## 流体运动概述

流体运动的数学描述，流体运动的分类，流体微团的运动和变形，连续方程

### 基础知识

导数的概念、微分方程、场论、流体质点，角变形率

## 描述流体运动的两种方法

拉格朗日方法、欧拉方法

## 迹线、流线和脉线

## 物质导数

## 流体微团的运动分析

## 连续方程

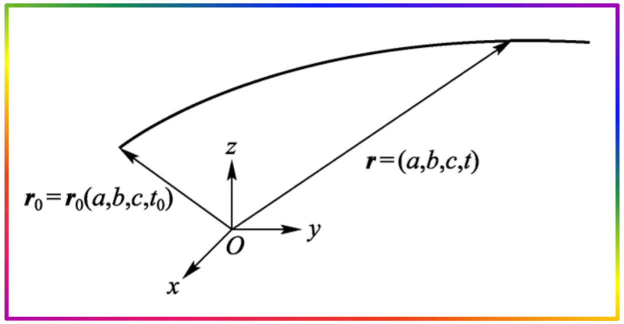
拉格朗日方法—跟踪流体质点

*Lagrangian discription*

描述每个流体质点自始至终的运动规律

设初始时刻某质点标记为（*a, b , c*），则该质点的物理量 $\eta$ 可表示为

$$\eta = \eta(a,b,c,t)$$




其中 *a, b , c , t* 为拉格朗日变数

- 任意时刻流体质点的位置矢量

$$\vec{r} = \vec{r}(a,b,c,t)$$

**固定$abc$，变化$t$**

某确定流体质点随时间的运动规律

- 任意时刻流体质点的速度和加速度

$$\left\{\begin{aligned} &\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \\ &\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2} \end{aligned}\right.$$

**固定$t$，变化$abc$**

同一时刻不同流体质点的参数分布

着眼于空间点

*Eulerian discription*

描述空间某点流体运动物理量随时间的变化规律
及由一点转向另一点时该量的变化

- 空间点位置为 $(x, y, z)$，则物理量 $\eta$ 的空间分布

$$\eta = \eta(x, y, z, t)$$

$x, y, z, t$ 为欧拉变数

# 欧拉方法2

- 空间中的速度分布

$$\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$$

固定$xyz$，变化$t$
某确定空间点参数随时间的变化规律

- 空间中的压强分布、温度分布

$$\begin{cases} p=p(x,y,z,t) \\ T=T(x,y,z,t) \end{cases}$$

固定$t$，变化$xyz$
同一时刻不同空间点的参数分布

场—分布着某种物理量的空间区域

流场
*flow field*

**定常场与非定常场**

定常流动：*steady flow*

非定常流动：*unsteady flow*

流场中每一点的物理量都不随时间变化，称为定常场；否则，为非定常场

## 定常场数学描述

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

或

$$\eta = \eta(x, y, z)$$

## 均匀场与非均匀场

均匀流动：*uniform flow*
非均匀流动：*nonuniform flow*

流场中各空间点上的物理量都一样，称为均匀场；否则，为非均匀场

### 均匀场数学描述

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

或

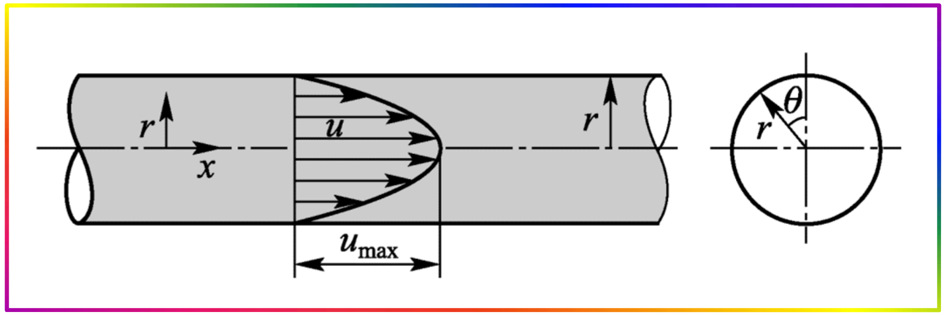
$$\eta = \eta(t)$$

速度场为三个空间坐标的函数—三维流动，实际流动都是在三维空间中的流动

*three-dimensional flow*

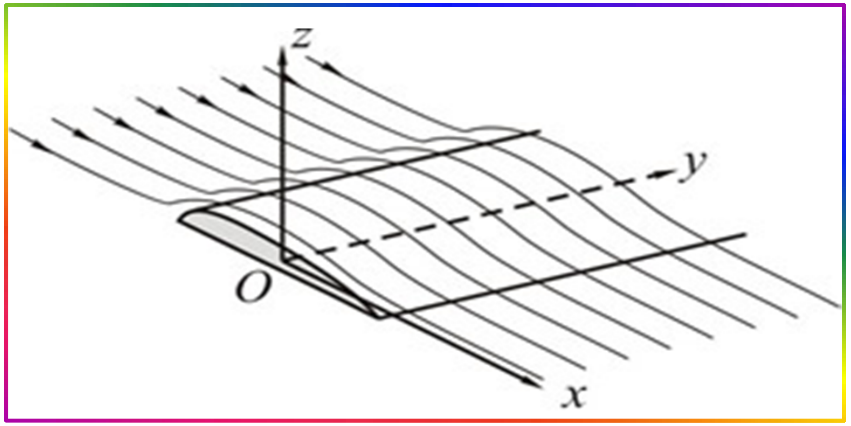
- 一维流动

*one-dimensional flow*




- 二维流动

*two-dimensional flow*



**迹线** → 流体质点在空间运动时所描绘出来的轨迹 *pathline*

## 迹线方程

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t)\ ,\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t)\ ,\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)$$

