第八章 气体的一元流动

可压缩流动的基本概念

定常一元等熵流动

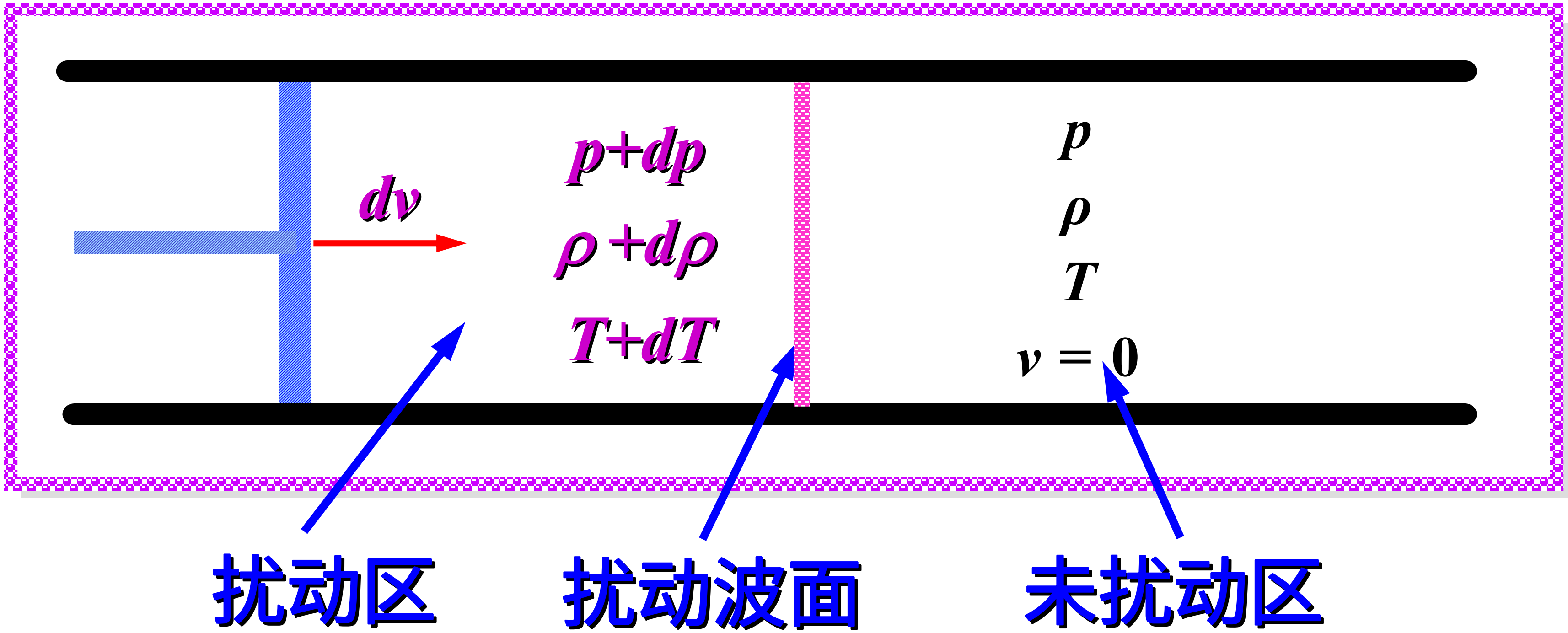
控制方程组、参考状态、气流参数与通道面积的关系

喷管中流动的计算

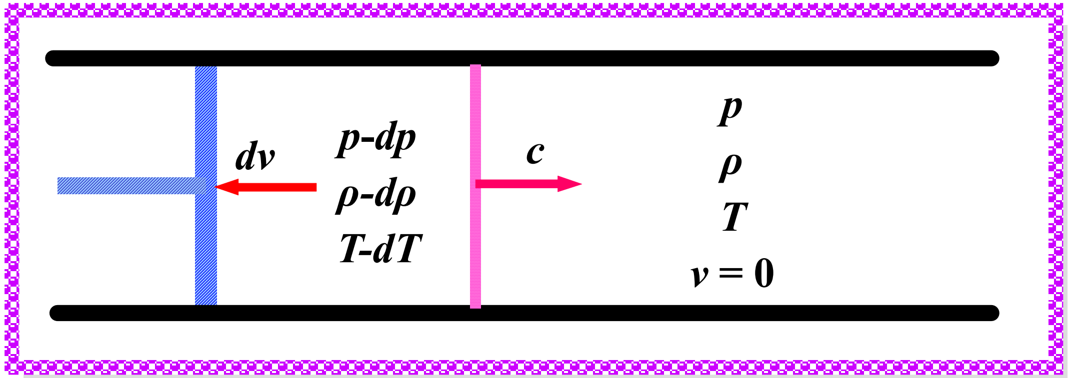
8.1 声速和马赫数

微弱扰动波

扰动 → **介质状态发生某种程度的变化**



长直通道内压缩波和膨胀波



	压缩波	膨胀波
波传播方向 质点运动方向	相同	相反
波面过后	热力参数增大	热力参数减小

微弱扰动波传播的热力过程

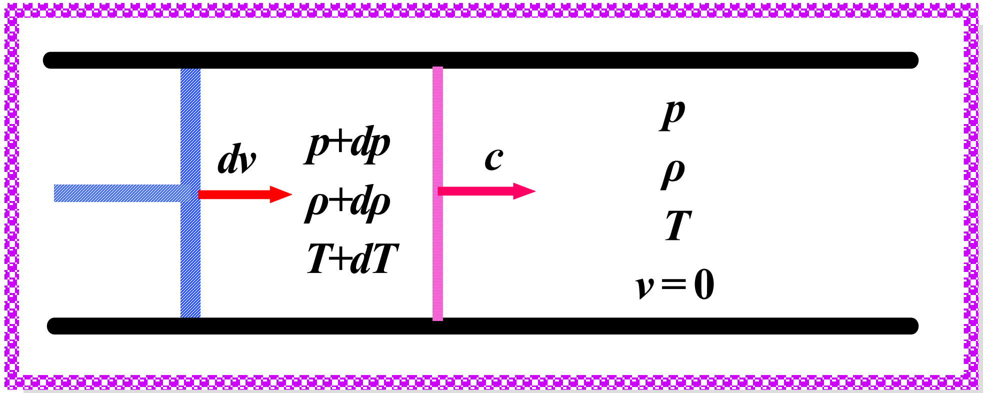
参数变化极其微小，忽略不可逆损失

可逆过程

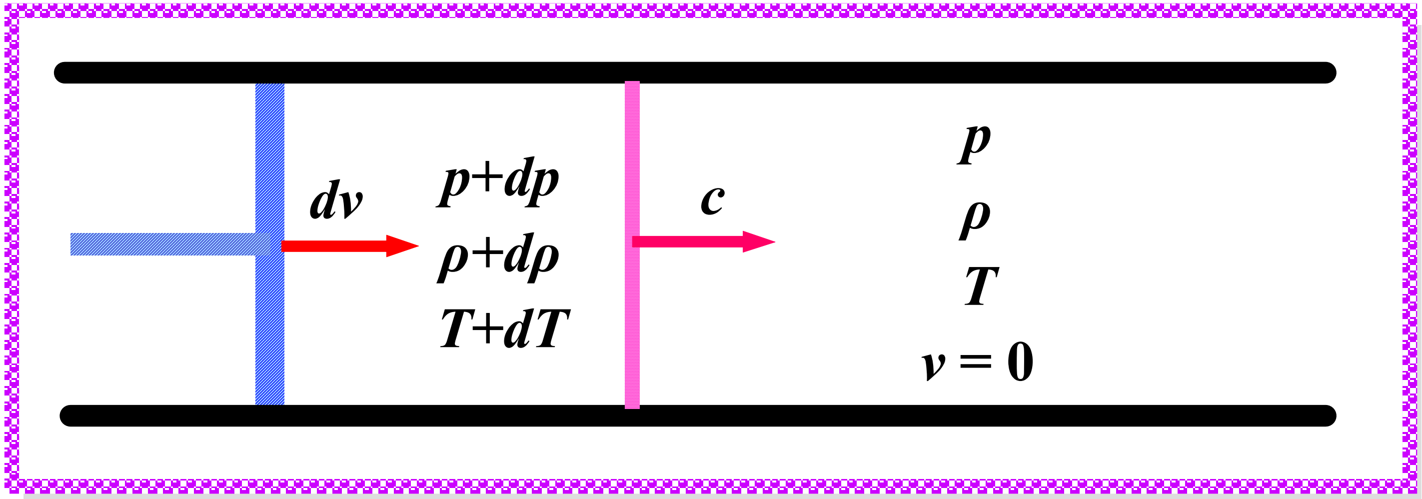
波前后温差较小，波速很高

绝热过程

等熵过程



微弱扰动波传播速度－声速1

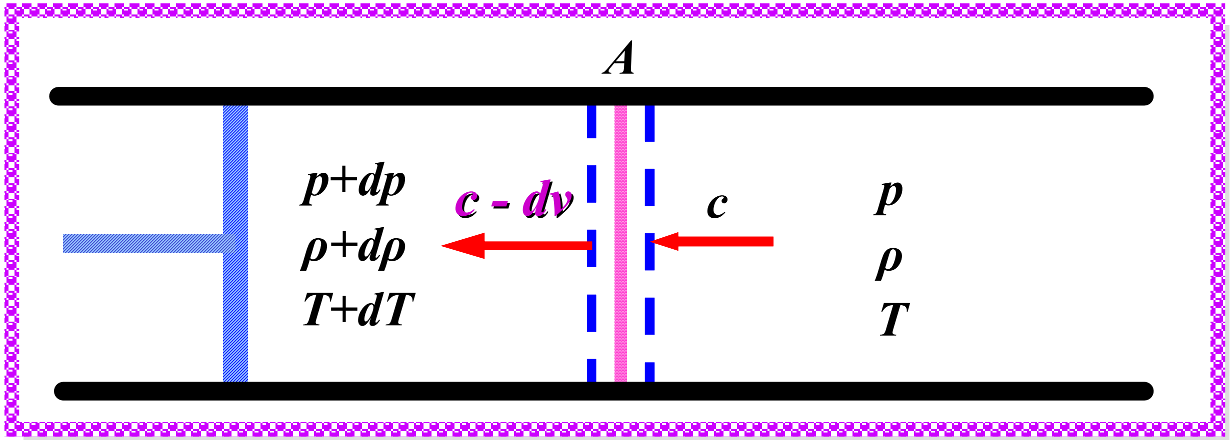


声速

微弱扰动波在可压缩介质中传播的速度

波的传播速度与流体质点的运动速度不同

声速2



连续方程 ⇒ $$dv = \frac{c}{\rho} d\rho$$

动量方程 ⇒ $$dv = \frac{dp}{\rho c} \Rightarrow \frac{dp}{\rho c} = \frac{c}{\rho} d\rho$$

⇒ $$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

牛顿，1686，等温假设

对空气，声速低约 20%

声速基本公式 $\Rightarrow$ $c = \sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}$

其它形式声速方程

由 $E_V = dp \Big/ \dfrac{d\rho}{\rho}$ $\Rightarrow$ $c = \sqrt{\dfrac{E_V}{\rho}}$

不可压缩流体 $E_V \to \infty$ $\Rightarrow$ $c \to \infty$

声速4

气体的等熵弹性模量 $E_V = \gamma\, p$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}}$$

