理想、均质不可压、定常 → $\mu = 0$ ，$\rho = \text{const}$ ，$\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

牛顿第二定律 $\xrightarrow[\text{微元}]{\text{理想}}$ 欧拉运动方程 $\xrightarrow[\text{积分}]{\text{沿流线}}$ 沿流线的伯努利方程

- **基础知识**

→ 守恒定律、牛顿第二定律、物质导数、描述流体运动的两种方法

欧拉方程

伯努利方程

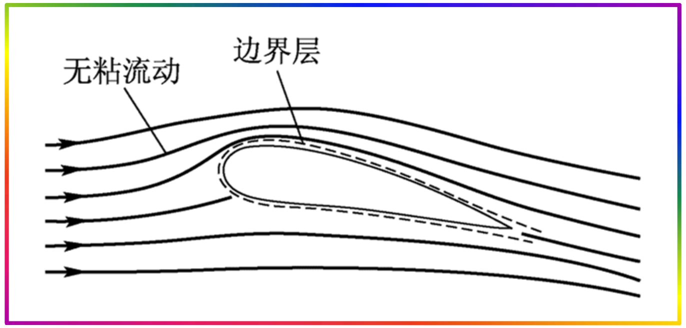
伯努利方程的应用

雷诺数Re → 粘性流动最重要的准则数，无量纲

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho VL}{\mu}$$

惯性力 / 粘性力

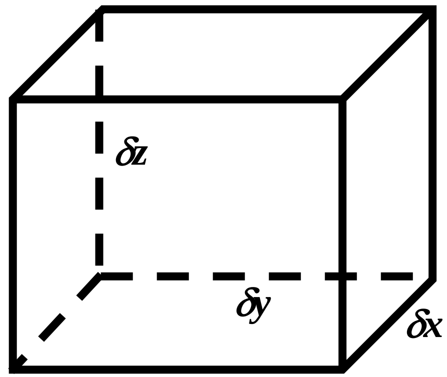
无粘流动的必要条件 → $\mathrm{Re} >> 1$



4.1 欧拉方程

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- 重力 ⟹ $\vec{g}\rho\delta x\delta y\delta z$
- 表面力 $\xRightarrow{\text{无粘性力}}$ $-\nabla p\delta x\delta y\delta z$

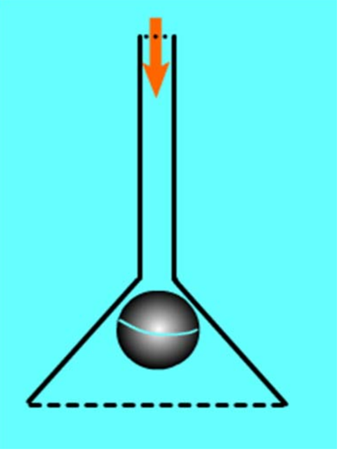


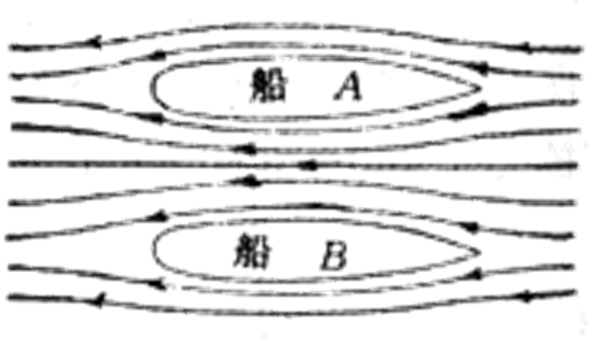
- 牛顿第二定律

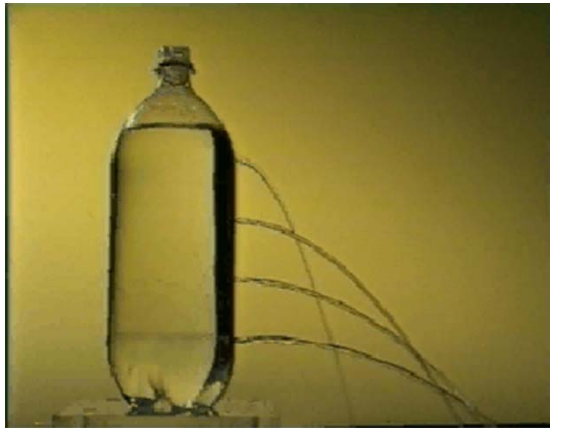
$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p\delta x\delta y\delta z + \vec{g}\rho\delta x\delta y\delta z$$

欧拉方程 ⟹ $$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

流体运动时，速度，压强和高度之间有什么关系?







