流体静力学概述1

流体静力学 → 流体在外力作用下的平衡规律

fluid statics

静止 { 绝对静止 / 相对静止 } → 流体质点间不存在相对运动 → 无剪应力

基础知识

→ 作用在流体上的力，不可压缩流体

一、流体静压强特性

二、静止流体中的压强分布

静止流体平衡微分方程、相对静止问题及重力场中流体的平衡、压强测量

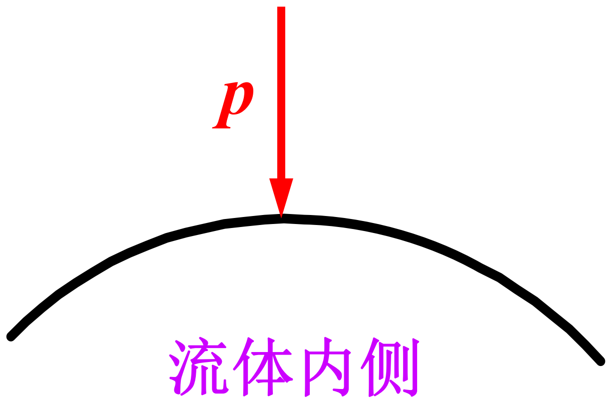
三、作用在壁面上的流体静压力

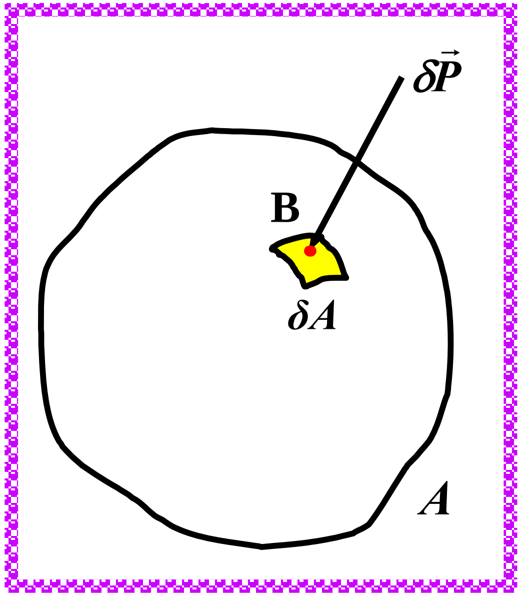
问题

- 流体静压强是怎样定义的？
- 流体静压强有什么特性？
- 流体内部静压强的变化与什么有关？

流体静压强 ⇒ $$p=\lim_{\delta A\to 0}\frac{\delta\vec{P}}{\delta A}$$ *pressure*

流体静压强的方向垂直于作用面，并指向流体内部





流体静压强及其特性2

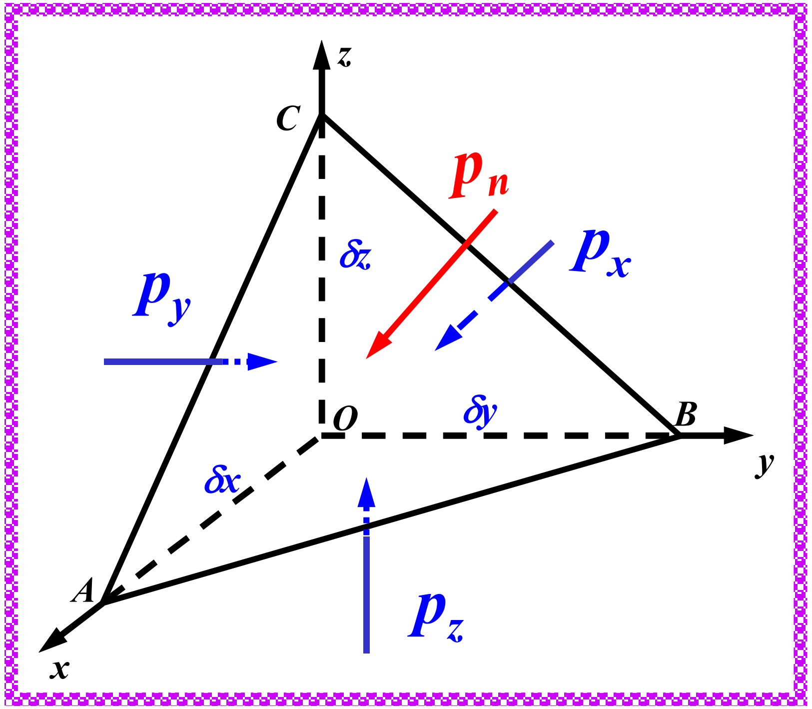
静止流体任意点处静压强的大小与其作用面方位无关，只是作用点位置的函数

- 取任意微元四面体如图
- 质量力 ⇐ 重力、惯性力

$$\vec{f}\cdot\rho\frac{1}{6}\delta x\delta y\delta z$$

- 表面力 ⇐ 只有法向力

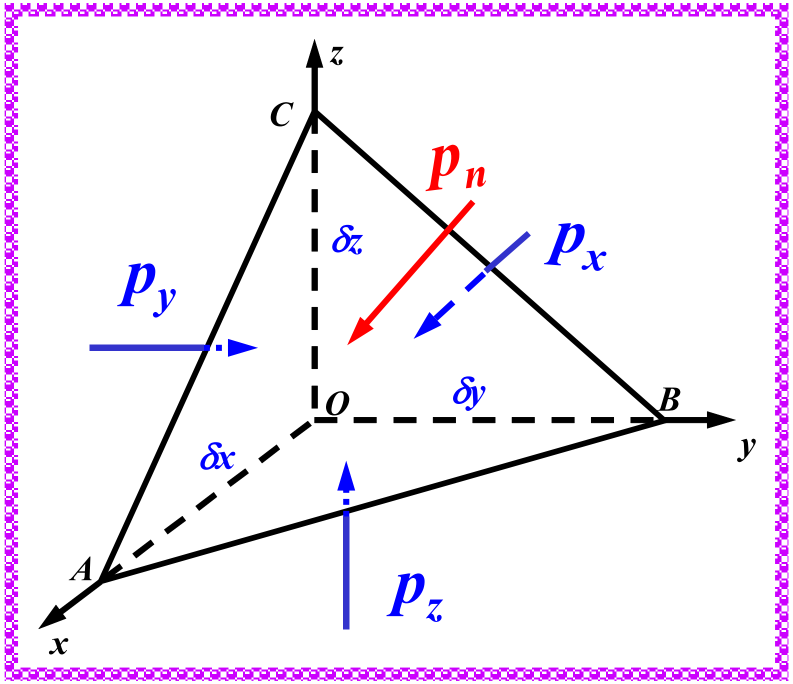
$$p_x\frac{1}{2}\delta y\delta z \qquad p_y\frac{1}{2}\delta x\delta z$$