$t$ 是自变量，$x$，$y$，$z$ 都是 $t$ 的函数

# 迹线2

## 迹线的特点

- 流场中实际存在的线
- 同一质点，不同时刻空间位置的连线
- 和时间过程有关的曲线，随时间的增长迹线不断延长
- 拉格朗日方法下的概念

流线

*streamline*

某瞬时流场中一条假想曲线该曲线上各点速度方向和曲线在该点切线方向重合

## 流线方程

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

$t$ 为常数，$x$，$y$，$z$ 为自变量

## 流线的特点

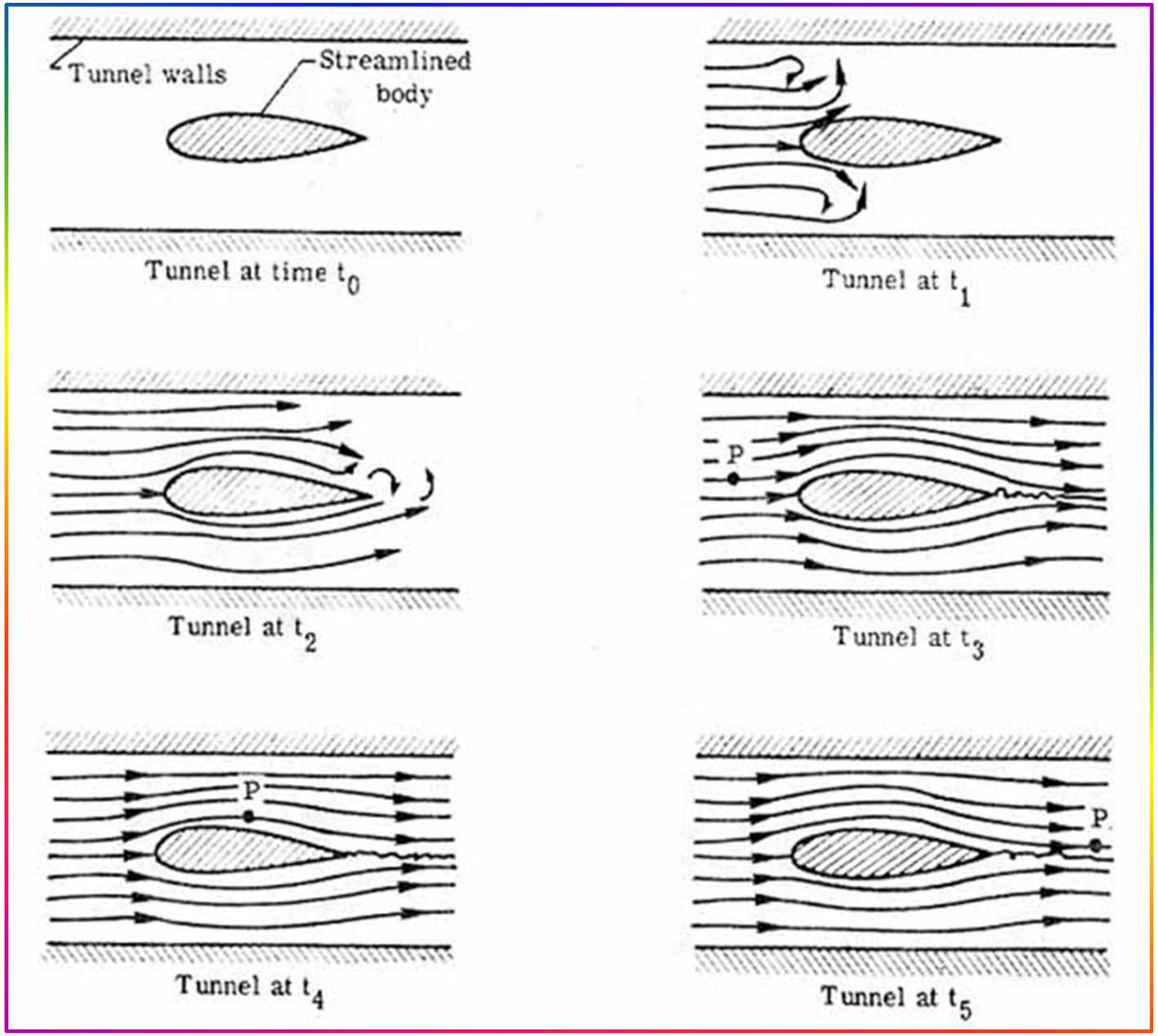
- 流场中某瞬时的假想曲线

- 不同质点，同一时刻空间位置的连线，描述线上各质点的运动方向

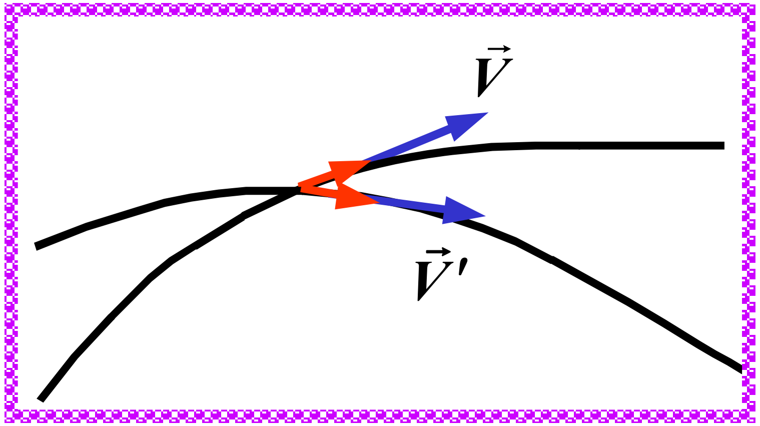
- 定常流动，流线形状位置不随时间改变

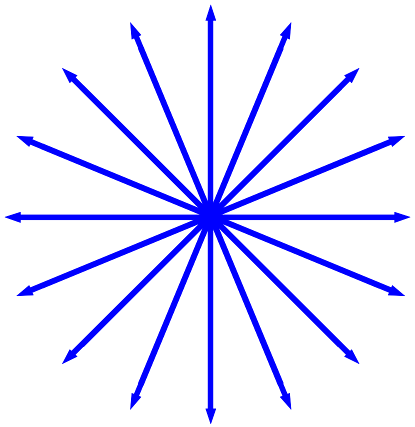
- 定常流动时，流线、迹线、染色线重合

# 流线3


Tunnel walls
Streamlined body
Tunnel at time $t_0$
Tunnel at $t_1$
Tunnel at $t_2$
P
Tunnel at $t_3$
P
Tunnel at $t_4$
P
Tunnel at $t_5$