完全气体 (Perfect gas) $p = \rho R_g T$

$$\boxed{c = \sqrt{\gamma R_g T}}$$

当地声速

- 流体压缩性不同，对应的声速不同
- 流场中当地状态参数不同，声速不同，称为当地声速

马赫数

$$\mathrm{Ma}=\frac{v}{c}$$

$Ma<1$ → 亚音速流动

$Ma=1$ → 音速流动

$Ma>1$ → 超音速流动

$Ma>5$ → 高超音速流动

可压缩流动的决定性准则；不直接反映流速大小

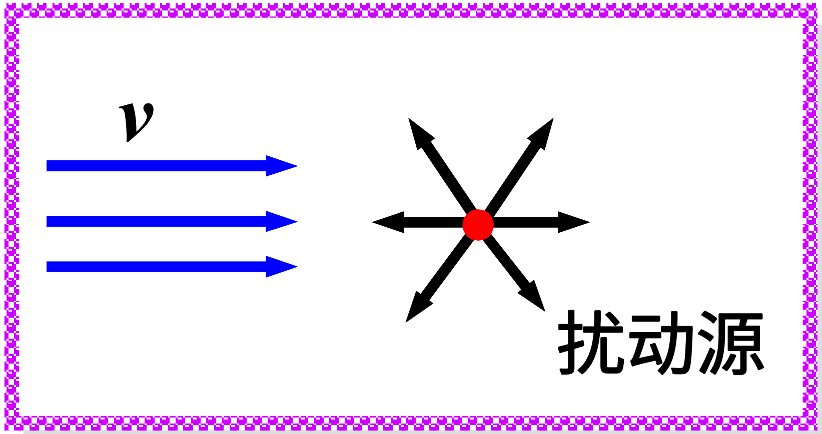
↑

自模化，Re不重要

微弱扰动传播的区域1

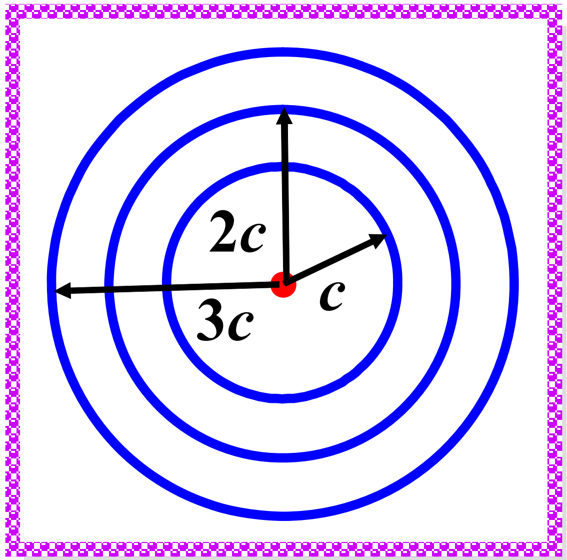
静止点源，流体以某速度流动

马赫波
1887，Mach



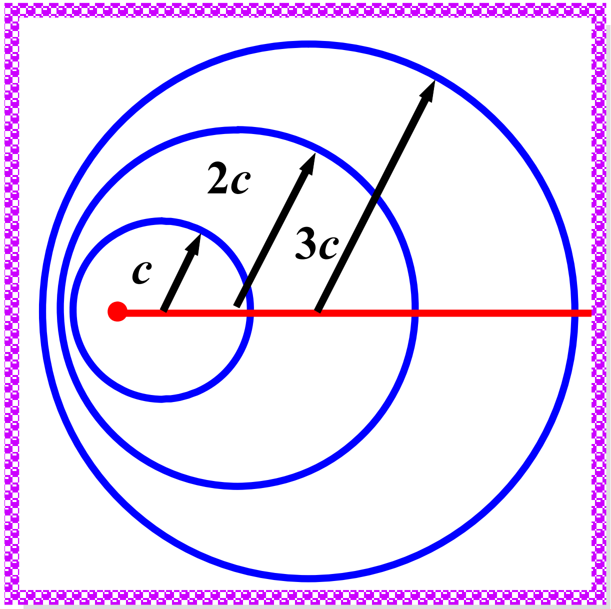
流体速度 $v = 0$

同心球面波，扰动向四面八方传递



微弱扰动传播的区域2

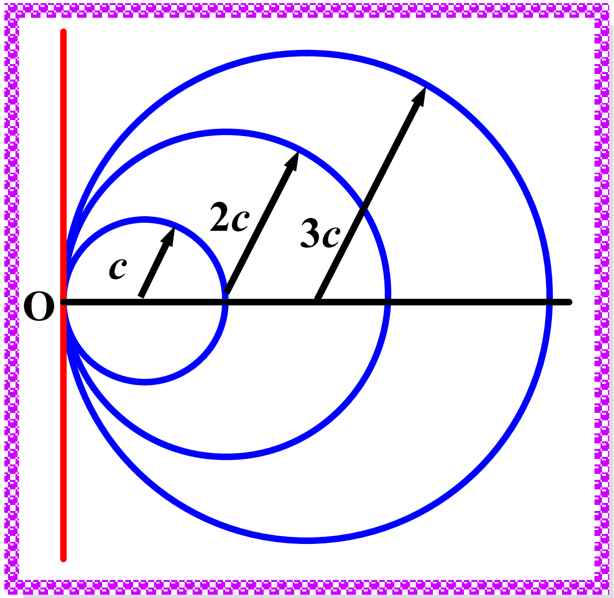
流体速度 $V < c$



- 只要时间足够长，扰动可波及全场
- 以亚音速运动的扰动源产生的扰动波会超越扰动源向前传播，扰动可传遍整个流场

微弱扰动传播的区域3

流体速度 $V = c$

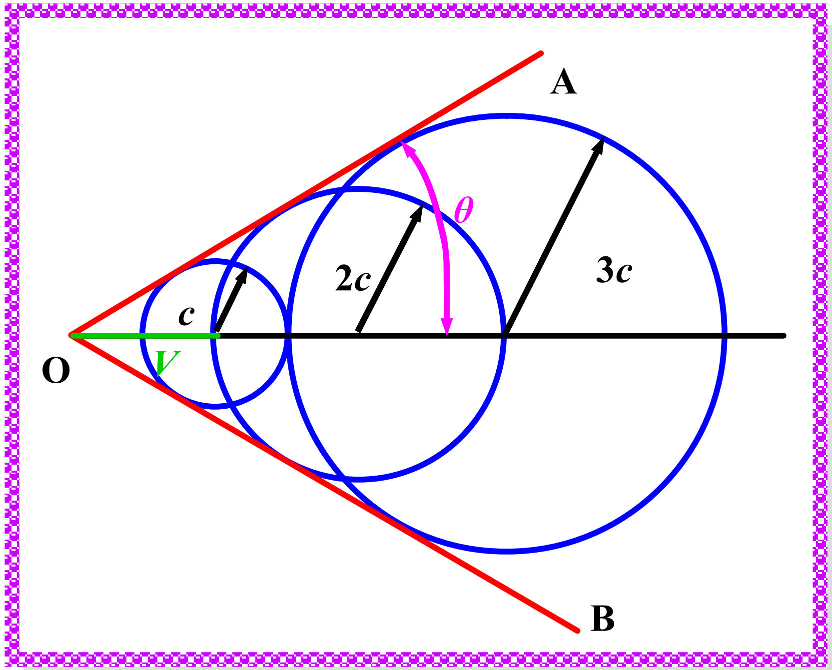


- 只影响过O点垂直于来流平面的右半空间
- 以音速运动的扰动源产生的扰动波不能超越扰动源，扰动源上游为寂静区或未受扰区

流体速度 $v > c$

扰动只波及锥面内部

马赫锥



马赫角 → OA与来流的夹角

$$\theta = \arcsin\left(\frac{c}{v}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{Ma}}\right)$$

Ma 越大
θ越小

微弱扰动传播的区域5

当我们听到超音速飞机的声音时，(　　)

A、飞机正朝我们飞来

B、飞机正好在我们头顶上

C、飞机已经越过我们头顶飞去

D、以上都不对

微弱扰动传播的区域6—例题

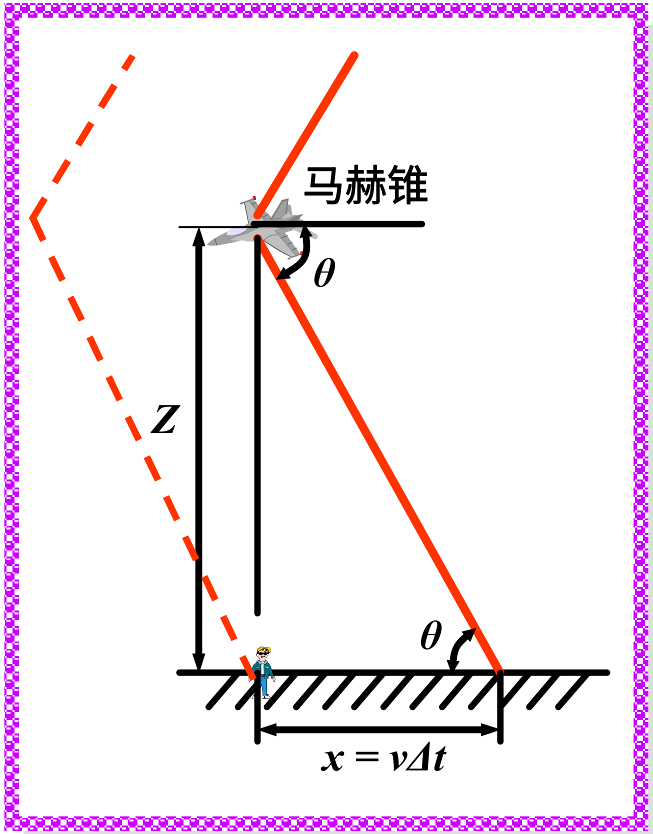