- 表面力 $p_z \frac{1}{2}\delta x \delta y$ $p_n \delta A$

- 所受合力为零

流体内部无切向力，由质量力与压力平衡可得压强大小只是作用点位置的函数



$$p = f(x, y, z)$$

理想流体压强 $p = f(x, y, z)$ 流体中不存在切向力

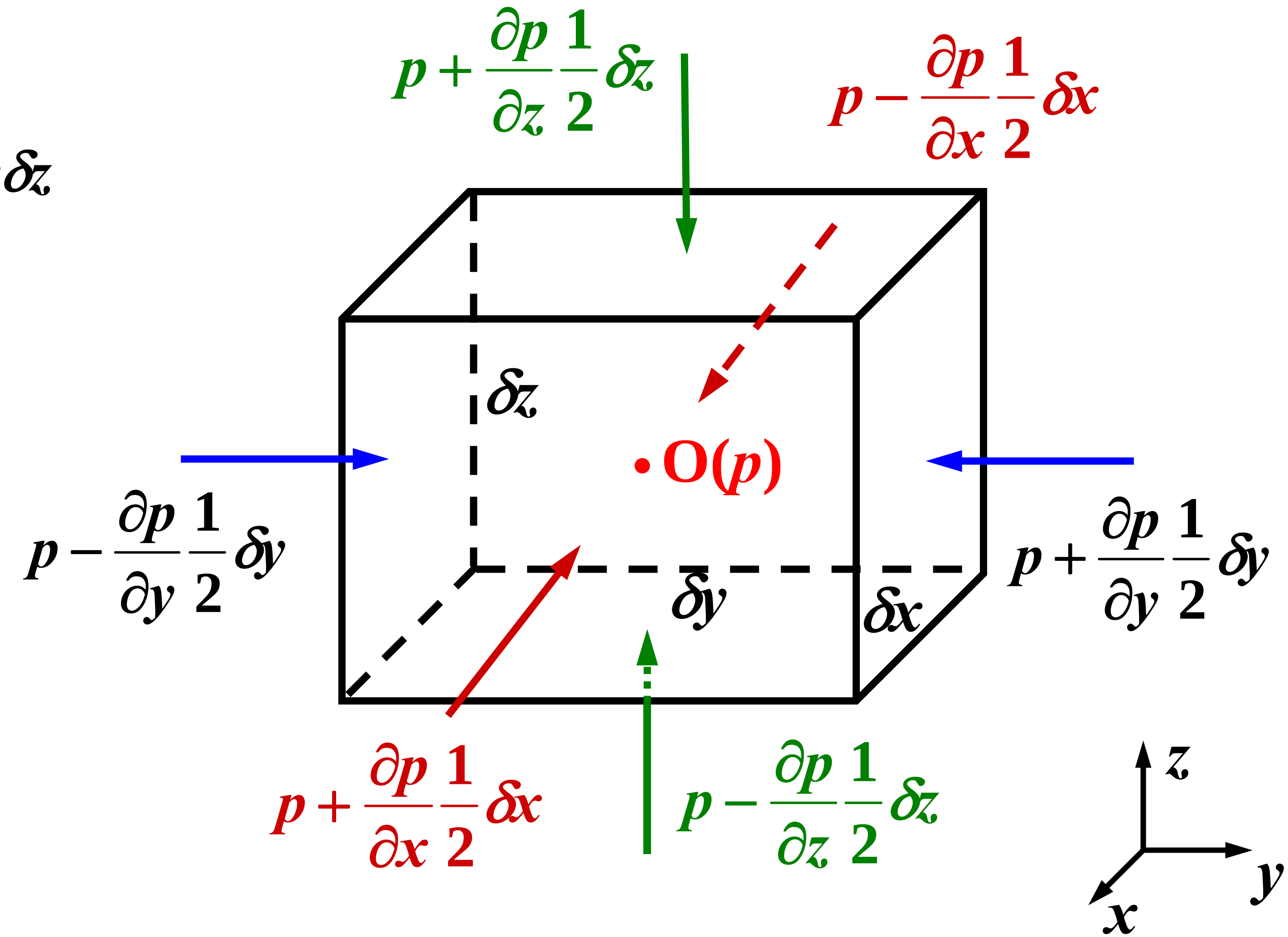
- **质量力**

$$\vec{f}\cdot\rho\delta x\delta y\delta z$$

- **表面力**

泰勒级数展开略去高阶小项

压强沿空间变化，导致单元受力



六面体微元所受的表面力合力

$$-\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z-\vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z-\vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

$$=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z=-\nabla p\,\delta x\delta y\delta z$$

压强梯度

pressure gradient

静止流体受力平衡

$$\vec{f}\cdot\rho\delta x\delta y\delta z-\nabla p\delta x\delta y\delta z=0$$

质量力　　　压力

静止流体平衡方程—欧拉平衡方程

$$\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$$

静止流体中压强与质量力的平衡方程

静止流体平衡微分方程4

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

- 压强梯度导致的净力必须由重力或加速度或流体其它效应平衡——力平衡
- 压强梯度描述压强在空间中最大变化率的方向和大小，由质量力决定——大小和方向
- 压强在质量力方向上变化最快，与质量力垂直的方向无变化——等压面

⇒ 等压面与质量力处处垂直

条件 ⇒ 连通的静止流体，只在 z 向有重力作用，z 的正方向垂直向上

方程 $\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$ ⇒

$$\begin{cases} 0-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ 0-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ -g-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases}$$

⇒ *hydrostatic pressure distribution*

$$\boxed{\frac{dp}{dz}=-\rho g}$$

- 压强只是 z 的函数，水平面上各点压强相等
- 压强最大的变化方向在铅垂方向
- z 方向压强梯度为负，压强沿深度方向逐渐增大

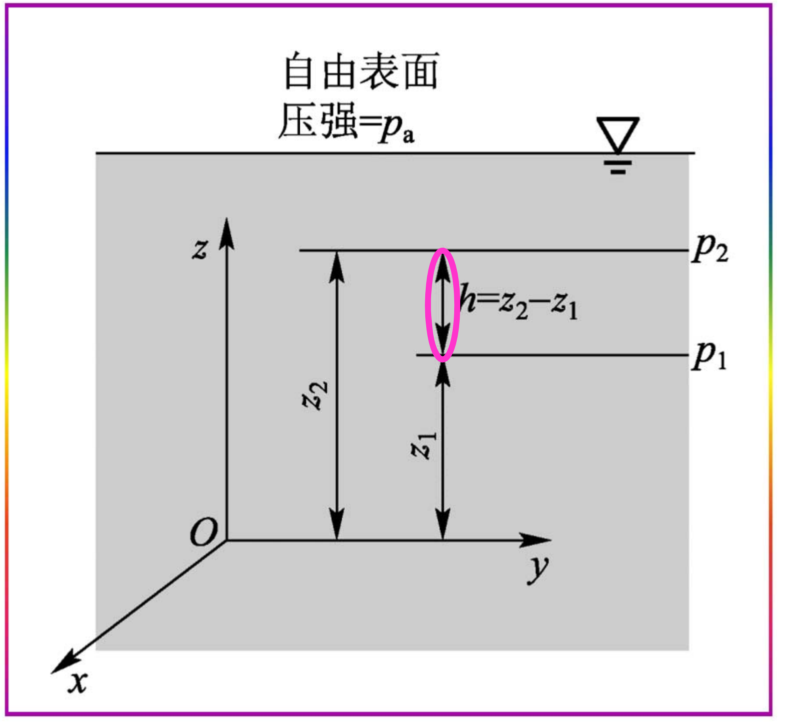
均质不可压缩流体 → $\rho =$ 常数

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

→ $$p_1 = p_2 + \rho g h$$

z_2 与自由面等高

→ $$p_1 = p_a + \rho g h$$



不可压缩流体压强分布2

公式的内涵 ⇒ $p_1 = p_2 + \rho g h$

- 在铅垂方向，压强与淹深成线性关系
- 等压面为水平面

$$p_1 = p_2 + \rho g h \Rightarrow h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