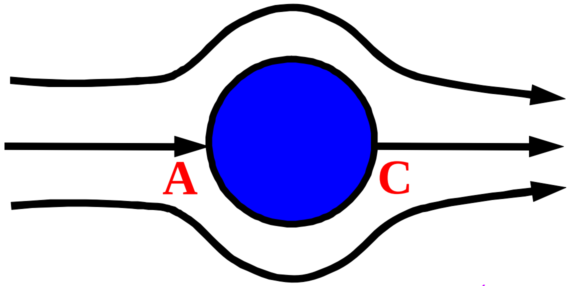
- 一般情况下，流线不能相交和转折



奇点

*singularity*

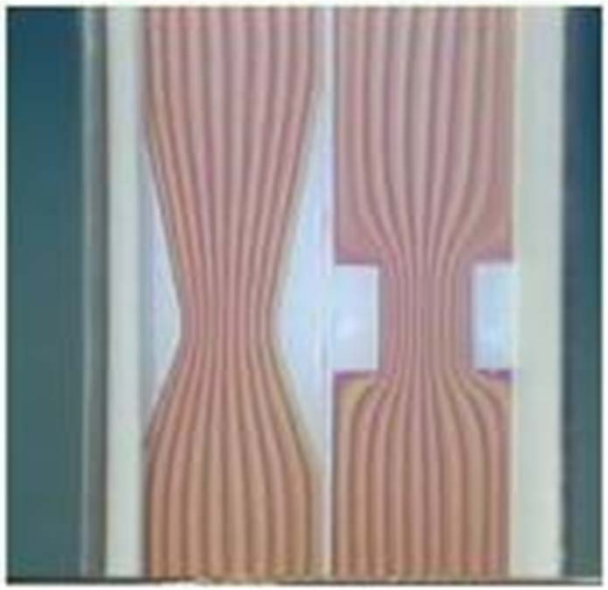


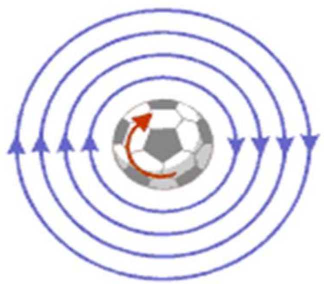

驻点

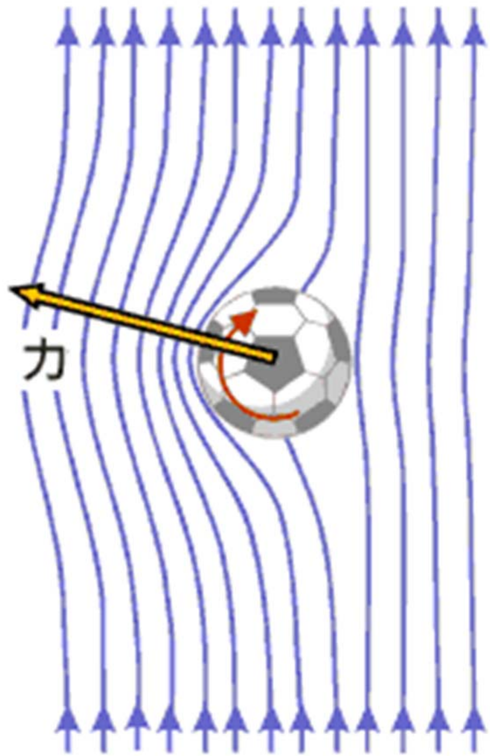
*stagnation point*

# 流线5

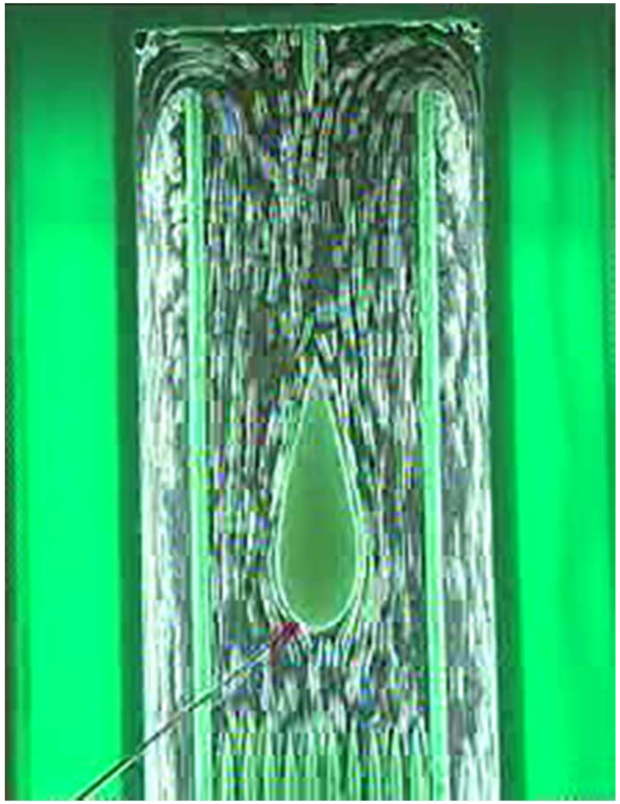
- 一般情况下，流线的走向和疏密反映了某瞬时流场内流体速度方向和大小：流线密的地方流速大