例：超音速飞机在高空巡航，飞机通过观察者头顶多少秒后，观察者方可听到发动机的声音？$\mathrm{Ma} = 1.5$, $z = 1000\mathrm{m}$, $t = 20^{\circ}\mathrm{C}$。

解：马赫角

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{Ma}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{Z}{v\Delta t}\right)$$

$$\Delta t = 2.17\,(\mathrm{s})$$



8.2 一元气流的流动特性

连续方程

$$d(\rho vA)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho}+\frac{dv}{v}+\frac{dA}{A}=0$$

动量方程

$$vdv=-\frac{dp}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho}=-Ma^2\frac{dv}{v}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(Ma^2-1\right)\frac{dv}{v}=\frac{dA}{A}}$$

气流速度与密度的关系

$$\frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \frac{dv}{v}$$

$$vdv = -\frac{dp}{\rho}$$

- 加速气流，压强、密度降低，气体膨胀
- 减速气流，压强、密度增大，气体压缩

	$\rho \sim v$
Ma < 1	$\left\lvert\frac{d\rho}{\rho}\right\rvert < \left\lvert\frac{dv}{v}\right\rvert$
Ma > 1	$\left\lvert\frac{d\rho}{\rho}\right\rvert > \left\lvert\frac{dv}{v}\right\rvert$

气流参数与通道面积的关系1

$$\left(Ma^2-1\right)\frac{dv}{v}=\frac{dA}{A}$$

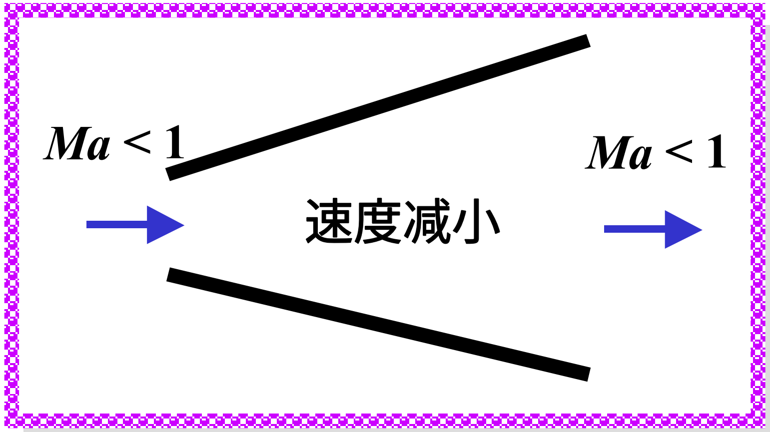
	$A \sim v$
Ma < 1	A 增大，v 减小
Ma > 1	A 增大，v 增大
Ma = 1	A 取极值