密度为 ρ，高度为 h 的一段液柱的重量

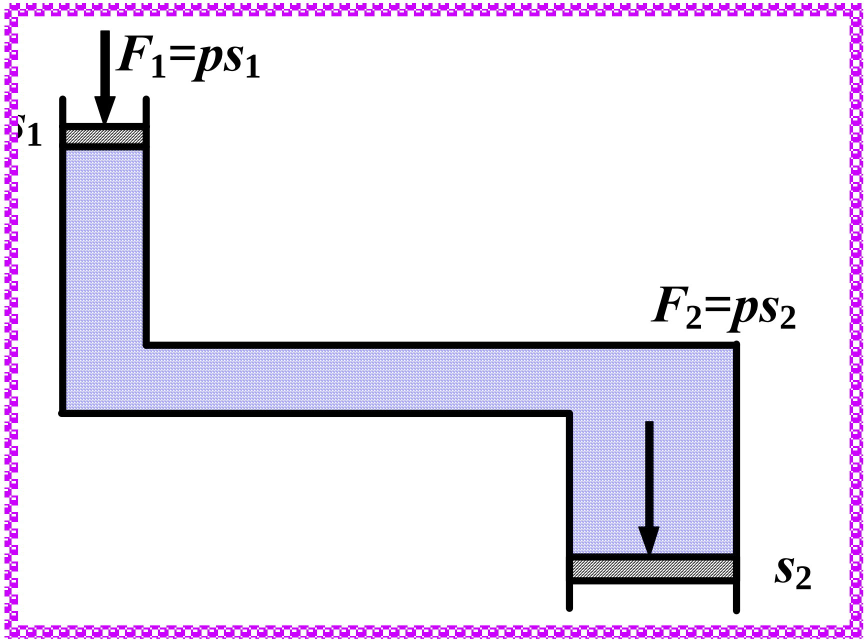
☞ $p_2 = 0$，1点绝对压强对应的液柱高度

☞ $p_2 = p_a$，1点表压（计示压强）对应的液柱高度

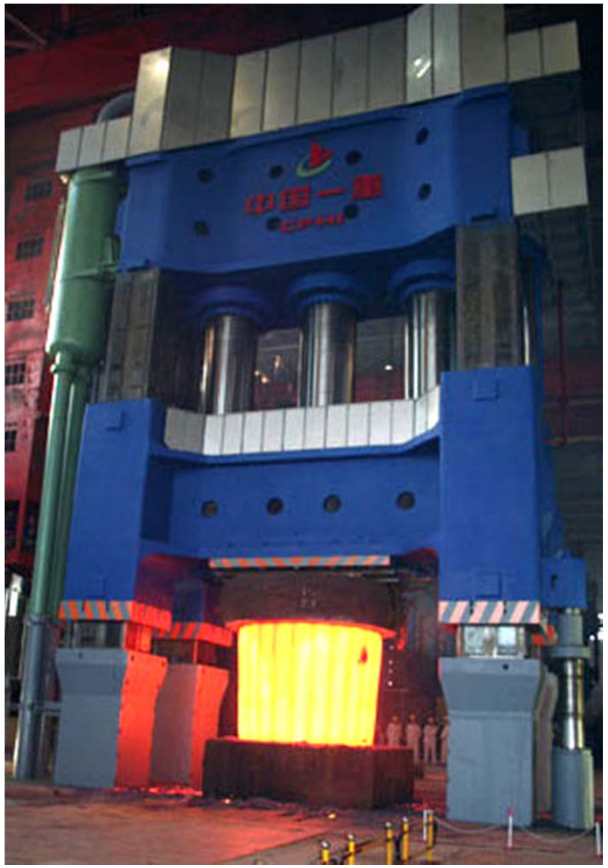
帕斯卡原理

$$p_1 = p_2 + \rho g h \quad \Rightarrow \quad \delta p_1 = \delta p_2$$

充满液体的连通器内，一点的压强变化可瞬时间传递到整个连通器内



$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{s_2}{s_1}$$



中国二重，80000吨模锻液压机，2012

中国一重，15000 吨水压机，2006. 12

基准

atmospheric pressure

绝对真空

当地大气压强

绝对压强

p

absolute pressure

计示压强（表压）

p_m

gage pressure

真空压强

p_v

vacuum pressure

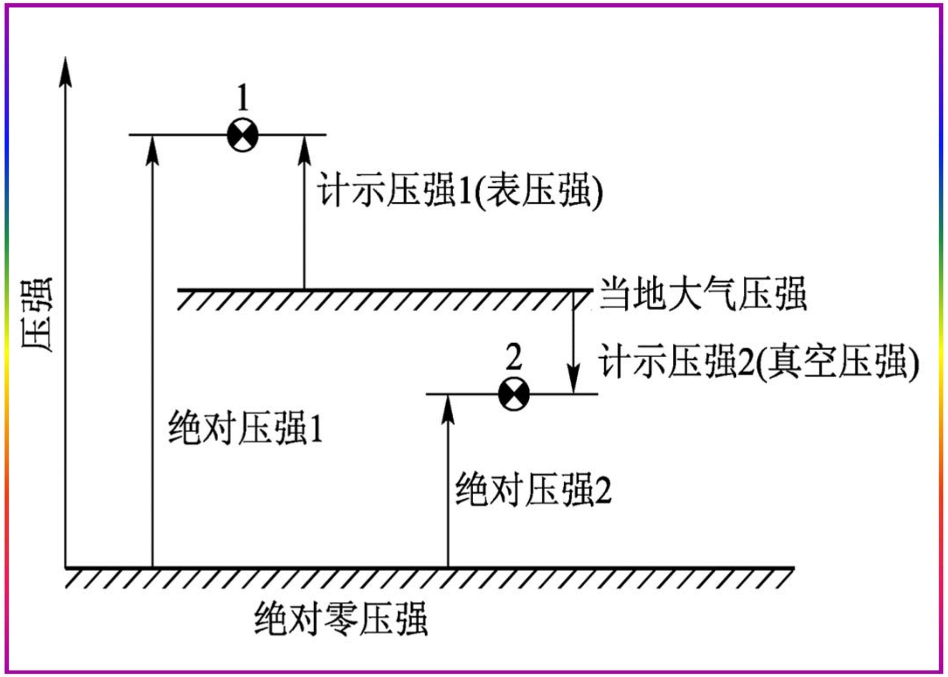
- 绝对压强总为正

- 表压有正有负

$$p_m = p - p_a$$

- 表压为负，取其绝对值，为真空压强

$$p_v = p_a - p$$



国际单位制：1 Pa = 1 N/m²

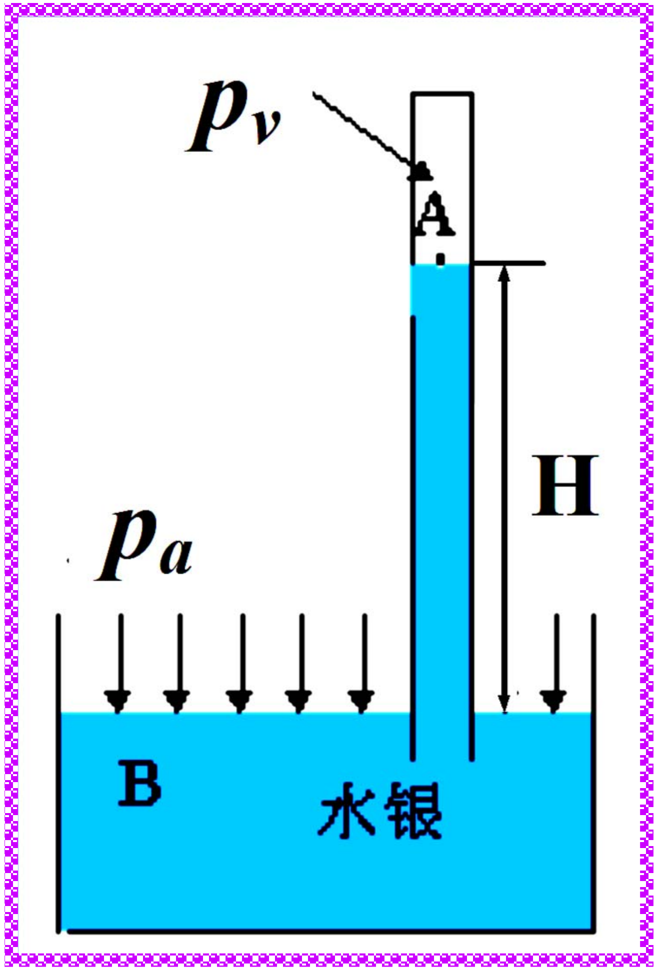
工程单位制：大气压(at、atm), 巴(bar), 液柱高度

标准大气压

$$1\ \text{atm} = 1.013\times10^5\ \text{Pa} = 760\ \text{mm (Hg)} = 10.33\ \text{m}\ (H_2O)$$

工程大气压

$$1\ \text{at} = 1\text{kgf/cm}^2 = 0.981\times10^5\ \text{Pa} = 10\ \text{m}(H_2O)$$