定常流动欧拉运动微分方程沿流线的积分

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Du}{Dt} \qquad (1)$$

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{Dv}{Dt} \qquad (2)$$

$$f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{Dw}{Dt} \qquad (3)$$

$(1)\times dx + (2)\times dy + (3)\times dz$

沿流线积分

$$\Rightarrow \; g dz + \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C}$$

伯努利方程的适用条件

伯努利方程适用条件 ⇒

$$\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C$$

Bernoulli equation

- 理想均质不可压流体
- 定常流动
- 质量力有势且只有重力
- 沿同一条流线成立
- 无其它能量输入输出

$$\frac{V_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}=\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}$$

energy per unit mass

gz ⟹ 单位质量流体的重力势能 *potential energy*

$V^2/2$ ⟹ 单位质量流体的动能 *kinetic energy*

p/ρ ⟹ 单位质量流体的压力能 *pressure energy*

机械能守恒方程，单位质量流体的重力势能＋压力能＋动能沿流线守恒

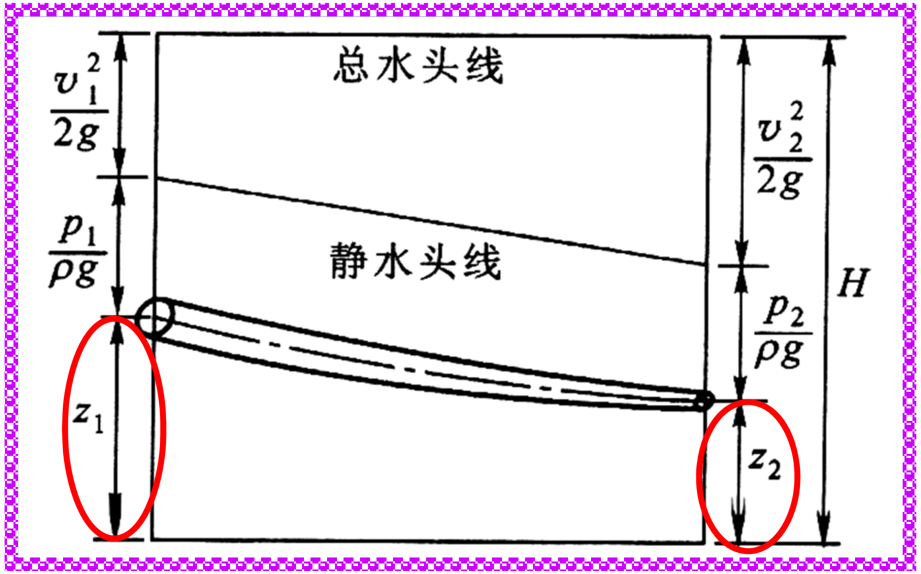
单位重量流体的伯努利方程

energy per unit weight

$$\frac{V_1^2}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\rho g}=\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\rho g}$$