类似不可压缩流动

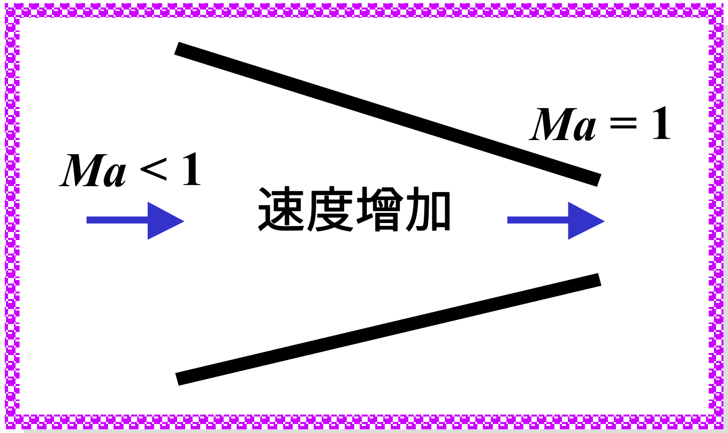
密度下降率大于速度上升率，需更大面积才能满足连续方程

音速到底出现在最大还是最小截面？

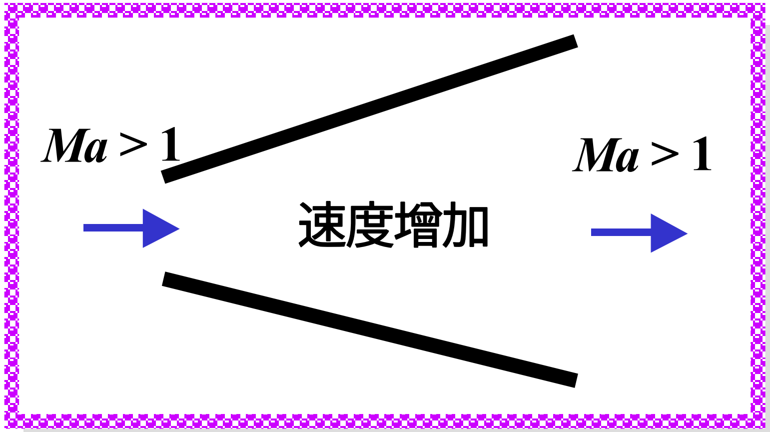
气流参数与通道面积的关系2



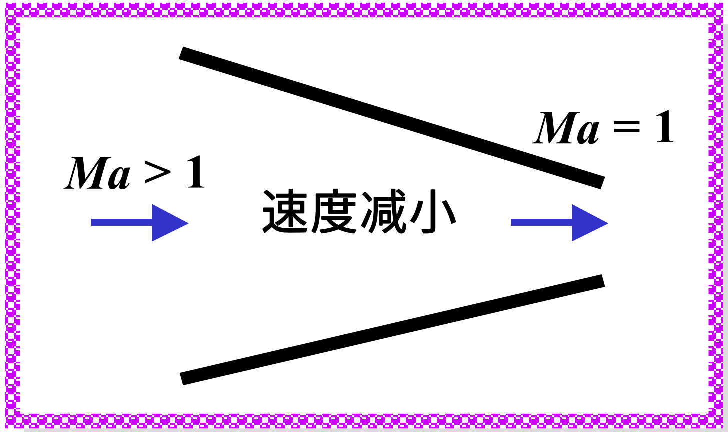
亚音速扩压器



亚音速喷管



超音速喷管

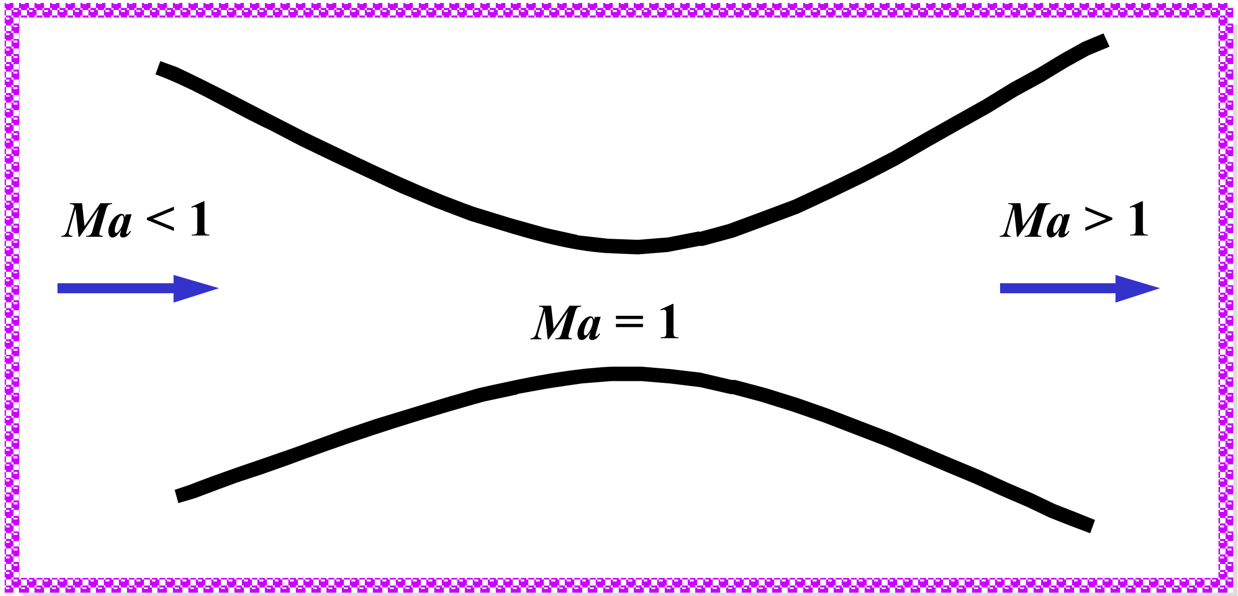


超音速扩压器

音速只可能出现在最小截面

先收缩后扩张是产生超音速气流的必要条件

- **拉瓦尔 (Laval) 喷管**



8.3 等熵气流基本方程式和基本概念

理想、定常、一元、可压缩 → $\frac{\partial}{\partial t}=0$ ， $\rho \neq \text{const}$ ， $\mu=0$

连续方程 ← 通过各过流断面质量流量不变

动量方程 ← CV所受合外力＝动量净流出率

能量方程 ← 单位时间对CV所作的功与加给CV的热量＝能量的净流出率

状态方程 ← 完全气体

一些概念

等熵流动

- 可逆：粘性影响小，参数变化连续
- 绝热：流速高，忽略热交换

完全气体热力学关系式

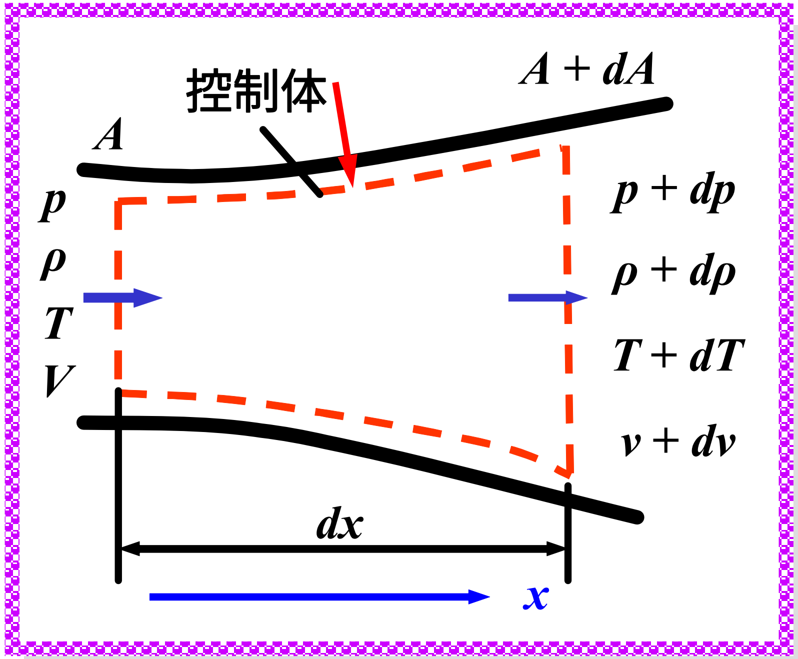
$$h = c_p T \qquad U = c_V T \qquad R_g = c_p - c_V \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

$$c_p = \frac{R_g c_p}{c_p - c_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R_g \qquad c_V = \frac{c_p}{\gamma} = \frac{1}{\gamma - 1} R_g$$

等熵流动方程组1

连续方程 → 变截面管道，定常，一元

→ $\rho vA = C$



动量方程 → 定常一元，忽略质量力

$$\frac{dp}{\rho} + vdv = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C$$

等熵流动方程组2

动量方程 → $$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C$$

等熵 → $$\frac{p}{\rho^\gamma} = C$$ → $$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = C}$$

能量方程 → **热力学第一定律、定常、一元、绝热**

$$q_m\left[\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1\right)\right] = \dot{Q} + \dot{W}_{\text{轴}}$$

等熵流动方程组3

$$d\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad h+\frac{v^2}{2}=C$$

能量方程的各种形式

$$\begin{cases} c_pT+\dfrac{v^2}{2}=C & \dfrac{\gamma R_g}{\gamma-1}T+\dfrac{v^2}{2}=C \\ \dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{v^2}{2}=C & \dfrac{c^2}{\gamma-1}+\dfrac{v^2}{2}=C \end{cases}$$