- 大气压强随当地经纬度，海拔高度及季节时间的不同而不同

standard atmospheric pressure

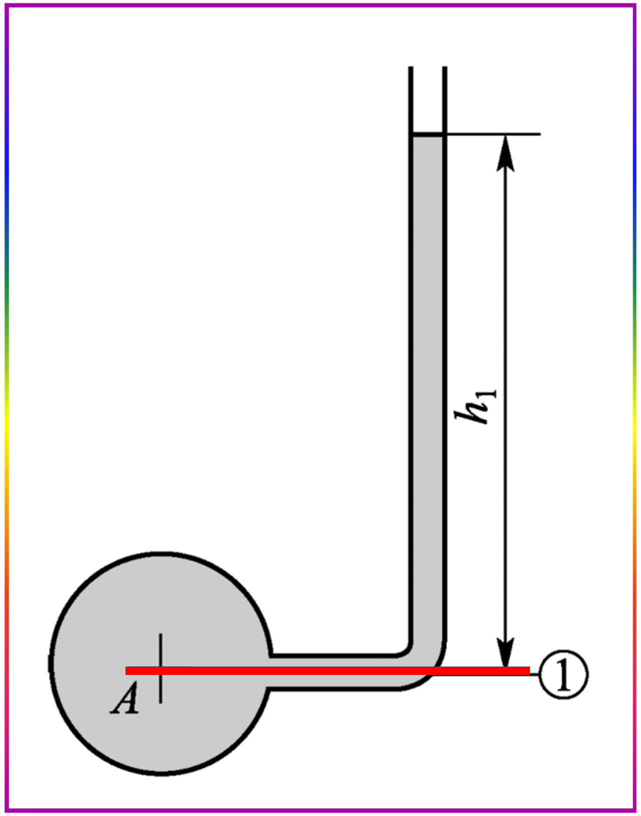
1 标准大气压

1.013×10^5Pa

$$H = 760\text{mmHg}$$

$$p_{Am} = \rho g h_1$$

单管测压计的缺点



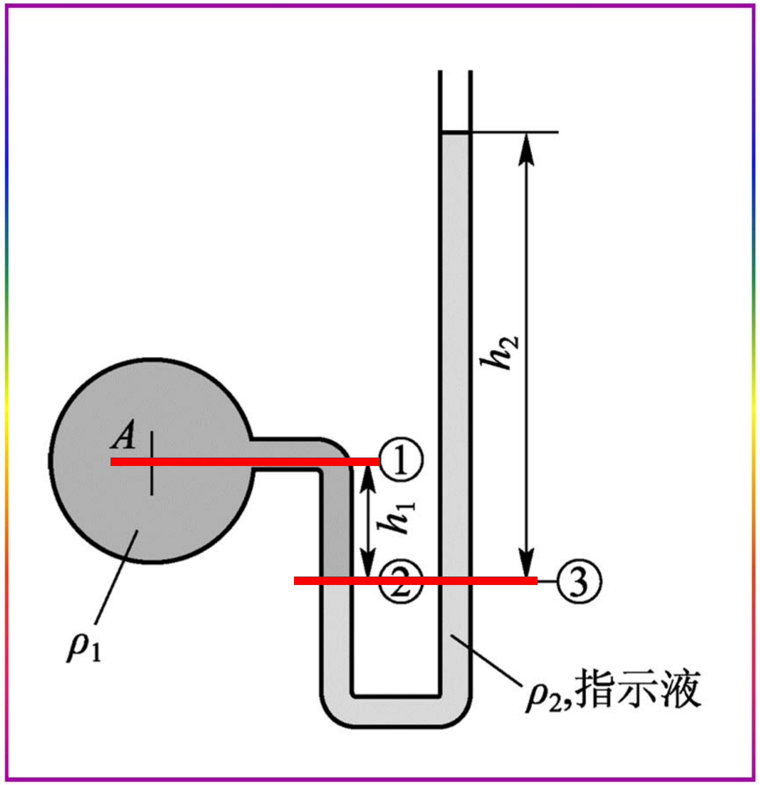
- 被测压强不能太大
- 只能测量液体压强
- 被测压强必须高于当地大气压强

$$p_{Am} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

- 作等压面

  被测点　　相界面

- 等高的两点必须在连通的同一种液体中



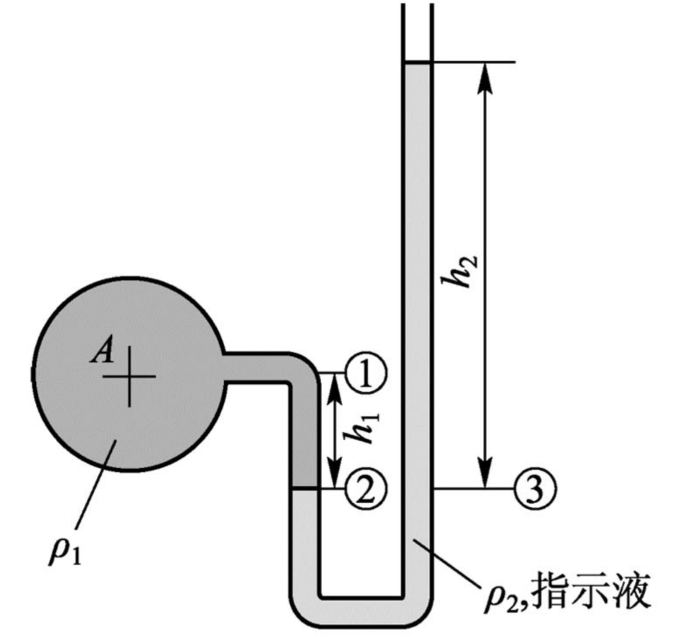
- 沿液柱向上，压强减小液柱向下，压强增大

U 型管测压计特点

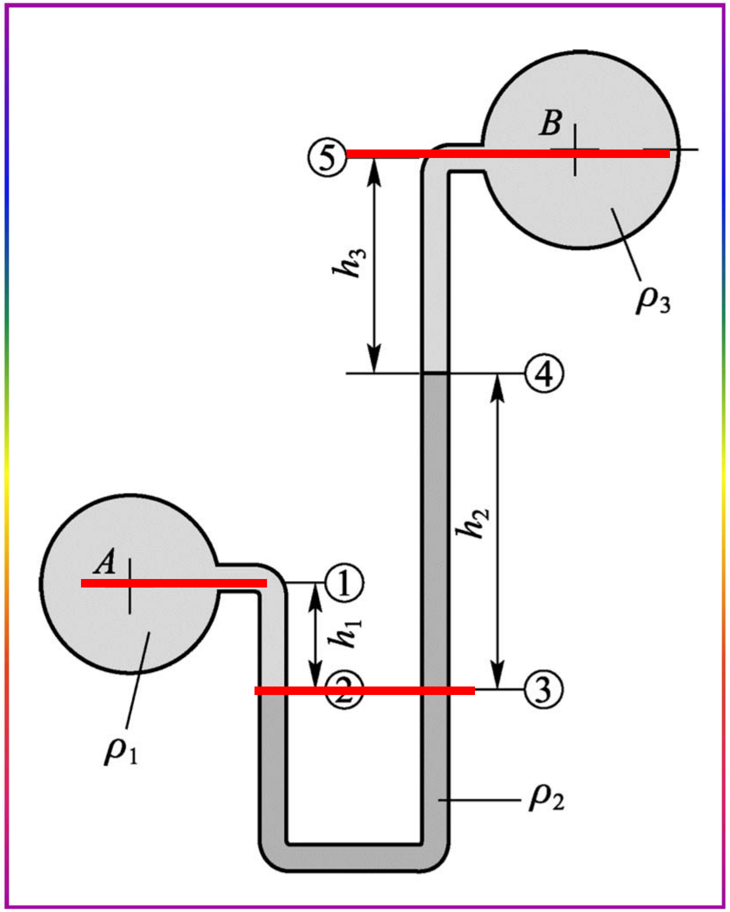
- 测量范围较大
- 可测量气体压强

$$p_{Am} = \rho_2 g h_2 - \cancel{\rho_1 g h_1} \approx \rho_2 g h_2$$

- 可测量真空压强
- 指示液不能与被测液体掺混



差压计



$$p_A - p_B = \rho_3 g h_3 + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

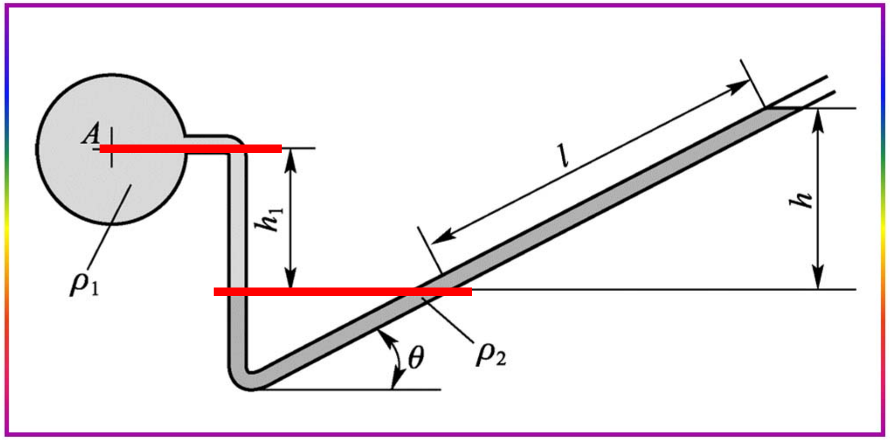
倾斜式测压计（微压计）

通常用来测量气体压强

$$p_{Am} = \rho_2 g l \sin\theta - \rho_1 g h_1$$

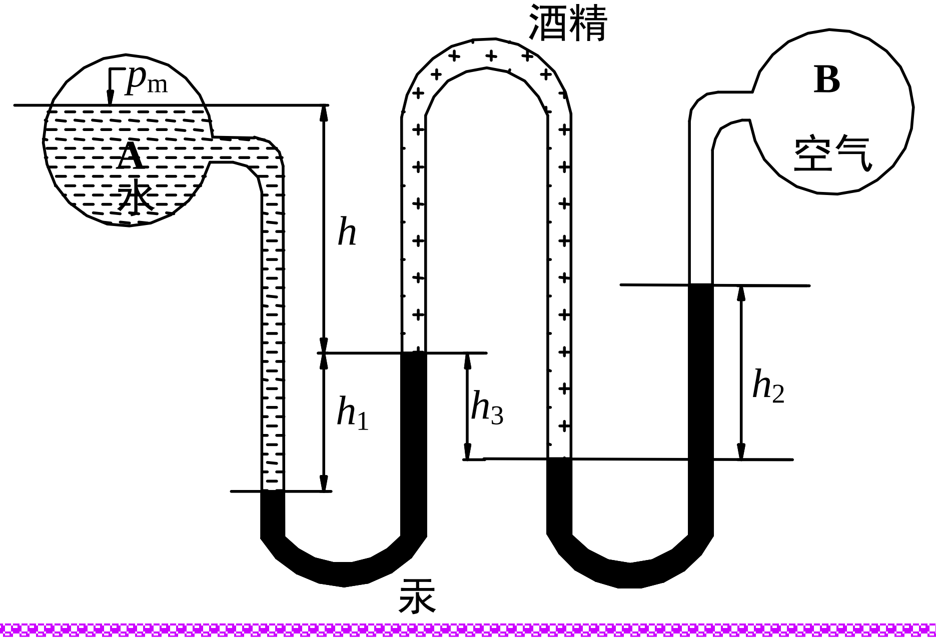
- 倾斜管放大了测量距离，提高了测量精度

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\sin\theta}$$



U型管测压计例题

如图所示多管式压强计，若B容器中空气的表压 $p = -2.74\times10^4$ Pa，h = 500mm，h_1 = 200mm，h_2 = 250mm，h_3 = 150mm，求容器A上部的表压 p_m