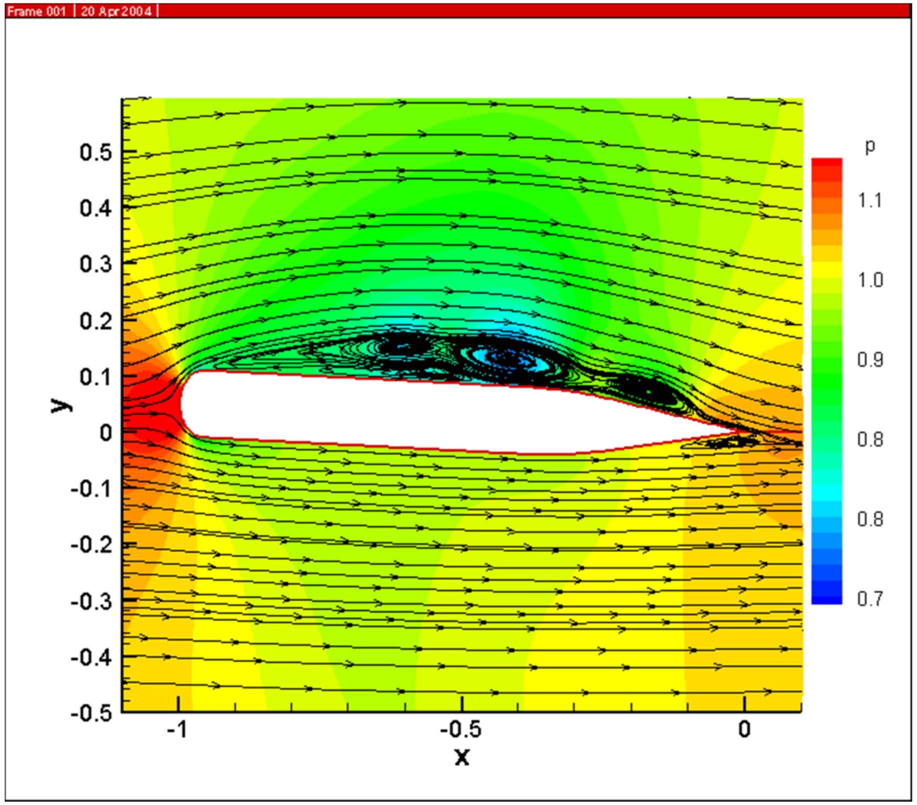






## 流线是欧拉方法下的概念





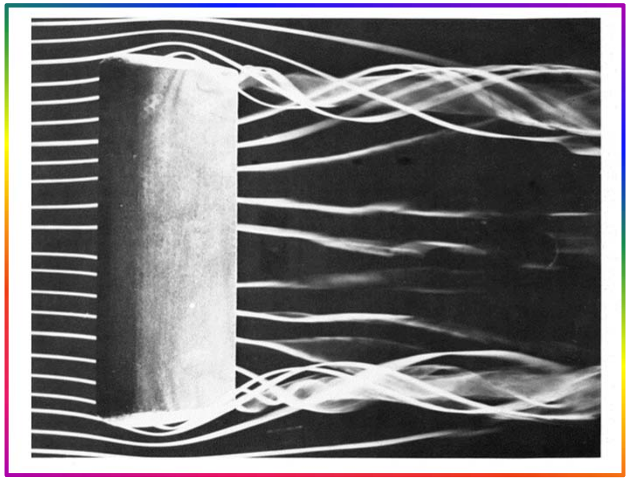

流谱

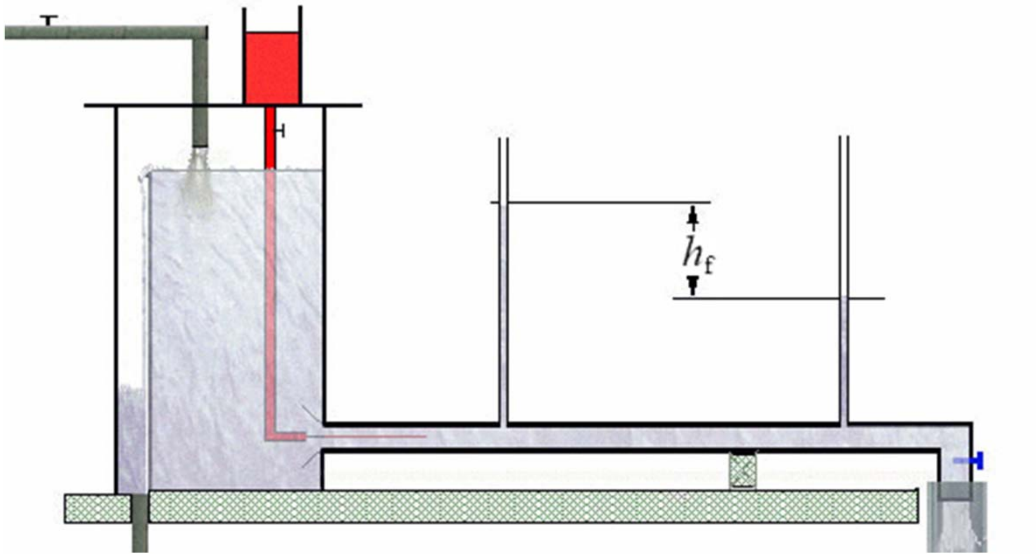
**脉线**

*streakline*

相继通过流场同一空间点的流体质点在同一瞬时的连线

- 流场显示技术，反映流场结构、流动特点





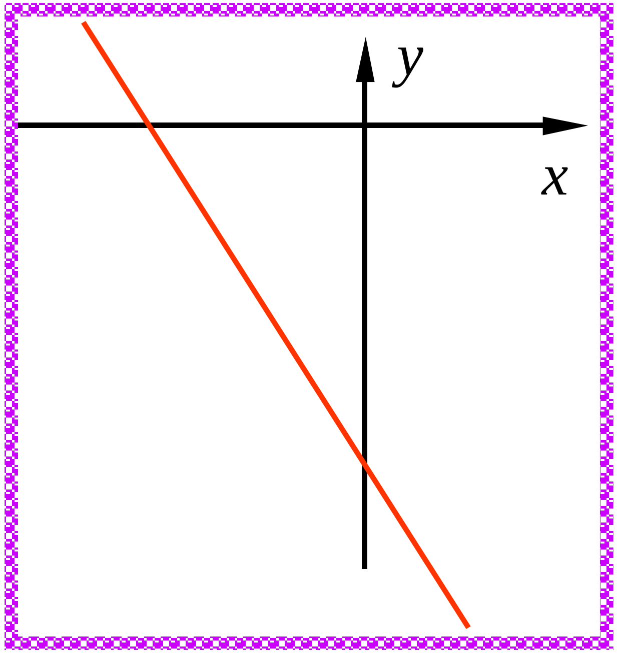
**例：设一流场，其欧拉表达式为 $u = x + t$， $v = -y + t$， $w = 0$，求 $t = 0$ 时过M (-1,-1)点的流线和迹线**

**解：1、迹线**

$$\frac{dx}{dt} = x + t \qquad \frac{dy}{dt} = -y + t$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} - t - 1 \\ y = C_2 e^{-t} + t - 1 \end{cases}$$