- 动量方程、能量方程相同

等熵流动方程组4

状态方程

$$p = \rho R_g T$$

对空气而言，适用完全气体假设的范围

$$240K < T < 2000K$$

$$p < 9.8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

在完全气体假设的范围内，如果温度不太高，定压比热、定容比热可视为常数

等熵流动方程组5

连续方程 → $\rho v A = C$

能量方程 → $h + \dfrac{v^2}{2} = C$

状态方程 —完全气体→ $p = \rho R_g T$

过程方程 → $\dfrac{p}{\rho^\gamma} = C$

一元等熵气流的基本特性

基本特性

热力参数与速度之间的相互变化关系

参考状态

在整个运动过程中参数不变

- **等熵滞止状态、临界状态**

参考状态－等熵滞止状态1

静参数 → 气流的当地状态参数

滞止参数 —某热力过程→ 速度滞止为零时的参数

当地状态 —等熵过程 / 假想→ 速度滞止为零的状态

→ **等熵滞止状态**

参考状态—等熵滞止状态2

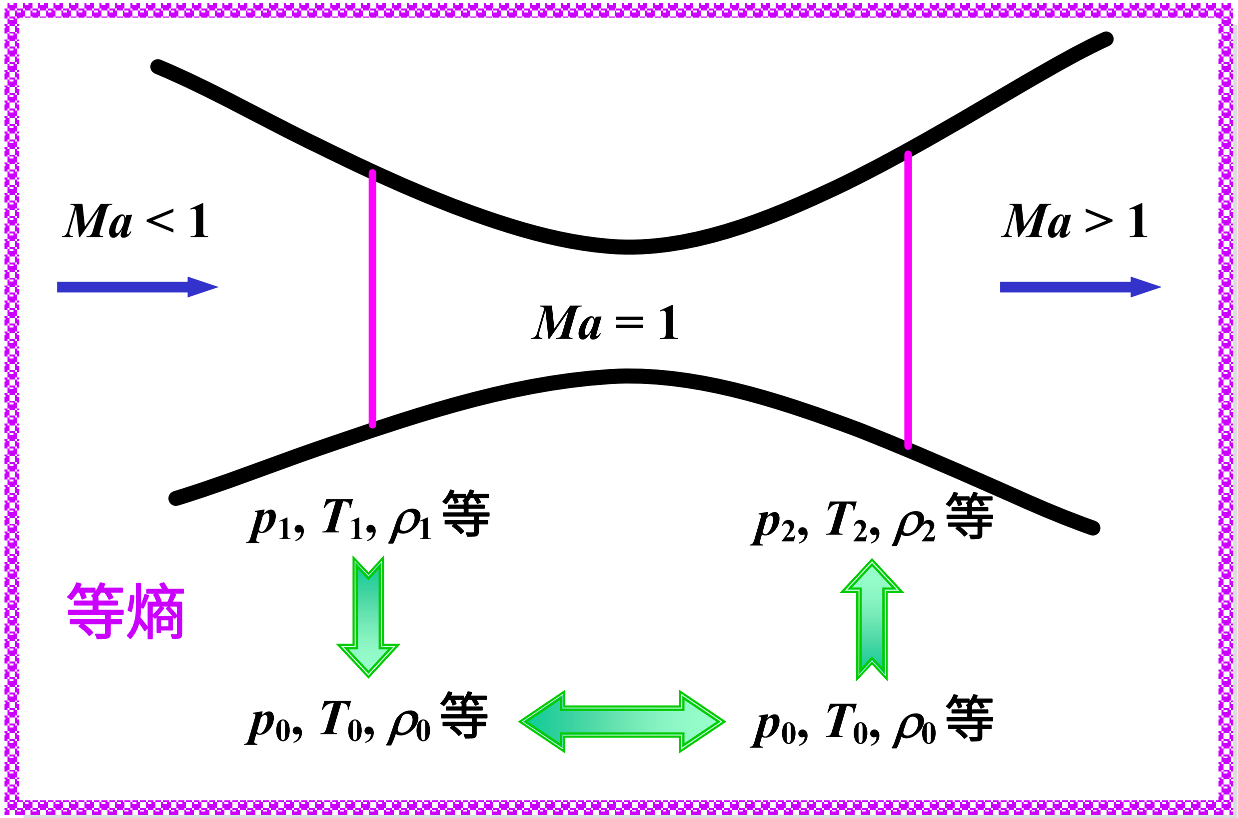
$$h+\frac{v^2}{2}=h_0 \xrightarrow{\text{等熵滞止到速度为0}} \boxed{h_0=\text{常数}}$$

$$c_pT+\frac{v^2}{2}=c_pT_0 \xrightarrow{\text{等熵滞止}} \boxed{T_0=\text{常数}}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} \xrightarrow[p_0/\rho_0^\gamma=C]{\text{等熵滞止}} \boxed{\begin{aligned}p_0&=\text{常数}\\ \rho_0&=\text{常数}\end{aligned}}$$

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{v^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1} \xrightarrow{\text{等熵滞止}} \boxed{c_0=\text{常数}}$$

定常一元等熵流中等熵滞止参数为常量，因此可作为参考状态



参考状态—等熵滞止状态4

无量纲热力学参数之间的关系

- **等熵过程方程** ⇒ $$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}$$

- **完全气体状态方程** ⇒ $$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$$

⇒ $$\boxed{\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

参考状态－等熵滞止状态5

$$\boxed{\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}=\left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{dp}{p}=\gamma\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dh}{h}=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{dc}{c}$$

所有热力学参数变化一致，p 变化最快

参考状态—等熵滞止状态6

静参数与速度的关系

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{2c_p T_0}$$

- v 减小，T，p，ρ 均增大 ⇒ 减速使气流压缩
- v 增大，T，p，ρ 均减小 ⇒ 加速使气流膨胀

参考状态—临界状态1

当地状态 $\xrightarrow{\text{等熵过程}}$ Ma = 1的状态

$\Longrightarrow$ **临界状态**

能量方程

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{v^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1}$$

临界状态下

$$\frac{c_*^2}{\gamma-1}+\frac{c_*^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1}\Rightarrow c_*=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}c_0$$

参考状态—临界状态2

$$\frac{T_*}{T_0}=\frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

定常一元等熵流动的临界参数为常量

参考状态—临界状态3

- 空气，$\gamma = 1.4$

$$\frac{T_*}{T_0} = 0.833\ ,\ \frac{p_*}{p_0} = 0.528\ ,\ \frac{\rho_*}{\rho_0} = 0.634$$

$$T/T_0 < 0.833\ ,\ p/p_0 < 0.528\ ,\ \rho/\rho_0 < 0.634$$

⇒ 超音速流动

$$T/T_0 > 0.833\ ,\ p/p_0 > 0.528\ ,\ \rho/\rho_0 > 0.634$$

⇒ 亚音速流动

用马赫数表示的气流参数关系式

能量方程

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{v^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1}$$

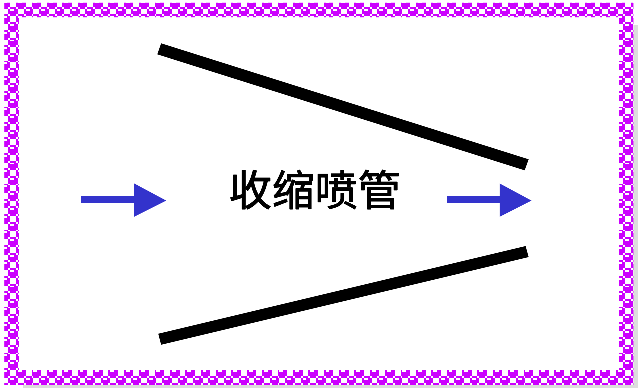
$$\Rightarrow \quad \frac{T}{T_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-1}$$

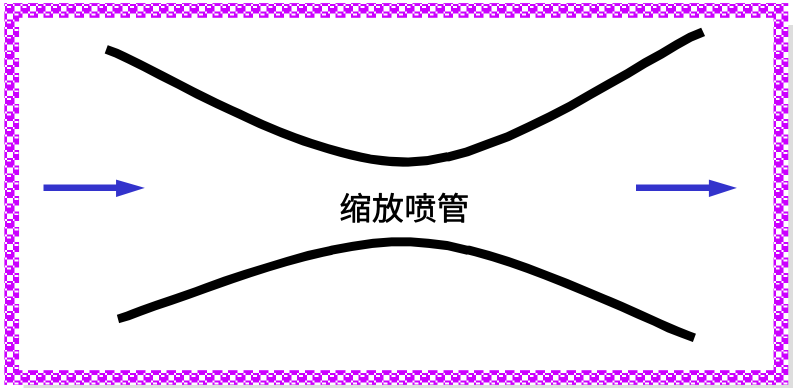
$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p}{p_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

8.4 喷管的计算

喷管 → 改变内壁几何形状来加速气流的管道





假设

- 一元定常等熵流动
- 完全气体
- 比热为常数

收缩形喷管中的流动1

- 连续方程

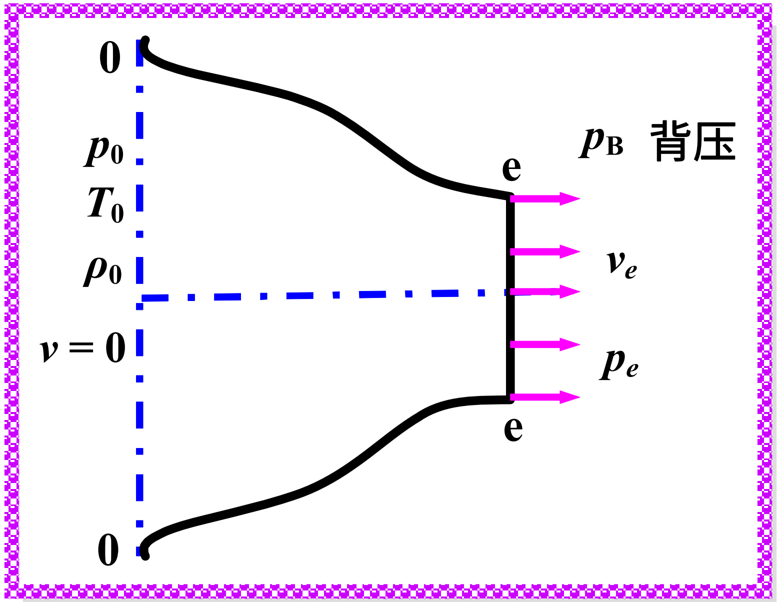
$$q_m = \rho_e v_e A_e = C$$

- 能量方程

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_e}{\rho_e}+\frac{v_e^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