问题

- 非惯性系相对平衡问题有什么特点？
- 质量力包括哪些力？压强分布状况如何？
- 等压面是什么形状？

非惯性系，相对静止问题

- 流体相对于运动坐标系静止，质点间无相对运动，流体与器壁间也无相对运动 ⟹ 无切向力

相对静止平衡微分方程

⟹
$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \Rightarrow \vec{g} - \vec{a} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

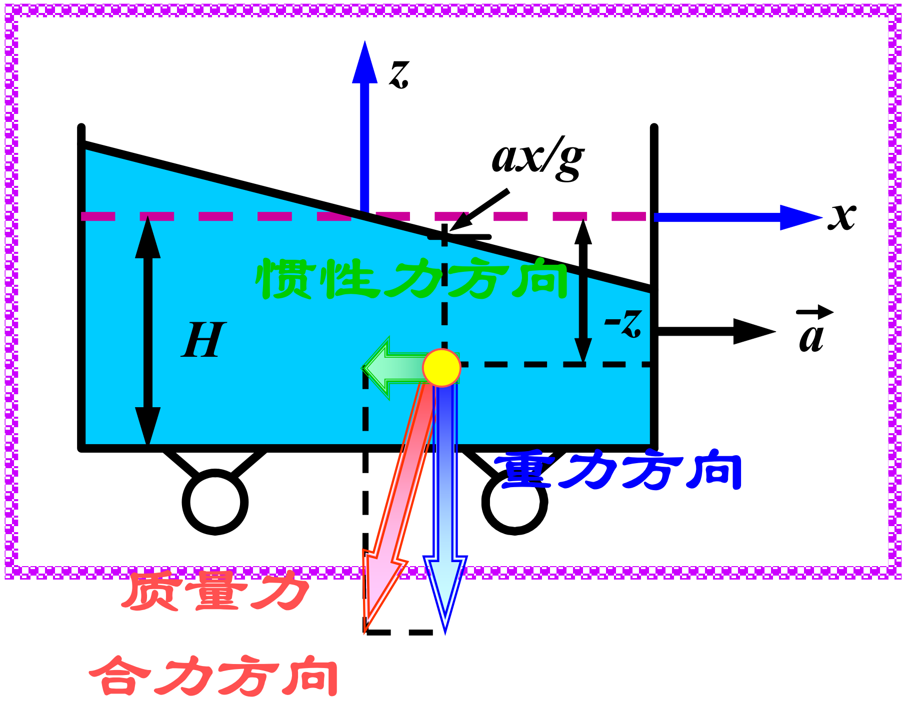
☞ 质量力

$$f_x = -a \qquad f_y = 0$$

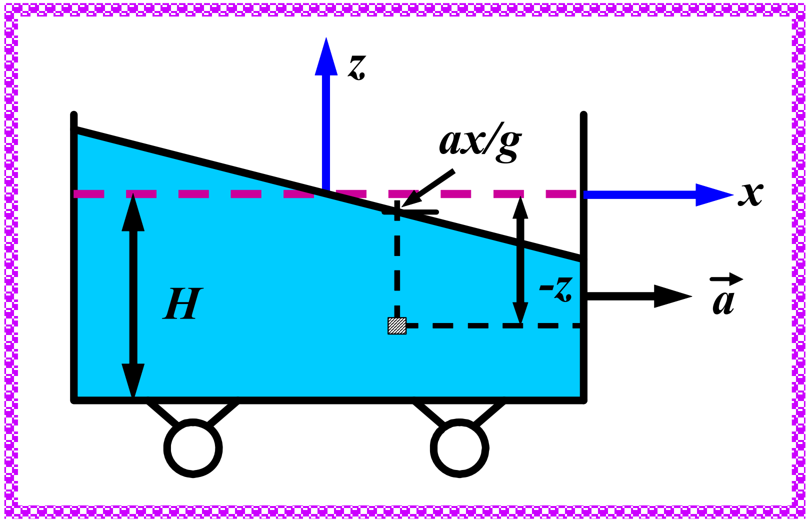
$$f_z = -g$$

$$\begin{cases} -a - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ 0 - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -g - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

uniform rigid-body acceleration

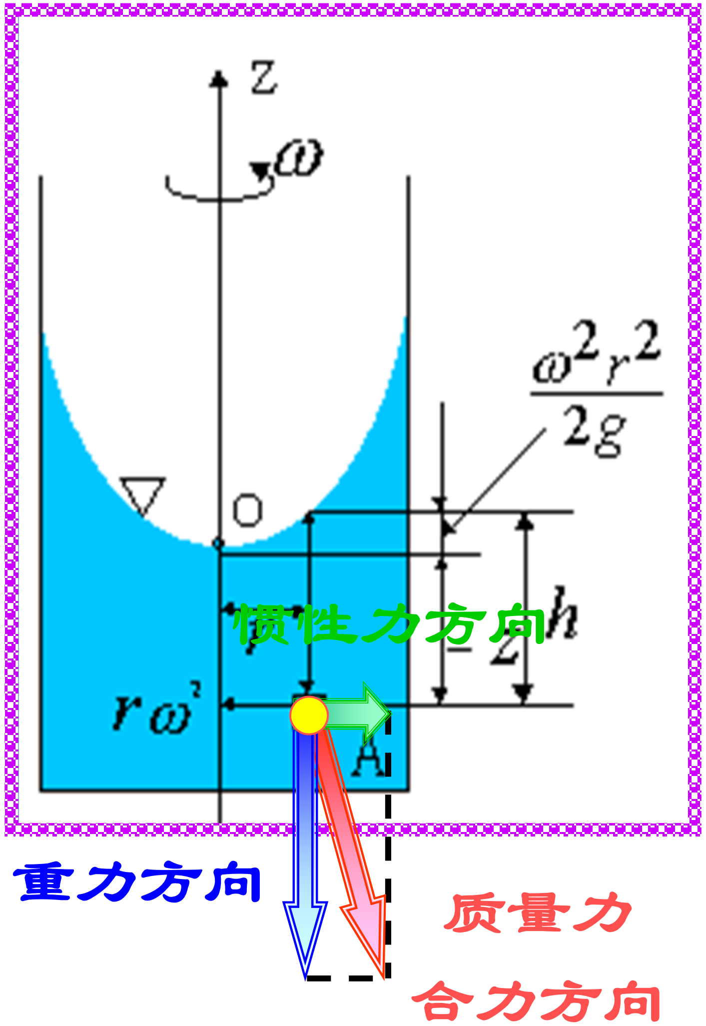


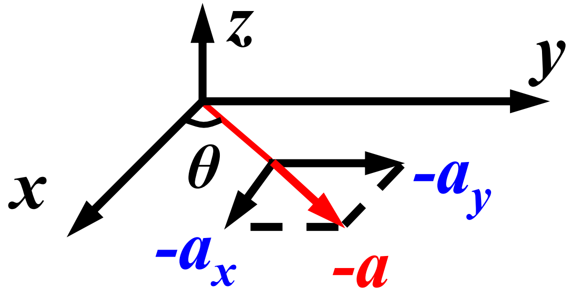
- 匀加速运动，流体质点间无相对运动



- 等压面与质量力方向垂直 — 斜面
- 压强分布 ⇒ $$p = p_a + \rho g\left(-z - \frac{a}{g}x\right)$$ 淹深 h