z *potential head*

位置水头，流体质点相对于基准面的位置高度



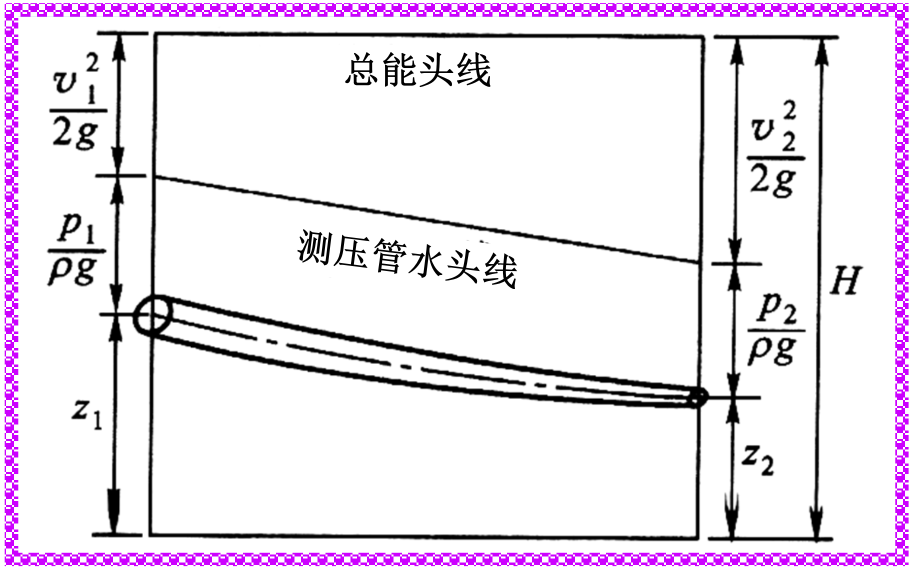
$$\frac{V^2}{2g}$$

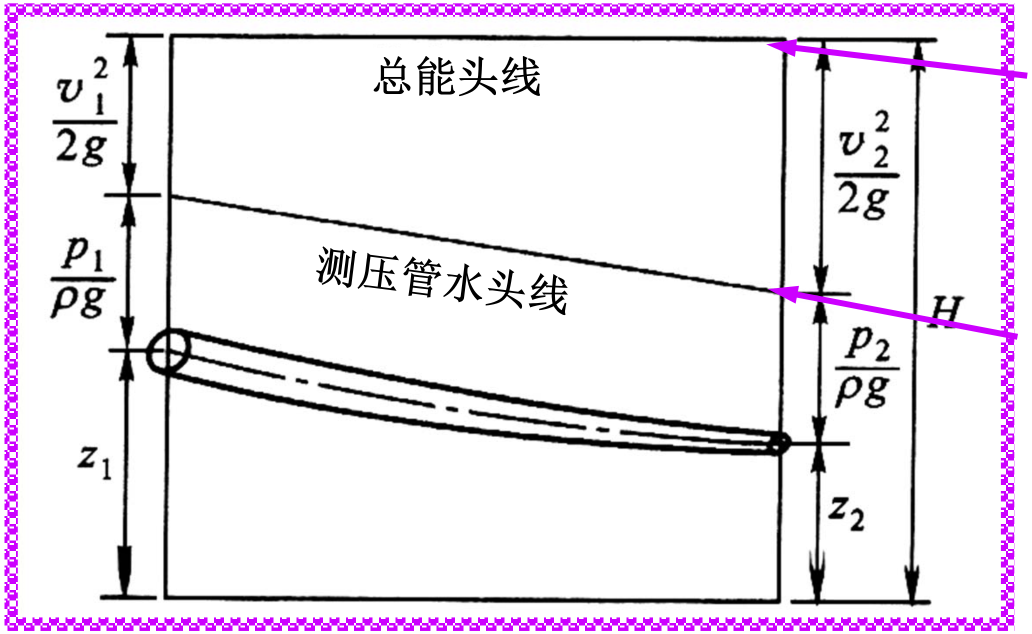
速度水头，不考虑阻力时流体以速度 V 垂直上射的高度 *velocity head*