$$x + y = -2$$



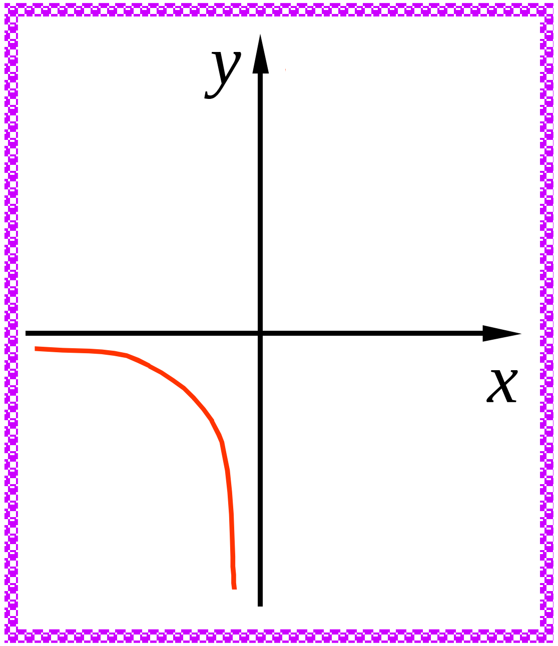
**2、流线**

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x+t}=\frac{dy}{-y+t}$$

$$\Rightarrow \ln(x+t)+\ln(-y+t)=C$$

$$\Rightarrow xy=1$$

$t=2$时 $\quad (x+2)(-y+2)=3$

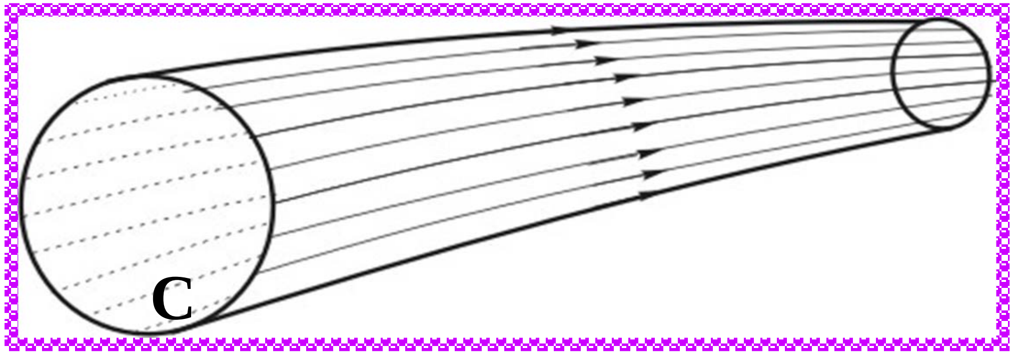



非定常流动条件下，流线、迹线、染色线不重合

# 流管 *streamtube*

在流场中做一封闭且不自相交的曲线 C，在某瞬时通过该曲线上的流线构成的管状表面称为流管

- 有限流管
- 流管元



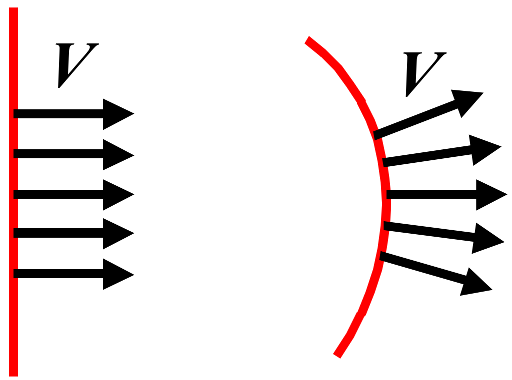

- 流体不能从侧壁穿入穿出
- 定常流动时，定常流动时流管形状不变，类似于固定管道

# 总流、过流断面

微小流束 → 微小流管内所有流线的总和

总流 → 流管内所有流线的总和

过流断面 → 与总流所有流线垂直的截面

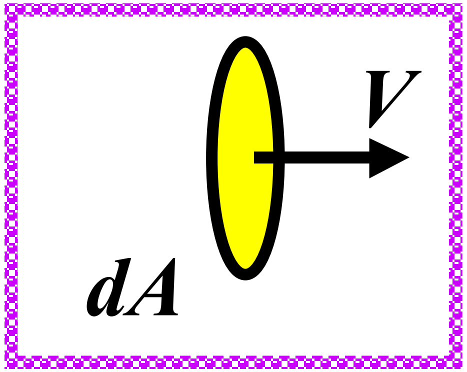


**质量流量**

*mass flow rate*

单位时间通过流管过流断面的流体质量

$$\dot{m} = \int_A \rho V dA$$




- 速度、密度在过流断面上均布

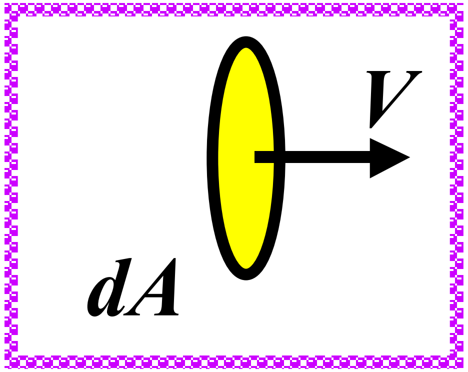
$$\dot{m} = \rho V A$$

**体积流量**

*volume flow rate*

单位时间通过流管过流断面的流体体积

$$Q = \int_A V dA$$




- 速度、密度在过流断面上均布

$$Q = VA$$

# 平均速度

**平均速度**

*average velocity*

假设过流断面上各点速度相等，通过的流量与实际流量相等

$$\overline{V}=\frac{\int_A V dA}{A}$$

- 以平均速度计算流量是准确的，但计算动量、动能等会引入误差，需要修正

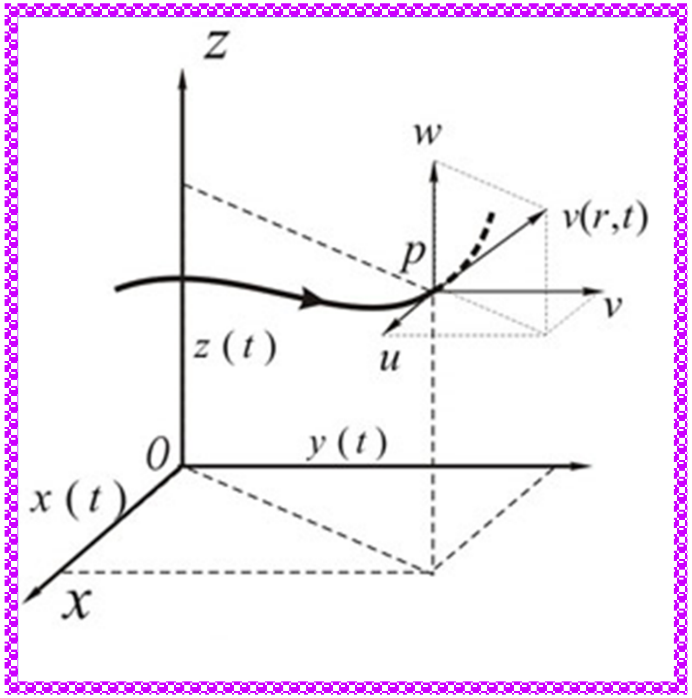
## 欧拉方法描述流体质点的加速度

$$\frac{\partial \vec{V}(x,y,z,t)}{\partial t} = ?$$

$t$ 时刻 ⇒ $\vec{V}(x,y,z,t)$

$t+\delta t$ 时刻 ⇒

$$\vec{V}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t)$$



$$\vec{a}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\vec{V}(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z,t+\delta t)-\vec{V}(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

流体质点的加速度 *acceleration of fluid particle*

流体质点的速度对时间的变化率

# 欧拉法描述流体质点的加速度2

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$ → 空间点上的速度对时间的变化率由速度场的非定常性引起

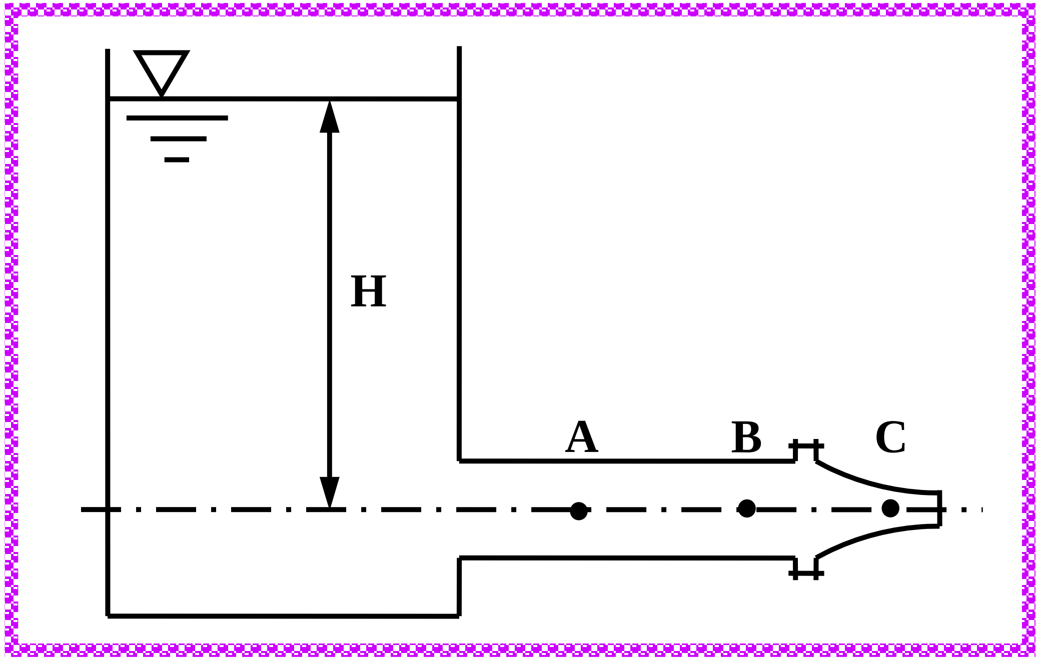
$\partial \vec{V}/\partial t = 0$ ⇕ 速度场定常

**当地加速度或局部加速度** *local acceleration*

$$u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$ → 由流体质点在非均匀的速度场中运动引起

**迁移加速度或对流加速度** *convective acceleration*

速度场均匀 → $u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0$




定常

A⇒B

匀速直线运动

无当地和对流加速度

B⇒C

加速运动，存在对流加速度

非定常

A⇒B 速度变化，存在当地加速度

B⇒C 速度变化，存在当地和对流加速度

任意物理量 $N$ 的物质导数

$$\frac{D\eta}{Dt}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}+w\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

$\frac{D\eta}{Dt}$ 流体质点的物理量 $\eta$ 随时间的变化率

物质导数（质点导数或随体导数） *substantial derivative*

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}$$ → 空间点上的 $N$ 随时间的变化率
由物理量场的非定常性引起

**局部导数或当地导数** *local derivative*

$$u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y}+w\frac{\partial \eta}{\partial z}$$ → 由流体质点在非均匀的物理量场中运动引起的 $N$ 的变化率

**位变导数或对流导数** *convective derivative*

例：已知速度场$u = 2xt$，$v = -2yt$，求流体质点的$a_x$，$a_y$。

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 2x + 4xt^2$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -2y + 4yt^2$$