rigid-body rotation

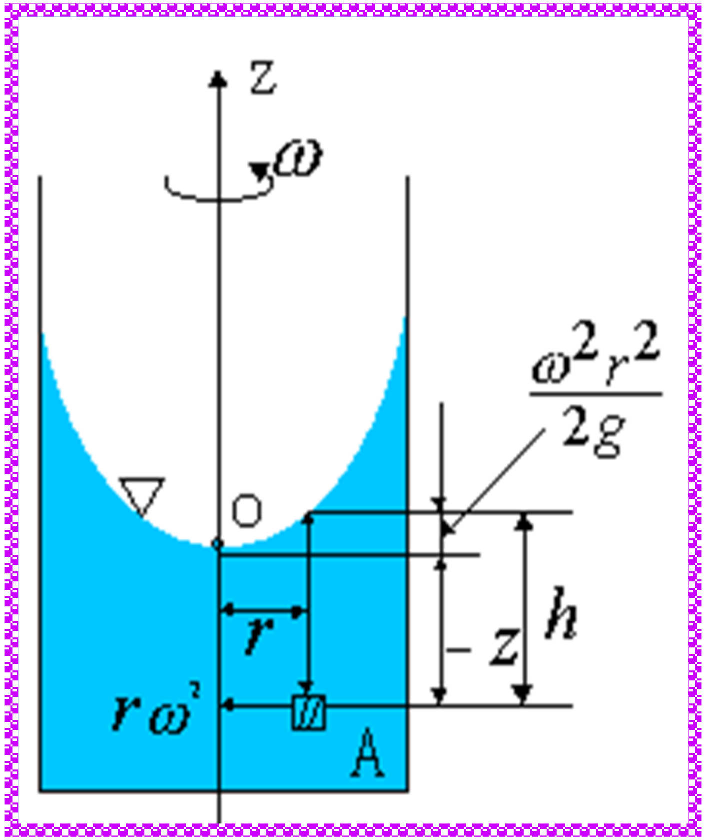




$$f_x = \omega^2 x \qquad f_y = \omega^2 y \qquad f_z = -g$$

$$\begin{cases} \omega^2 x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \omega^2 y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -g - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- 等角速转动，流体质点间无相对运动



- 等压面与质量力方向垂直
  — 抛物面
- 压强分布

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right)$$

淹深 h

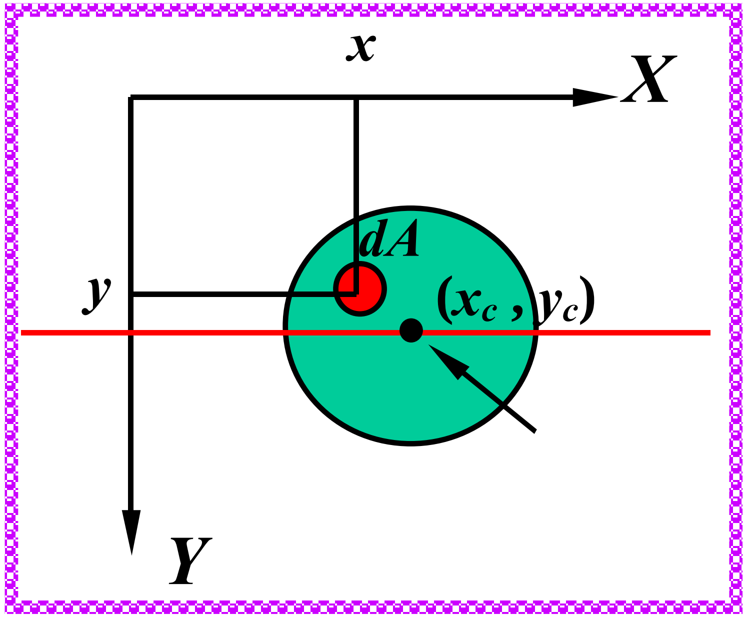
问题

- 作用在平板上静水压力的大小、方向
- 作用在平板上静水压力的作用点位置

- 均质平板形心 *centroid*

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x\,dA$$

$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA$$



- A 对 x 轴的惯性矩

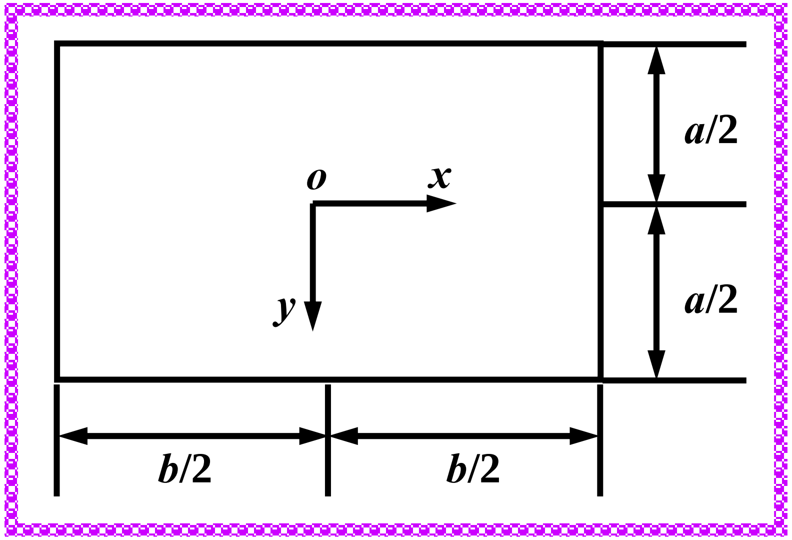
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

moment of inertia

- 惯性矩移轴定理

$$\boxed{I_x = I_{xc} + y_C^2 A}$$

I_{xc} 为A对通过形心并与 x 轴平行的轴的惯性矩



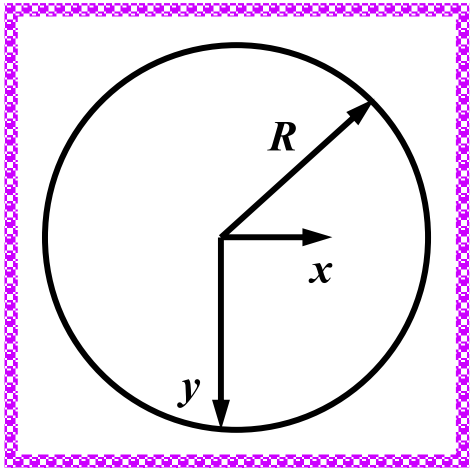
$$A = ba$$

$$I_{xC} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yC} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyC} = 0$$

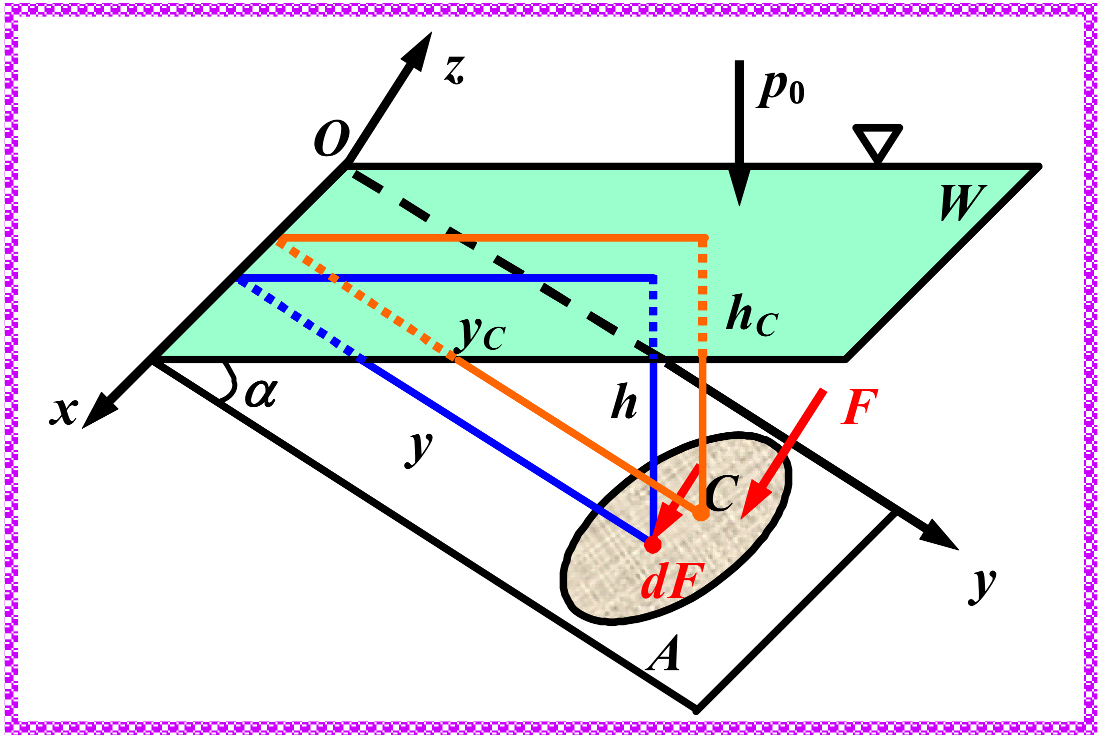
product of inertia



$$A = \pi R^2$$

$$I_{xC} = I_{yC} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyC} = 0$$



- 平行力系作用在一侧平板上的合力

形心淹深

$$F=\left(p_0+\rho g h_C\right)A=p_C A$$

$$h_C=y_C\sin\alpha$$

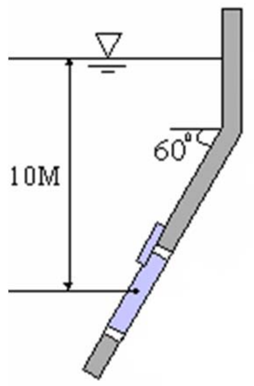
作用在平面上的总压力2

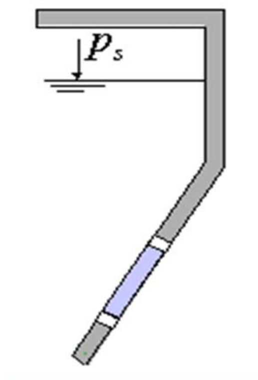
- 平行力系作用在一侧平板上的合力 $F=\left(p_0+\rho g h_C\right)A$