$$\frac{p}{\rho g}$$

压强水头，测压管高度，产生压强 p 所需的流体柱高度

pressure head





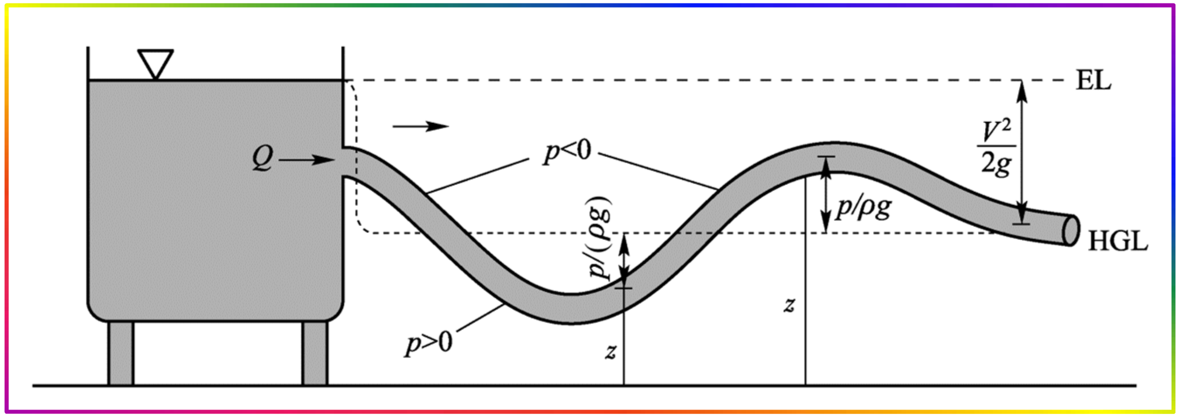
Energy line
总能头线

Hydraulic grade line
测压管水头线

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \text{const}$$

总能头 (总水头)
total head

沿一条流线总能头为常数，总能头线为水平直线



- 总能头线 ⟹ 水平直线，与自由面等高，$V=0$，$p_m=0$
- 测压管水头线 ⟹ 水平直线，与管口等高，$p_m=0$
- 由管道与测压管水头线的相对位置判断管中压强正负

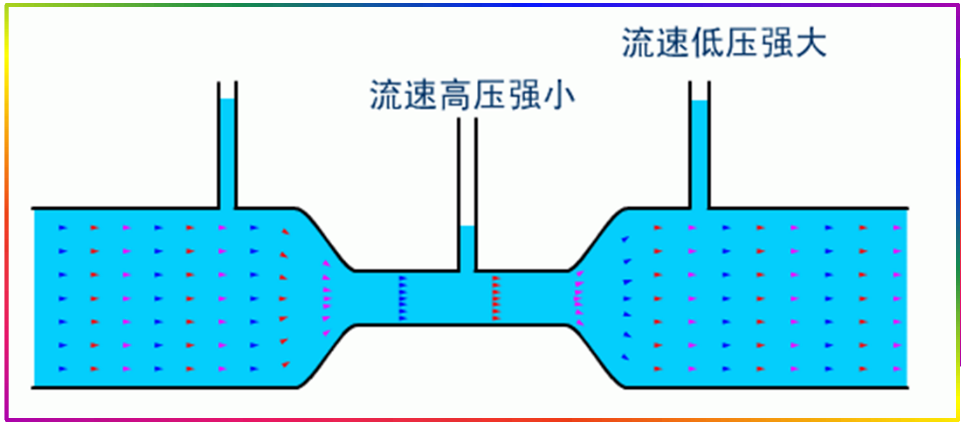
流体水平流动时，或者高度差的影响不显著时（如气体的流动）

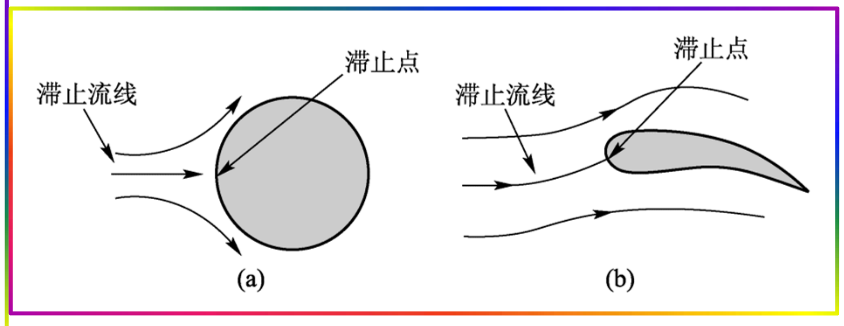
$$\underbrace{p}_{\text{静压}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho\overline{V}^2}_{\text{动压}} = C$$