## 不可压缩流体的数学描述

流体质点的密度在运动过程中保持不变

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

## 均质不可压缩流体的数学描述

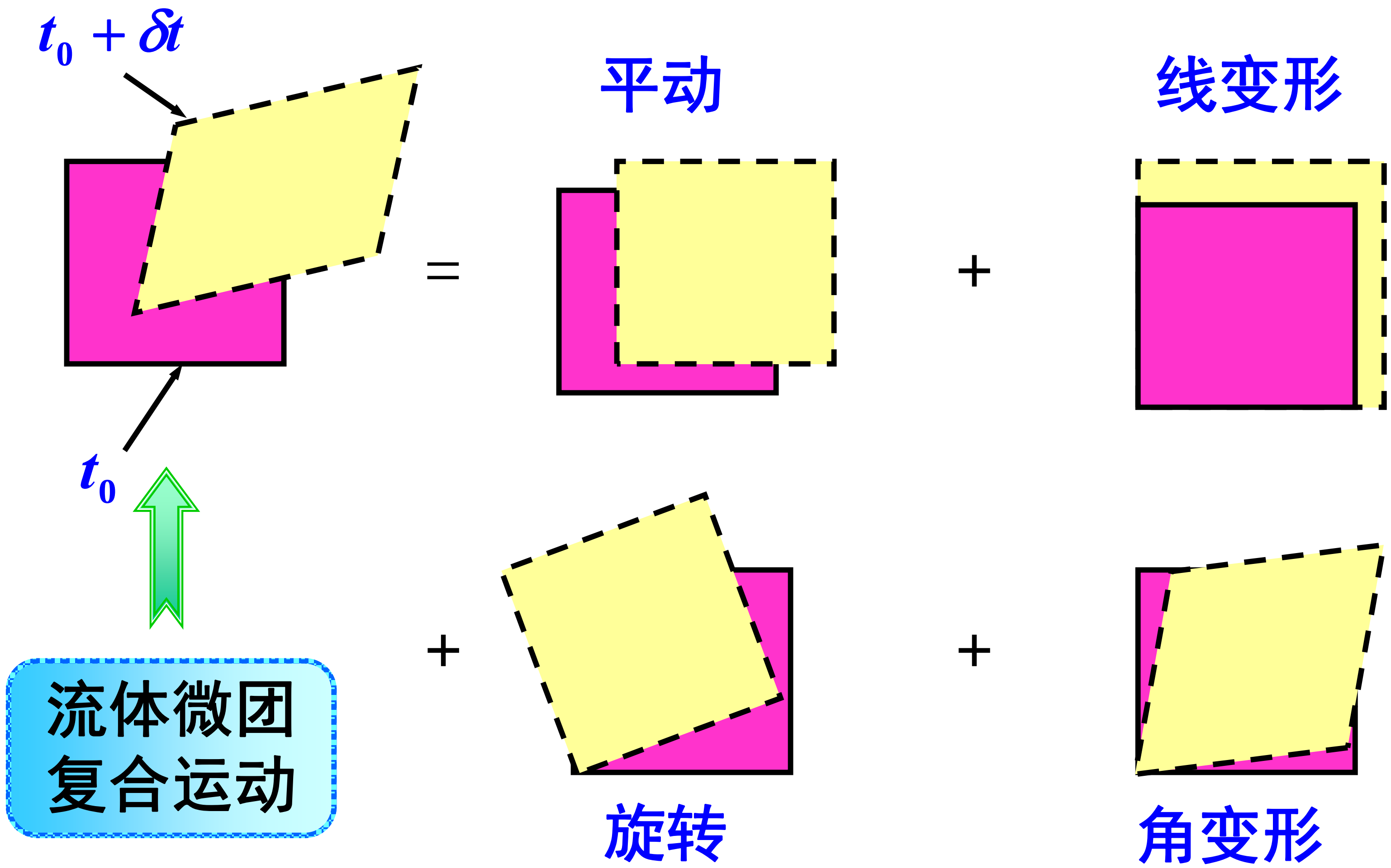
$$\rho=\mathrm{const}$$

## 流体质点

- 无线尺度，无变形运动

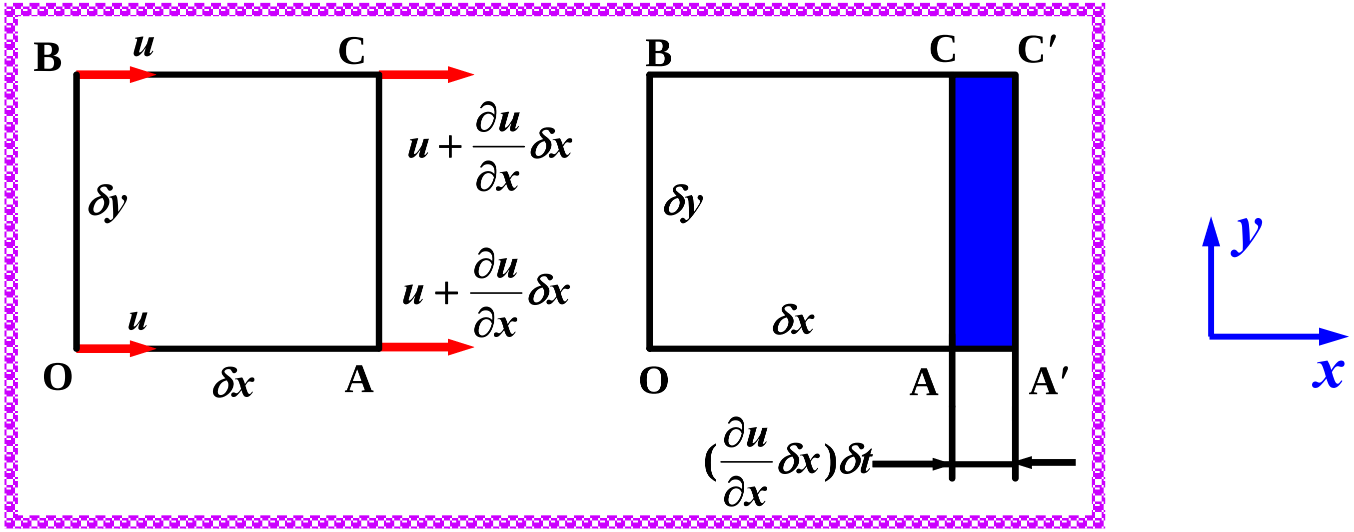
## 流体微团

- 大量流体质点构成的微小单元，有线尺度
- 流体质点的相对运动引起流体微团的变形、旋转



$t_0+\delta t$
$t_0$
流体微团复合运动
=
平动
+
线变形
+
旋转
+
角变形

## 线变形 —— 体积发生变化




- $x$ 方向相对变形率 ⟹ $\dfrac{\partial u}{\partial x}$
- $y$ 方向和 $z$ 方向相对变形率 ⟹ $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial w}{\partial z}$

**线变形引起总的相对体积膨胀率**

$$\frac{1}{\delta\tau}\frac{D(\delta\tau)}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V}$$