- 状态方程 ⟹ $p_e = \rho_e R_g T_e$　　$p_0 = \rho_0 R_g T_0$

- 过程方程 ⟹ $p_e/\rho_e^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma$



收缩形喷管中的流动2

联立求解

$$v_e=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

$$\rho_e=\rho_0\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_e=\frac{p_e}{R_g\rho_e}=\frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}p_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{R_g\rho_0}$$

$$q_m=\rho_e v_e A_e=A_e\rho_0\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

4 个方程，可求出v_e，ρ_e，T_e，q_m 4 个未知数

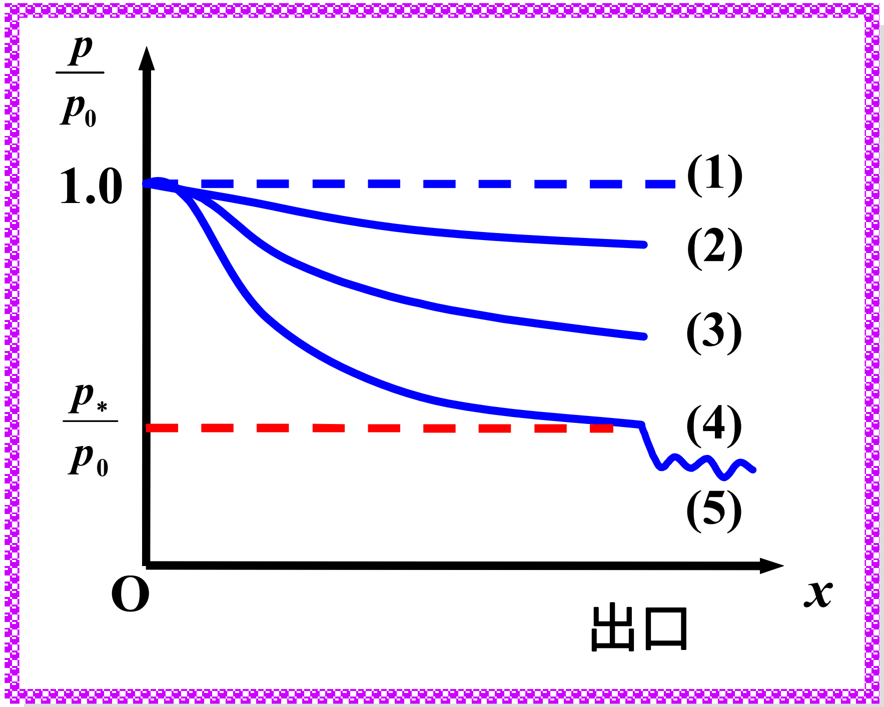
背压 p_B 与出口压强 p_e 的关系

$p_B = p_0$

无动力，流体静止

$\Rightarrow$ $p_e = p_0$

$p_* < p_B < p_0$ $\Rightarrow$ $p_e = p_B$



亚音流动，背压降低的扰动可向上游传递

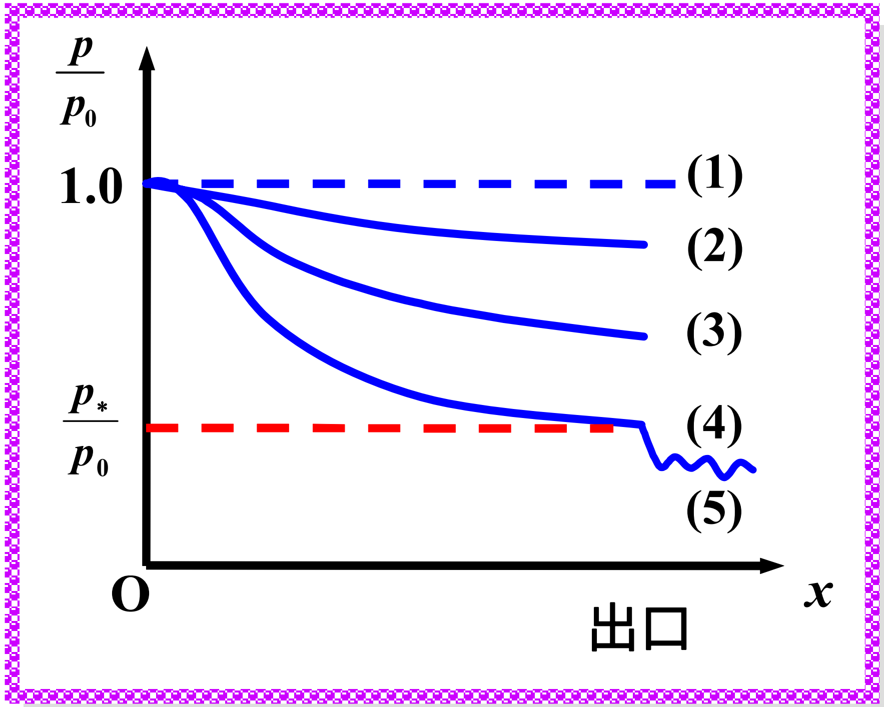
收缩形喷管中的流动4

$$p_B = p_*$$

出口达到临界状态，

Ma = 1

$$\Rightarrow \boxed{p_e = p_*}$$



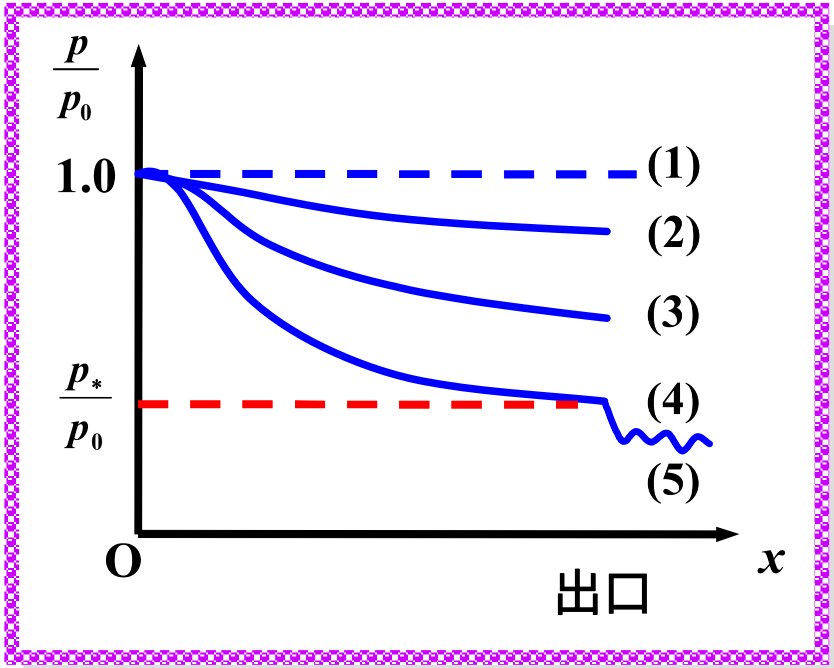
$$p_B < p_*$$

$\Rightarrow$ **出口为临界状态，背压继续降低的扰动不能向上游传播**

收缩形喷管中的流动5

$$\Rightarrow \quad p_e = p_*$$

气流在管外经过膨胀波系连续膨胀后达到与背压平衡



出口压强 p_e

$$\begin{cases} p_B > p_* \quad \Rightarrow \quad p_e = p_B \\ p_B \le p_* \quad \Rightarrow \quad p_e = p_* \end{cases}$$

收缩形喷管中的流动6

气流的最大速度

气流的最大速度只可能等于音速，出口为临界状态

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_*}{\rho_*}+\frac{v_{max}^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{2}{\gamma+1}\frac{p_0}{\rho_0}+\frac{v_{max}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{max}=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}R_gT_0}}$$