若平板两侧均布压强产生的力相互抵消，平板所受总压力

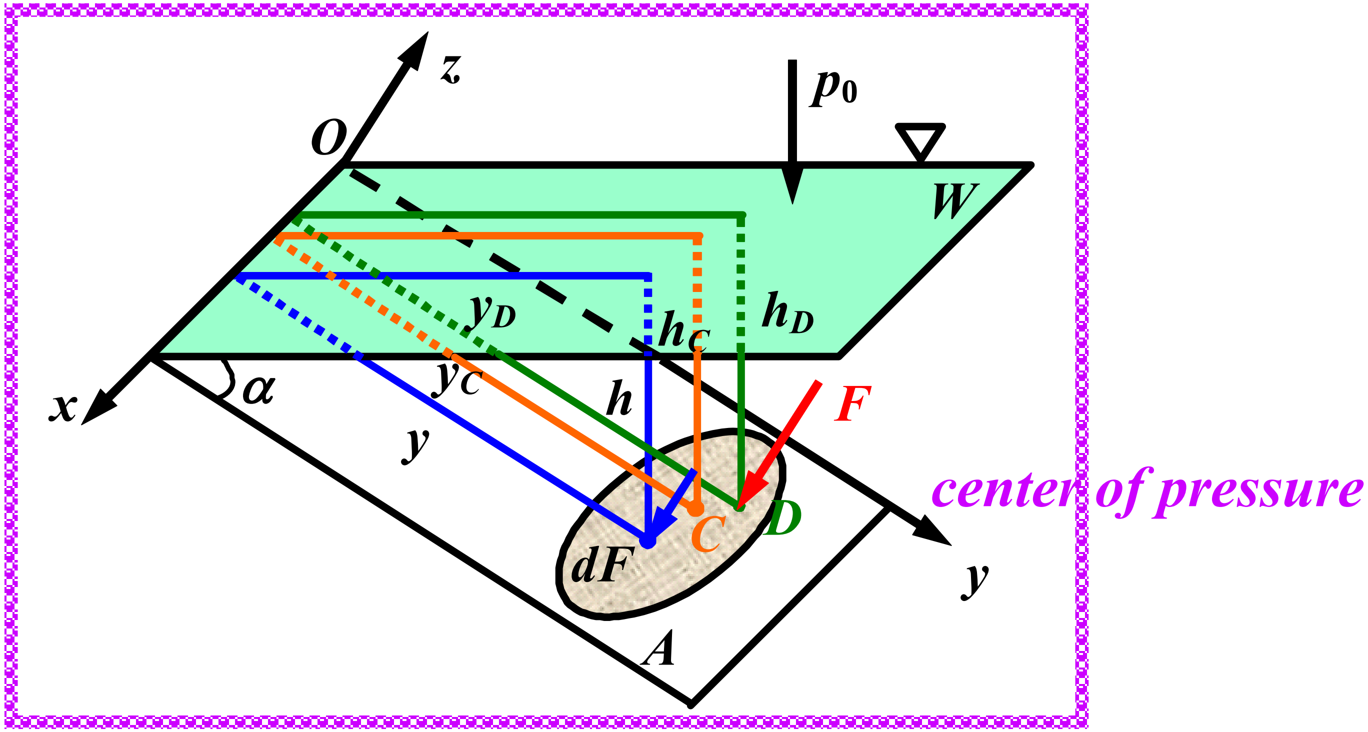
$$F=\rho g h_C A$$

- 平板静压力等于形心处压强与平板面积的乘积，静压力方向与平板垂直





压力中心（x_D，y_D）1



平行力系对 x 轴的力矩之和等于合力对 x 轴的力矩

$$\int_A y dF = y_D F$$

压力中心（x_D, y_D）2

压力中心 y_D

$$y_D = y_C + \frac{I_{XC}\rho g \sin\alpha}{\left(p_0 + \rho g \sin\alpha\, y_C\right)A}$$

