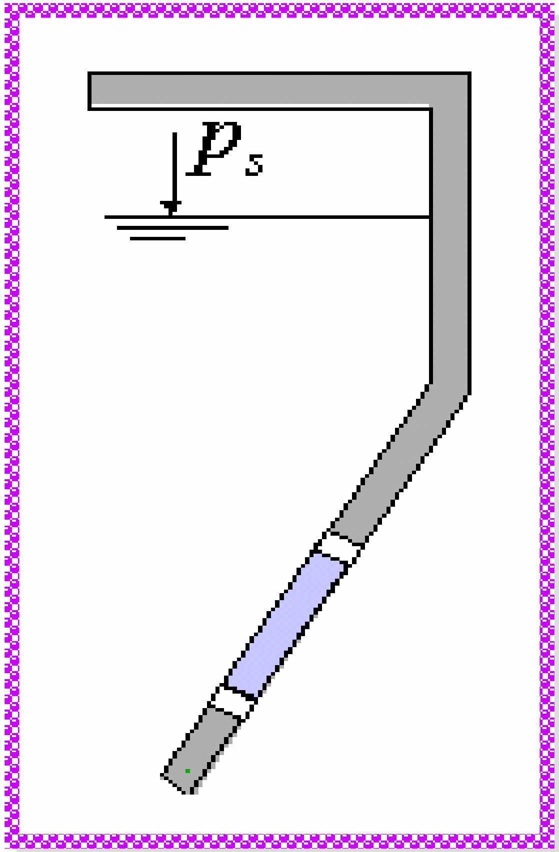
$$M = F(y_D - y_C)$$

$$= 1.07 \times 10^5 (\mathrm{N \cdot m})$$



平面上的流体静压力例题2

例：如果假设水箱是封闭的，自由液面上压力p_s = 50kPa(表压)，其他条件几何尺寸均和上例相同，试重新求解上题。



(1) 闸门所受总压力

$$F=\left(p_s+\rho g h_C\right)A$$

(2) 压力中心

$$y_D=y_C+\frac{I_{xC}\rho g\sin\alpha}{\left(p_s+\rho g\sin\alpha y_C\right)A}$$

平面上的流体静压力－小结1

- y 方向与 h 方向的区别，代公式时坐标轴的选取

- 两种公式的适用范围

$$F = \left(p_0 + \rho g h_C\right) A$$

$$F = \rho g h_C A$$

$$y_D = y_C + \frac{I_{XC} \rho g \sin\alpha}{\left(p_0 + \rho g \sin\alpha\, y_C\right) A}$$

$$y_D = y_C + \frac{I_{XC}}{y_C A}$$

$$x_D = x_C + \frac{I_{xyc}}{y_C A}$$

平面上的流体静压力—小结2

- 总压力只与流体密度、形心淹深、受力面积有关
- 由于深度增加，压强增大，所以压力作用点位置总在形心之下（受力面的形心），$h_D > h_C$
- 惯性矩的求解：注意矩形惯性矩求解时 x、y 轴的选取
- 平板形状对称时，$x_D = 0$

作业

作业：P.103～110

- **2 – 2**
- **2 – 4**
- **2 – 18 (1) 、(3)**

小结1

流体静压强的特性

- 垂直于作用面，指向流体内部
- 大小与作用面方位无关，只是作用点位置的函数

绝对压强、计示压强、真空压强

基准不同

小结2

液柱式测压计

- 各种测压计的优缺点
- 指示液的选取

几个概念

- 相对静止、等压面、形心、惯性矩、压力中心

小结3

公式

- 静止流体平衡方程—欧拉平衡方程

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

$$f_x = 0\ ,\ f_y = 0$$
$$f_z = -g$$

只有重力作用

- 不可压缩静止流体内压强分布

$$p_1 = p_2 + \rho g h$$

注意 U 型管的计算

小结4

- 作用在平板上的流体静压力

$$\boxed{F=\left(p_0+\rho g h_C\right)A}$$

$$h_C=y_C\sin\alpha$$

形心淹深

- 压力中心

$$\boxed{y_D=y_C+\frac{I_{XC}\rho g\sin\alpha}{\left(p_0+\rho g\sin\alpha\, y_C\right)A}}$$

$$\boxed{y_D=y_C+\frac{I_{XC}}{y_C A}}$$

面积相对于通过形心的某一轴对称时

$$\boxed{x_D=x_C}$$