最大速度只与滞止参数有关

收缩形喷管中的流动7

质量流量的最大值

$$q_m = A_e\rho_0\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

求极值

$$\frac{d\left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}{dp_e}=0$$

$$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_e=p_*}$$

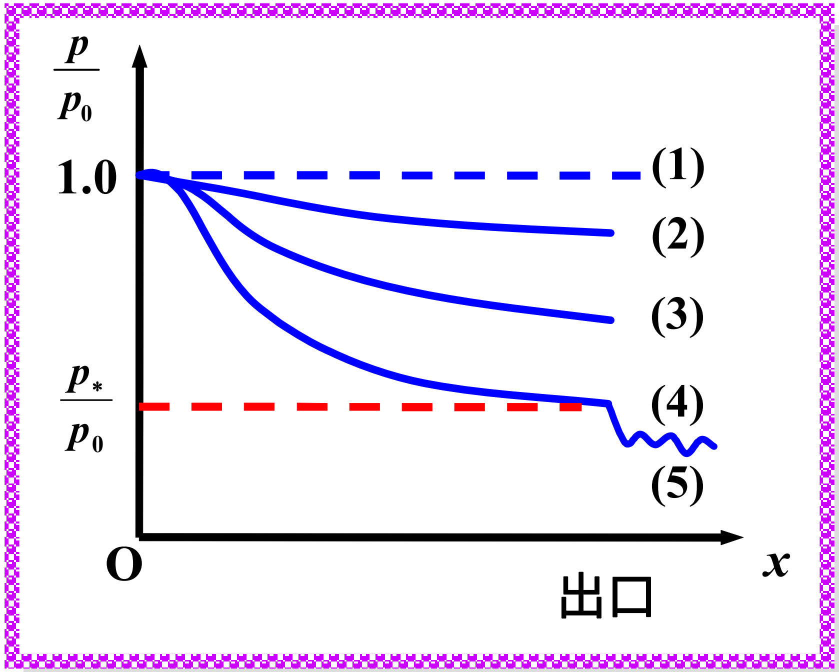
- **质量流量在 $p_e=p_*$ 时达到最大值**

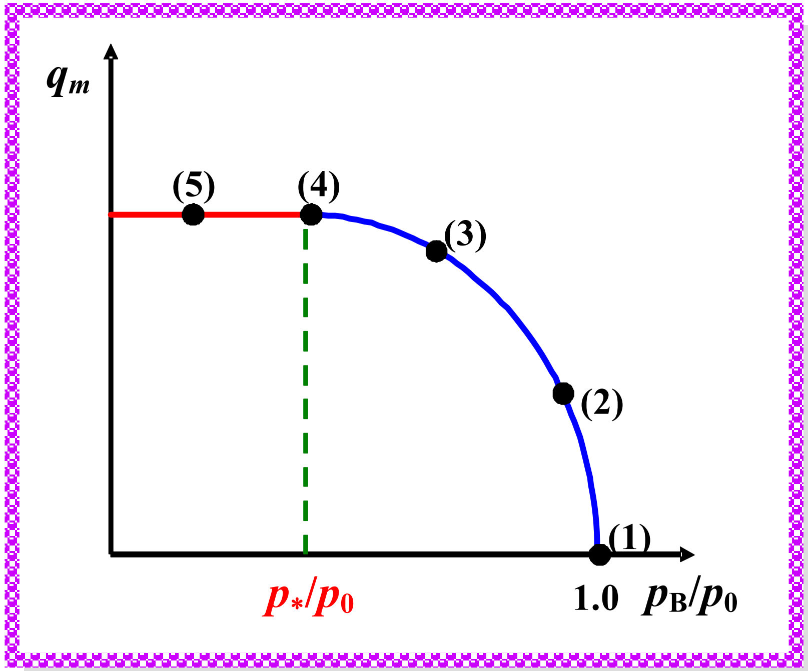
壅塞流动

气流在收缩喷管出口达临界状态后，背压继续降低不能使出口流速和管内质量流量增大，此时流动已经壅塞了

收缩形喷管中的流动9

$$\left(q_m\right)_{\max} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} A_*$$





- 收缩型喷管的最大质量流量取决于滞止参数和临界面积（即出口面积），与背压无关

收缩形喷管中的流动10

计算p_B/p_0，判断出口状态

$$p_B/p_0 < \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{(空气 :0.528)}$$

是

临界状态

$$p_e = p_*$$

否

亚音流动

$$p_e = p_B$$

收缩形喷管中的流动11

亚音流动 $\Rightarrow$ $p_e = p_B$ $\qquad p_e = \rho_e R_g T_e$

由 $p_e = p_B$

过程方程 / 状态方程 $\Rightarrow$

$$\rho_e = \rho_0 \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad T_e = T_0 \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

能量方程 $\Rightarrow$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R_g \left(T_0 - T_e\right)}$$

声速方程 $\Rightarrow$

$$c_e = \sqrt{\gamma R_g T_e} \qquad Ma_e = v_e / c_e$$

连续方程 $\Rightarrow$

$$q_m = \rho_e v_e A_e$$

收缩形喷管中的流动12

临界状态 → $p_e = p_*$

- **出口参数均为临界参数**

$$\rho_e = \rho_* = \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}(\text{空气 :}0.634\rho_0)$$

$$T_e = T_* = T_0\frac{2}{\gamma+1}(\text{空气 :}0.833T_0)$$

$$v_e = c_* = \sqrt{\gamma R_g T_*}$$

$$q_m = \rho_* c_* A_*$$

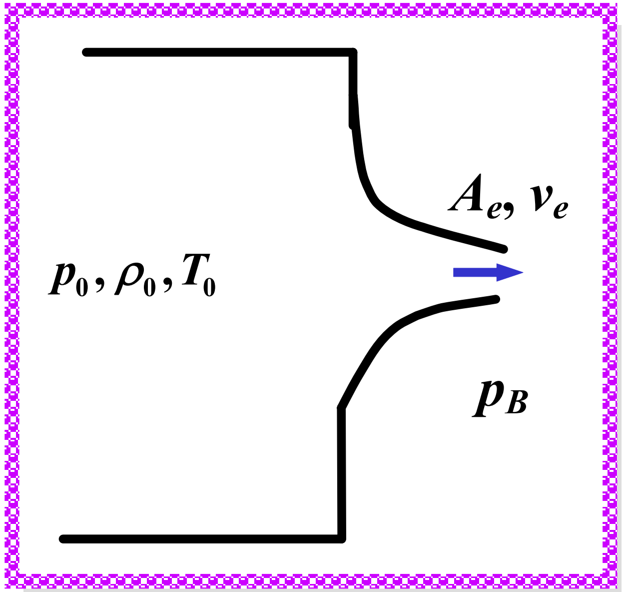
收缩形喷管中的流动13—例题1

例：已知容器中空气的压强1.6×10^5Pa，温度为330K,容器壁上连一收缩形喷管，出口面积为19.6cm²，环境压强即背压为10^5Pa，求喷管出口流速和通过喷管的质量流量。

解：首先判断出口状态

$$p_0=1.6\times10^5\,Pa,\ p_B=10^5\,Pa$$

$$\frac{p_B}{p_0}=0.625>0.528(\gamma=1.4)$$



⇒ 出口 Ma < 1， $p_e=p_B$

$$\Rightarrow \quad T_e = T_0\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 288.53(\mathrm{K})$$

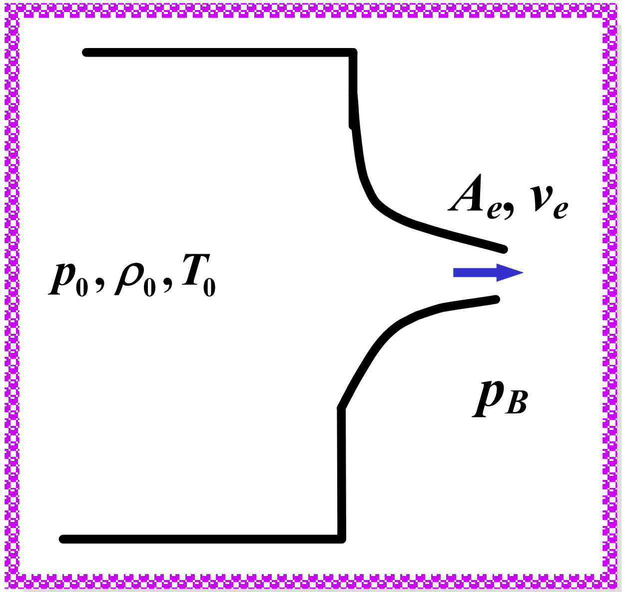
$$v_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}R_g\left(T_0 - T_e\right)} = 288.66(\mathrm{m/s})$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{R_g T_e} = 1.21\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$$

$$q_m = \rho_e A_e v_e = 0.683(\mathrm{kg/s})$$

例：储气罐中空气经渐缩喷管排向大气，流动为等熵过程，求：①若出口气流速度为声速，则储气箱内的压强至少应为多大？②若储气箱内压强为600kPa，温度600K，出口面积$1.29\times10^{-3}m^2$，则出口气流速度和质量流量为多大？（设当地大气压强为103kPa）

解：(1) 求储气箱内压强



出口气流为声速

$$p_e = p_*$$

$$p_B \le 0.528\, p_0$$

$$p_0 \ge \frac{p_B}{0.528} = 195\,(\text{kPa})$$

(2) 出口气流速度与质量流量

$$p_0 = 600\ \text{kPa}\ ,\ T_0 = 600\ \text{K}\ ,\ A_e = 1.29 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