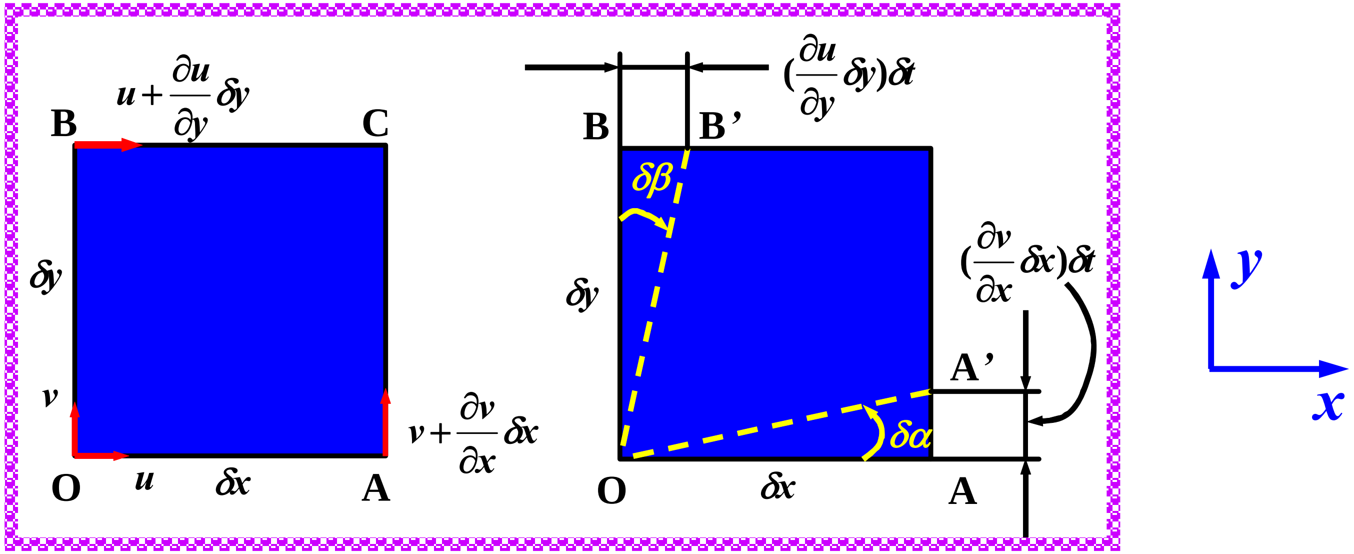
流体微团的角度，拉格朗日方法

- **不可压缩流体**

$$\nabla\cdot\vec{V}=0$$

速度散度为零

## 存在交叉导数




- **OA边旋转角速度** ⇒ $$\omega_{OA}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t}=\frac{\partial v}{\partial x}$$
- **OB边旋转角速度** ⇒ $$\omega_{OB}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\beta}{\delta t}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

# 旋转2

- 规定相互垂直的流体线OA和OB的角速度$\omega_{OA}$和$\omega_{OB}$的平均值为流体团绕 $z$ 轴的旋转角速度，且逆时针方向为正

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

*angular velocity*

- 流体团绕 $x$ 和 $y$ 轴的旋转角速度

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

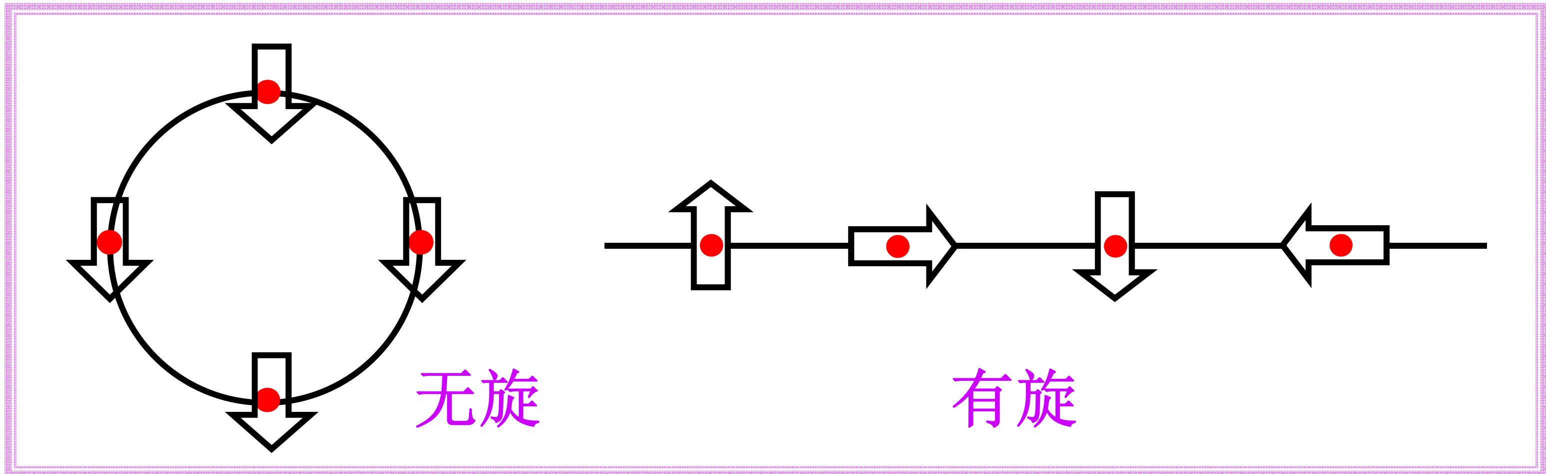
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V}$$

**涡量**

*vorticity*

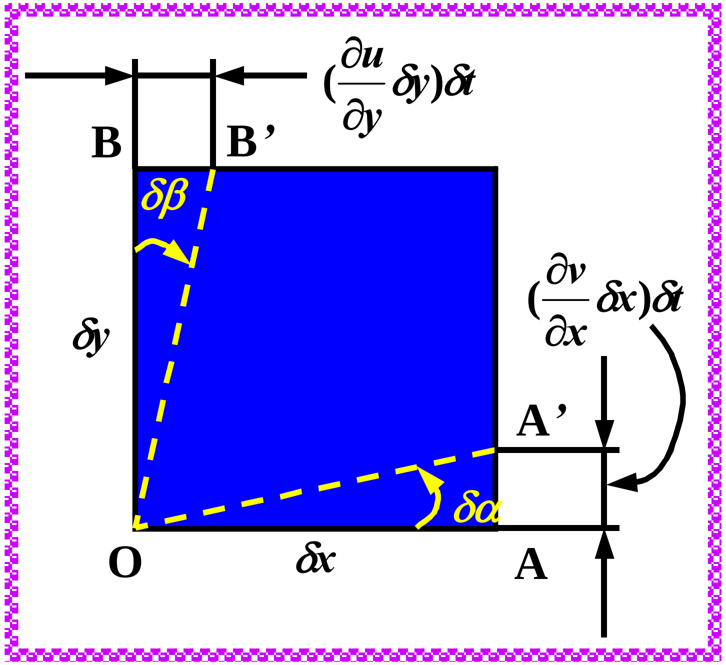
*irrotational flow*

**无旋流动** ⟹ $\vec{\omega} = 0$ 流体微团本身是否旋转



- OA、OB（$x$、$y$轴）间的角变形率

$$\frac{D\gamma_{xy}}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\gamma_{xy}}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\alpha+\delta\beta}{\delta t}$$




$$\frac{D\gamma_{xy}}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

- $y$、$z$ 轴及 $z$、$x$轴间的角变形率

$$\frac{D\gamma_{yz}}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{D\gamma_{zx}}{Dt}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