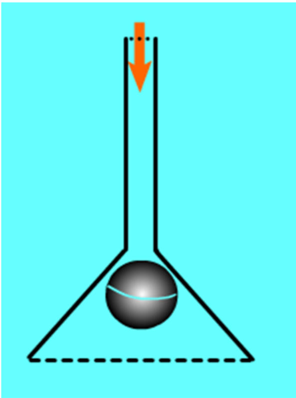
$$\underbrace{p_0}_{\text{滞止压强}} = p + \frac{1}{2}\rho\overline{V}^2$$

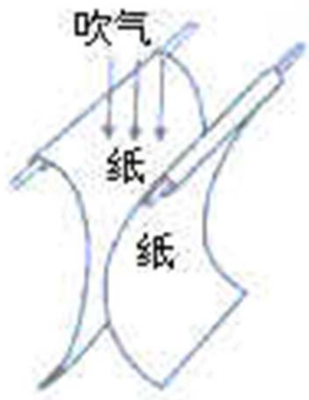
static pressure 静压　　动压

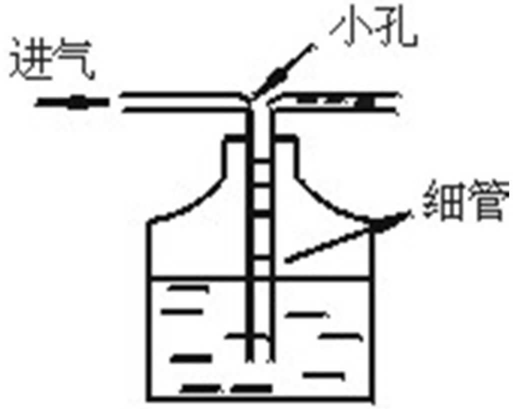
滞止压强 *stagnation pressure*



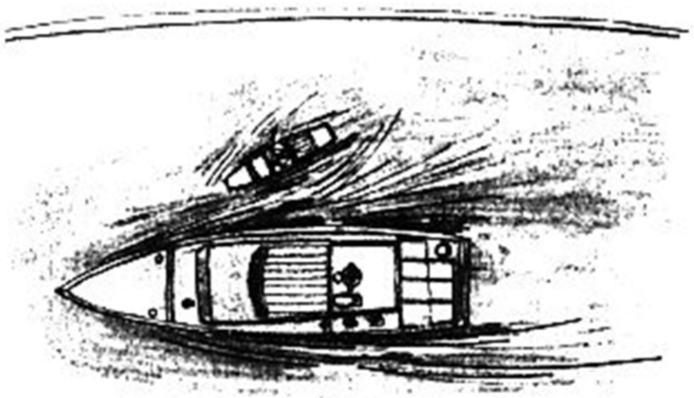