首先判断出口状态，即 $\dfrac{p_B}{p_0} = 0.172 < 0.528$

出口为临界状态

收缩形喷管中的流动17—例题2

$$T_* = 0.833T_0 = 499.8\left(\mathrm{K}\right)$$

$$p_* = 0.528\,p_0 = 316.8\left(\mathrm{kPa}\right)$$

$$\rho_* = \frac{p_*}{R_g T_*} = 2.21\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$$

$$c_* = \sqrt{\gamma R_g T_*} = 448.13\left(\mathrm{m/s}\right)$$

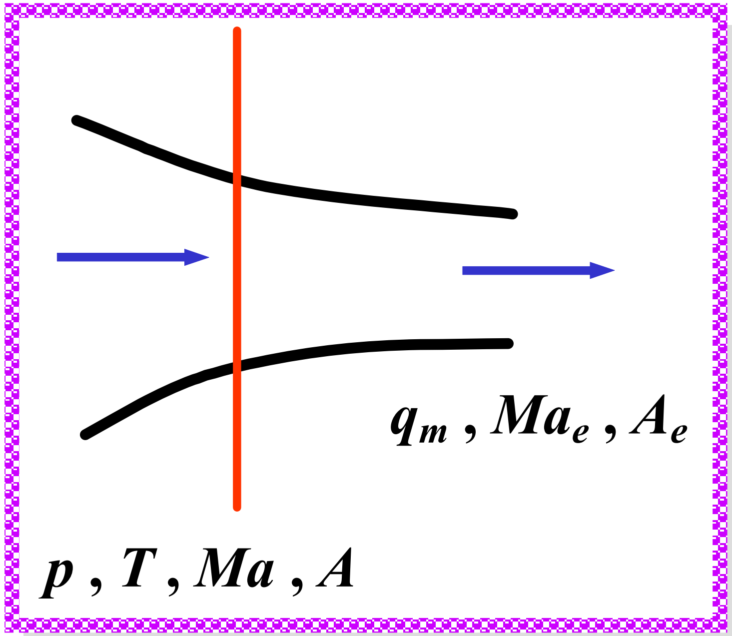
$$q_m = \rho_* A_e c_* = 1.28\left(\mathrm{kg/s}\right)$$

例：空气等熵地流过一收缩喷管，在某截面积处，$p = 210\text{kPa}$，$T = 277\text{K}$，$Ma = 0.52$。为保证收缩喷管内达到最大质量流量0.5549kg/s，试设计喷管出口截面积。

解：喷管内达到最大质量流量，则出口必为临界状态

$$p_e = p_* = 0.528\,p_0$$

$$T_e = T_* = 0.833\,T_0$$



求滞止参数

$p=210\text{kPa}$，$T=277\text{K}$，$Ma=0.52$

由
$$\frac{T_0}{T}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)=1.0541$$

⇒
$$T_0=1.0541\,T=292\,(\text{K})$$

$$p_0=1.0541^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\,p=252.5\,(\text{kPa})$$

求临界参数

$$T_* = 0.833\, T_0 = 243.2\,(\mathrm{K})$$

$$p_* = 0.528\, p_0 = 133.32\,(\mathrm{kPa})$$

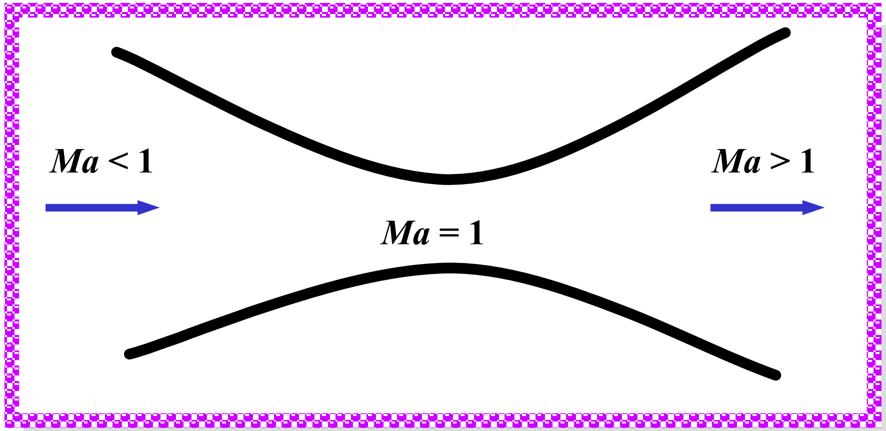
$$\rho_* = \frac{p_*}{R_g T_*} = 1.91\,(\mathrm{kg/m^3})$$

$$c_* = \sqrt{\gamma R_g T_*} = 312.6\,(\mathrm{m/s})$$

$$A_e = \frac{q_m}{\rho_* c_*} = 9.29\times 10^{-4}\,(\mathrm{m^2})$$

缩放形喷管中的流动1

拉瓦尔 (Laval) 喷管设计工况



- **收缩部分** → 与收缩喷管工作一样
- **最小截面** → 达到音速
- **扩张部分** → 超音速，出口压强等于背压 $p_e = p_B$

缩放形喷管中的流动2－例题1

例：空气从气罐经缩放喷管等熵地流入背压为p_B = 98.1kPa的大气中，气罐中压强p_0 = 700kPa温度T_0 = 313K，已知缩放喷管喉部直径d = 25mm，求(1) 出口马赫数；(2) 喷管的质量流量；(3) 喷管出口截面直径。

解：(1) 出口马赫数

由

$$\frac{p_e}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_e^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.14$$

$$Ma_e = 1.94$$

(2) 喷管的质量流量

喷管出口为超音速，喉部必为临界状态

$$T_* = 0.833T_0 = 260.73\left(\mathrm{K}\right)$$

$$\rho_* = \left(\frac{T_*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0$$

$$= \left(\frac{T_*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{p_0}{R_g T_0} = 4.94\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$$

$$c_* = \sqrt{\gamma R_g T_*} = 323.7\,(\mathrm{m/s})$$

$$\Rightarrow \quad q_m = \rho_* c_* \frac{\pi}{4} d^2 = 0.785\,(\mathrm{kg/s})$$

(3) 喷管出口截面直径

$$\Rightarrow \quad T_e = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_e^2\right)^{-1} T_0 = 178.6\,(\mathrm{K})$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{R_g T_e} = 1.914\,(\mathrm{kg/m^3})$$

缩放形喷管中的流动5—例题1

$$c_e = \sqrt{\gamma R_g T_e} = 267.9\,(\mathrm{m/s})$$

$$v_e = Ma_e c_e = 519.7\,(\mathrm{m/s})$$

$$\Rightarrow \quad d_e = \left(\frac{4q_m}{\pi\rho_e v_e}\right)^{1/2} = 0.032\,(\mathrm{m})$$

例：一大容器中空气压强p_0 = 260kPa，温度T_0 = 330K，欲采用一喷管使空气等熵地膨胀到大气压p_B = 100kPa（设计工况），并得到质量流量为0.884kg/s。求(1) 应采用何种形式的喷管？(2) 喷管出口速度、出口面积及最小面积为多少？

解：(1) 喷管内等熵流动，设计喷管

$$p_e = p_B$$

由

$$\frac{p_B}{p_0} = 0.385 < 0.528$$

需选择缩放喷管才能使空气在喷管中等熵地膨胀到大气压强

(2) 出口流速、面积及最小截面面积

由

$$p_e/p_0 = 0.385 = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_e^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$Ma_e = 1.25$$

$$T_e = \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 = 251(\mathrm{K})$$

缩放形喷管中的流动8－例题2

$$c_e = \sqrt{\gamma R_g T_e} = 317.6\left(\mathrm{m/s}\right)$$

$$v_e = Ma_e c_e = 397\left(\mathrm{m/s}\right)$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{R_g T_e} = 1.39\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A_e = \frac{q_m}{\rho_e v_e} = 0.0016\left(\mathrm{m^2}\right)$$

由 $Ma_e = 1.25$ ⇒ 喉部截面流动达临界

缩放形喷管中的流动9—例题2

$$T_* = 0.833T_0 = 275\left(\mathrm{K}\right)$$

$$c_* = \sqrt{\gamma R_g T_*} = 332\left(\mathrm{m/s}\right)$$

$$\rho_* = 0.634\frac{p_0}{R_g T_0} = 1.74\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$$

$$A_* = \frac{q_m}{\rho_* c_*} = 0.00153\left(\mathrm{m^2}\right)$$

可压缩流动的基本概念

- 微弱扰动波的传播速度—当地声速

$$c=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\qquad c=\sqrt{\frac{E_V}{\rho}}\qquad c=\sqrt{\gamma R_g T}$$

- 马赫数

- 微弱扰动波传播的区域、马赫角

小结2

定常一元等熵流动

控制方程组

$$\rho v A = C$$

$$p = \rho R_g T$$

$$h + \frac{v^2}{2} = C$$

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = C$$

等熵滞止状态

→ 定常一元等熵流动中等熵滞止参数为常量

小结3

- 无量纲热力学参数之间的关系

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- 热力学参数与马赫数之间的关系

$$\frac{T}{T_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-1}$$

小结4

- **气流参数与通道面积的关系**

  音速只能出现在最小截面

- **临界状态** ⇒ 定常一元等熵流动中临界参数为常量

$$\frac{T_*}{T_0}=\frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

小结5

几何喷管中的流动

- 由背压变化引起的喷管变工况
- 几何喷管中定常一元等熵流动的计算