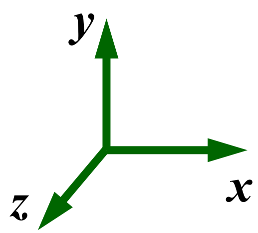
## 流体的连续性原理

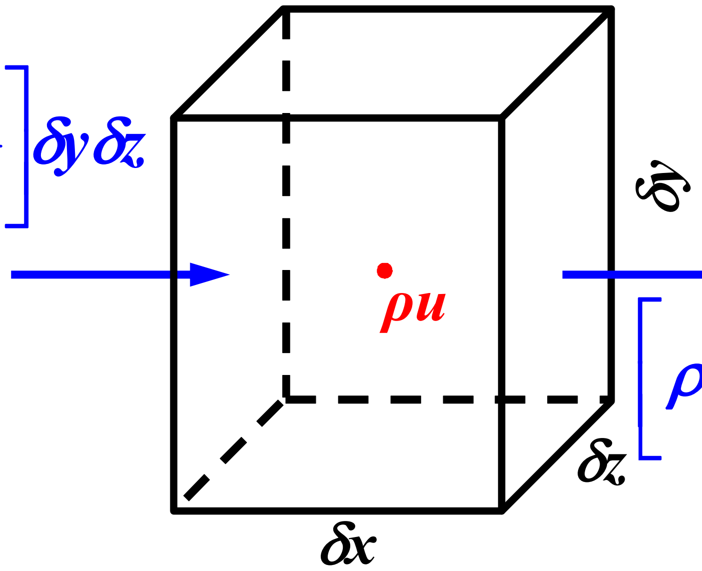
拉格朗日观点 → 流体系统包含的质量在运动过程中始终保持不变

欧拉观点 → 净流出控制体的流体质量应等于控制体减少的流体质量

## 对微元控制体应用质量守恒定律

$$\left[\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\,\delta z$$




质量流量

$$\left[\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\,\delta z$$

**$x$ 方向净流出控制体的质量流量** ⇒ $\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$

$y$、$z$ 方向净流出控制体的质量流量

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\delta x\delta y\delta z \qquad \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

控制体内流体质量随时间的变化率

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

流体密度与速度之间的制约关系

**连续方程**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

*differential continuity equation*

定常流动

*steady flow*

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

$$\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0$$

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z$$

净流出控制体的总质量流量

定常流动净流出单位控制体的质量流量为零

# 微分形式的连续方程4

连续方程 → $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{V} = 0$$

不可压缩流体 → $$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$ *incompressible flow*

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ ← 拉格朗日方法下速度散度的意义：流体微团的相对体积膨胀率为零

*divergence of the velocity*

净流出单位控制体的体积流量为零

适用于定常及非定常流动

流体运动的连续性方程是
质量守恒定律在流体力学中的具体表达式

- 只有满足连续性方程的流动在实际中才可能存在
- 连续方程反映了流体密度与速度之间的制约关系
- 连续方程对理想流体和粘性流体均适用

# 微分形式的连续方程6

例：设一不可压缩流场的速度分布为$u = t + 3x$, $v = 2t - 2y$, $w = 4y + z - 3$，问此流动是否存在？

解：由速度分布得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2\ ,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 3 - 2 + 1 \neq 0$$

故知此流动在实际中不可能存在

例：不可压缩流体的平面定常流动，$x$ 方向的速度分量为$u = x^2 + y$，且$y = 0$时，$v = 0$，求 $y$ 方向的速度分量$v$。

解：满足不可压缩流体连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -2x$$

$$\Rightarrow v = -2xy + f(x)$$ 由 $y = 0$时，$v = 0$

$$\Rightarrow v = -2xy$$

已知流场的速度分布为 $\vec{V}=\left(4x^2+2y+xy\right)\vec{i}+\left(3x-y^3+z\right)\vec{j}$

（1）求点（2，2，3）的加速度；

（2）是几维流动；是否为不可压缩流动？

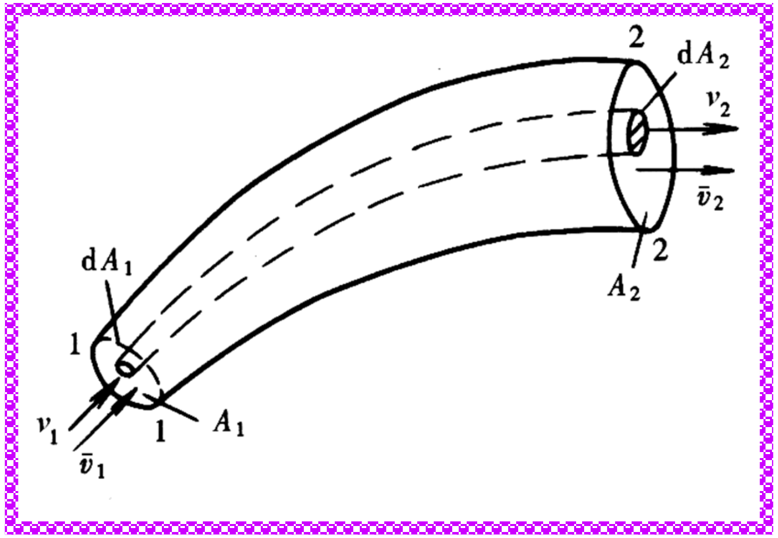
（3）是定常流动还是非定常流动？

(1) 采用物质导数公式进行计算

(2) 速度与三个空间坐标有关，是三维流动；不符合不可压缩流动连续方程，不是不可压缩流动

(3) 速度分布与时间无关，是定常流动

## 定常流动质量守恒




单位时间由1-1流入$dA_1$的流体质量

$$d\dot{m}_1=\rho_1\vec{V}_1\cdot\vec{n}dA_1$$

由2-2流出$dA_2$的流体质量

$$d\dot{m}_2=\rho_2\vec{V}_2\cdot\vec{n}dA_2$$

根据质量守恒

$$\int_{A_1}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dA=\int_{A_2}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dA$$

流体密度、速度、过流断面面积之间的制约关系

## 不可压缩流体

$$\int_{A_1} \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{A_2} \vec{V} \cdot \vec{n} dA \xrightarrow{\text{积分}} \overline{V}_1 A_1 = \overline{V}_2 A_2$$

$$\Rightarrow \quad Q = \text{const}$$

## 可压缩流体

$$\Rightarrow \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \Rightarrow \dot{m} = \text{const}$$

**作业：P.98～100**

- 3 . 2
- 3 . 16
- 3 . 22
- 3 . 23
- 3 . 27 (1)

# 小结1

## 描述流体运动的两种方法

- 拉格朗日方法
- 欧拉方法

## 物质导数

采用欧拉变量描述流体质点某物理量对时间的变化率

# 小结2

**迹线、流线、染色线**

- 三种线的特点、区别与联系
- 迹线方程、流线方程

**流体微团的线变形、旋转、角变形**

- 相对体积膨胀率、角速度、角变形率

## 连续性原理

拉格朗日方法

欧拉方法

# 小结4

## 几个概念

- 物质导数、局部导数、对流导数
- 流管、微小流束、总流、过流断面、质量流量、体积流量、平均速度
- 散度、旋度

公式

物质导数

$$\frac{D\eta}{Dt}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}+w\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

迹线方程

$$\frac{dx}{dt}=u\ ,\ \frac{dy}{dt}=v\ ,\ \frac{dz}{dt}=w$$

# 小结6

- 流线方程

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

- 质量流量和体积流量

$$\dot{m}=\int_A \rho V dA \qquad Q=\int_A V dA$$

- 相对体积膨胀率

$$\frac{1}{\delta\tau}\frac{d(\delta\tau)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{V}$$

# 小结7

## 流体微团旋转角速度

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{V}$$

## 流体微团角变形率

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

# 小结8

## 微分形式连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

## 一维流动连续方程

$$\rho_1 V_1 A_1=\rho_2 V_2 A_2$$

$$\overline{V}_1 A_1=\overline{V}_2 A_2$$

下列流动适合用那一种方法描述

A、研究一污染物粒子在水中运动的轨迹

B、研究无数质点组成的质点群的运动

C、研究一流动空间的速度分布

# 描述流体运动的方法思考题2

某人坐在匀速运动的飞机上测量和记录周围各点空气的速度和压强，请问它采用的研究方法是

A、拉格朗日方法

B、欧拉方法

C、两者都不是