- 平板两侧作用有均布的大气压强时，大气压强产生的力矩相互抵消

$$y_D = y_C + \frac{I_{XC}}{y_C A}$$

$$y_D > y_C$$
$$h_D > h_C$$

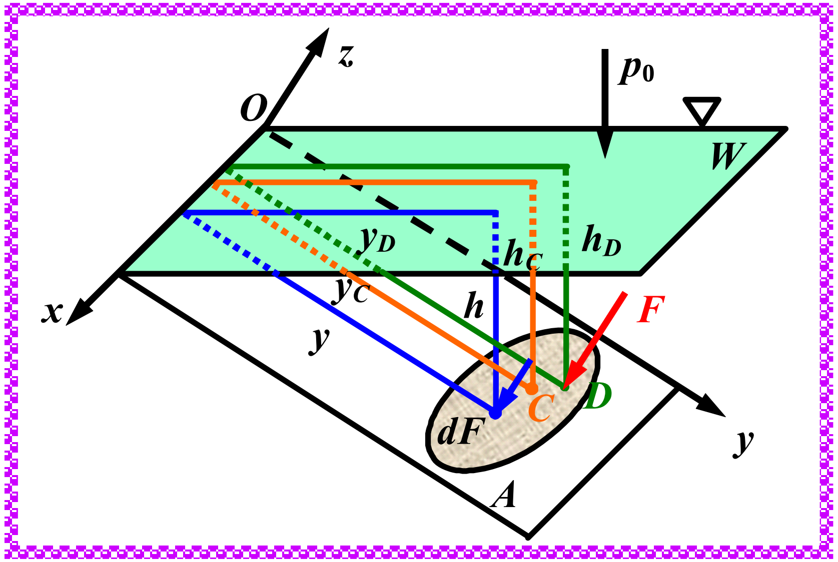
压力中心总是位于形心之下

平板下移，压力中心与形心接近

压力中心（x_D，y_D）3

压力中心 x_D ⇐ $\int x dF = x_D F$

⇒ $$x_D = x_C + \frac{I_{xyc}}{y_C A}$$



- 面积相对于通过形心的某一轴对称时

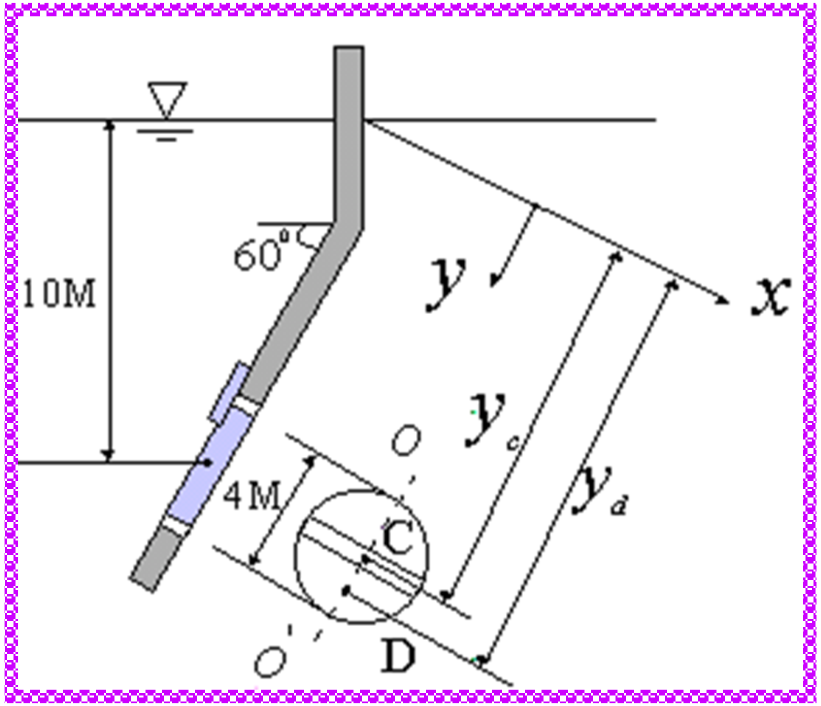
⇒ $$x_D = x_C$$

平面上的流体静压力例题1－1

例：水箱倾斜壁面上有一直径为4m的圆型闸门该闸门可以围绕通过圆心的水平轴旋转，轴位于水面以下10m处。

求：1)闸门所受总压力

2)为使闸门不旋转需施加的力矩大小设水密度$\rho = 1000kg/m^3$，壁面倾斜角为60º



解：1) 闸门所受总压力

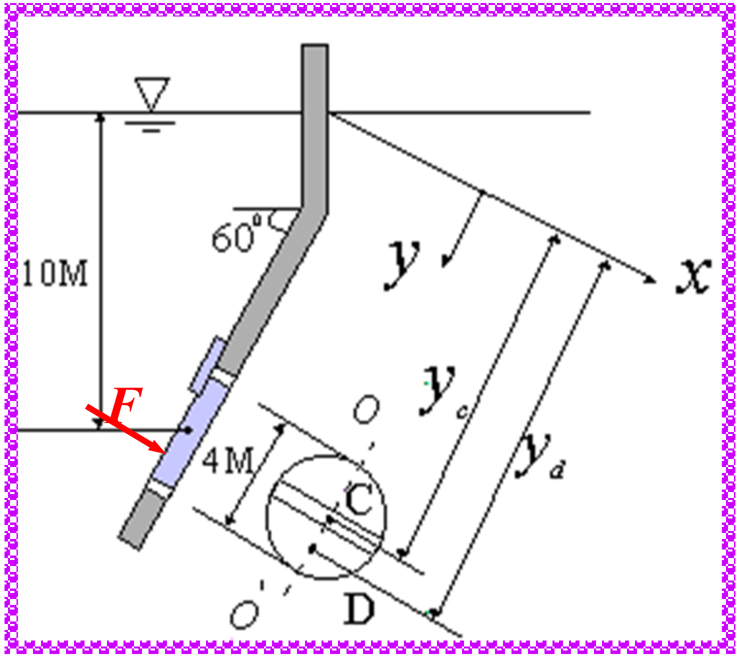
$$F = \rho g h_C A$$

$$= 10^3 \times 9.8 \times 10 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 = 1.23 \times 10^6 (\mathrm{N})$$

压力中心位于*OO'*上

$$y_D = y_C + \frac{I_{xC}}{y_C A}$$

由 $$I_{xC} = \frac{1}{4} \pi R^4$$



$$y_C = h_C / \sin 60^\circ$$

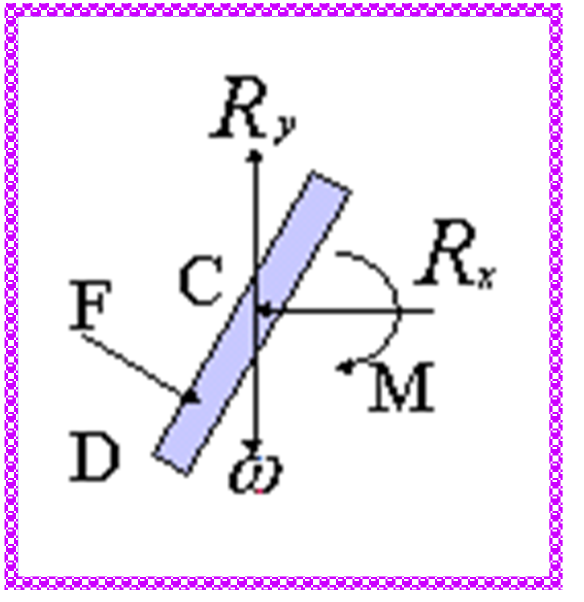
$$y_D = \frac{10}{\sin 60^\circ} + \frac{0.25\pi \times 2^4}{10/\sin 60^\circ \times 0.25\pi \times 2^2}$$

$$= 11.6366(\mathrm{m})$$

2) 求力矩

$$M = F(y_D - y_C)$$

$$= 1.07 \times 10^5 (\mathrm{N \cdot m})$$



平面上的流体静压力例题2

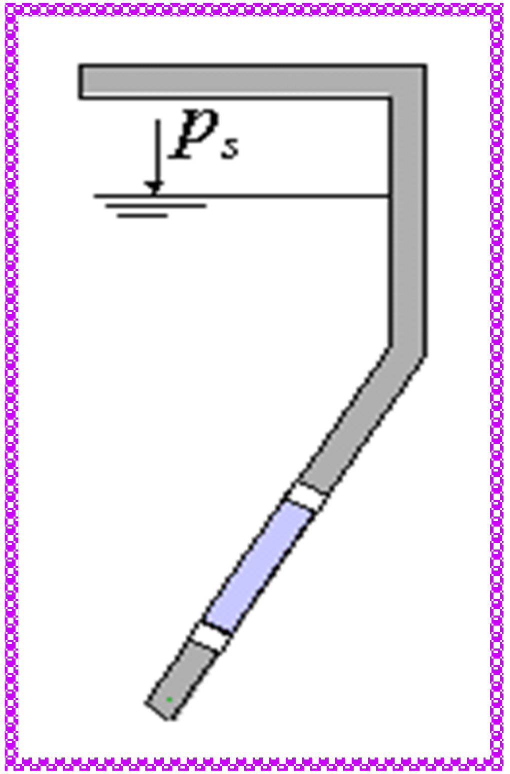
例：如果假设水箱是封闭的，自由液面上压力p_s = 50kPa(表压)，其他条件件几何尺寸均和上例相同，试重新求解上题。

(1) 闸门所受总压力

$$F = \left(p_s + \rho g h_C\right)A$$

(2) 压力中心

$$y_D = y_C + \frac{I_{xC}\rho g \sin\alpha}{\left(p_s + \rho g \sin\alpha y_C\right)A}$$



- y 方向与 h 方向的区别，代公式时坐标轴的选取
- 一般问题均是求解平壁面所受**总压力**，注意均布压强的处理

$$F=\left(p_0+\rho g h_C\right)A$$

$$F=\rho g h_C A$$

$$y_D=y_C+\frac{I_{XC}\rho g\sin\alpha}{\left(p_0+\rho g\sin\alpha\, y_C\right)A}$$

$$y_D=y_C+\frac{I_{XC}}{y_C A}$$

$$x_D=x_C+\frac{I_{xyc}}{y_C A}$$

平面上的流体静压力－小结2

- 总压力只与流体密度、形心淹深、受力面积有关
- 由于深度增加，压强增大，所以压力作用点位置总在形心之下（受力面的形心），$h_D > h_C$
- 惯性矩的求解：注意矩形惯性矩求解时 x、y 轴的选取
- 平板形状对称时，$x_D = x_C$

作业：P.63～66

- 2 . 10
- 2 . 13
- 2 . 14
- 2 . 19

小结1

流体静压强的特性

- 垂直于作用面，指向流体内部
- 大小与作用面方位无关，只是作用点位置的函数

绝对压强、计示压强、真空压强

基准不同

小结2

液柱式测压计

- 各种测压计的优缺点
- 指示液的选取

几个概念

- 相对静止、等压面、形心、惯性矩、压力中心

公式

- 静止流体平衡方程—欧拉平衡方程

$$\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0$$

$$f_x=0\ ,\ f_y=0$$
$$f_z=-g$$

只有重力作用

- 不可压缩静止流体内压强分布

$$p_1=p_2\pm\rho gh$$

注意 U 型管的计算

小结4

作用在平板上的流体静压力

$$F=\left(p_0+\rho g h_C\right)A$$

$$h_C=y_C\sin\alpha$$

形心淹深

压力中心

$$y_D=y_C+\frac{I_{XC}\rho g\sin\alpha}{\left(p_0+\rho g\sin\alpha\, y_C\right)A}$$

$$y_D=y_C+\frac{I_{XC}}{y_C A}$$

面积相对于通过形心的某一轴对称时

$$x_D=x_C$$

等压面思考题

一圆桶中盛有水，静止时自由面为______当圆桶以匀角速度绕中心轴旋转时，自由面为________

A、斜面

B、曲面

C、水平面

四种敞口盛水容器的底面积相同，水位高相同。容器中水的重量比为（自左向右）9:1:10:2，则水作用于各容器底部的静压力为

A、9:1:10:2

B、相同

C、与形状有关