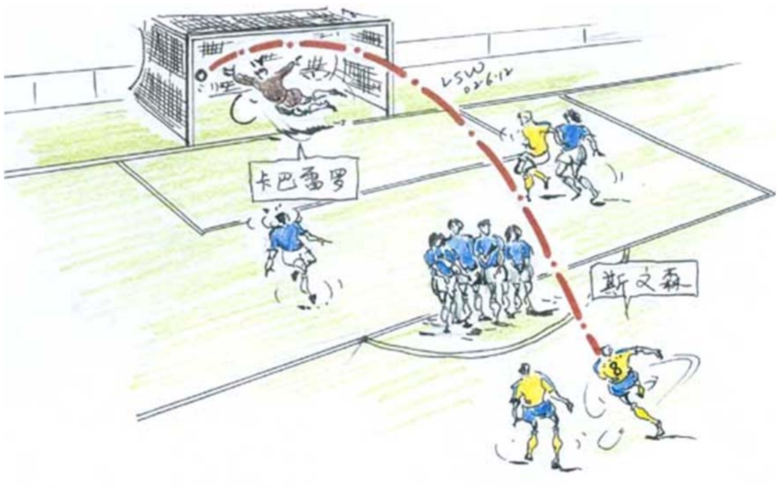
喷雾器



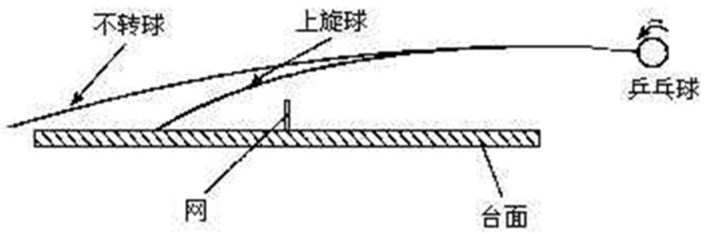
奥林匹克号，1912
玛丽皇后号，1942

50km/h，吸引力8千克

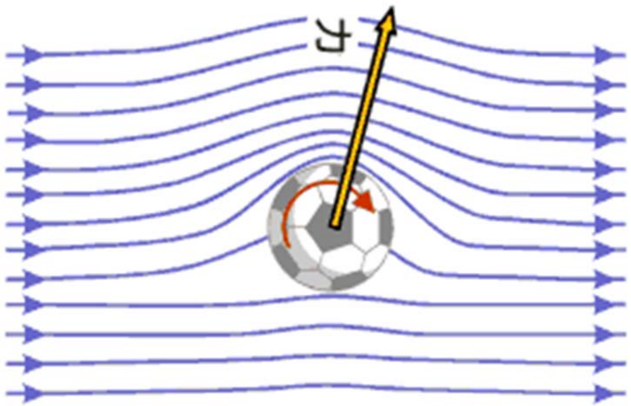
伯努利方程的应用2

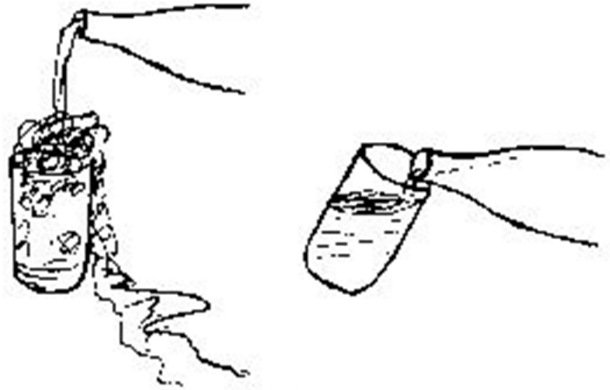


香蕉球



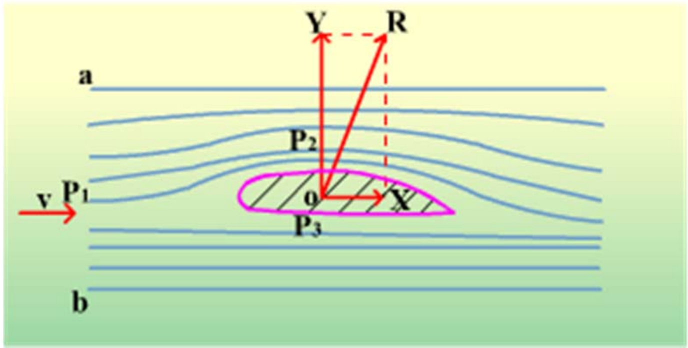
乒乓球上旋球



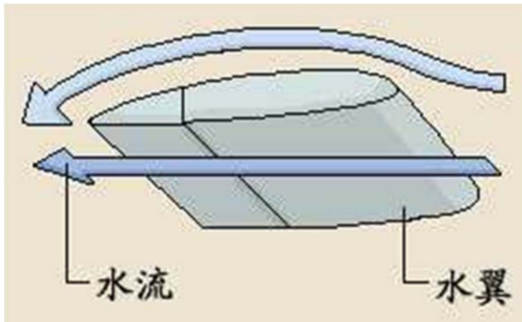


倒啤酒

伯努利方程的应用3

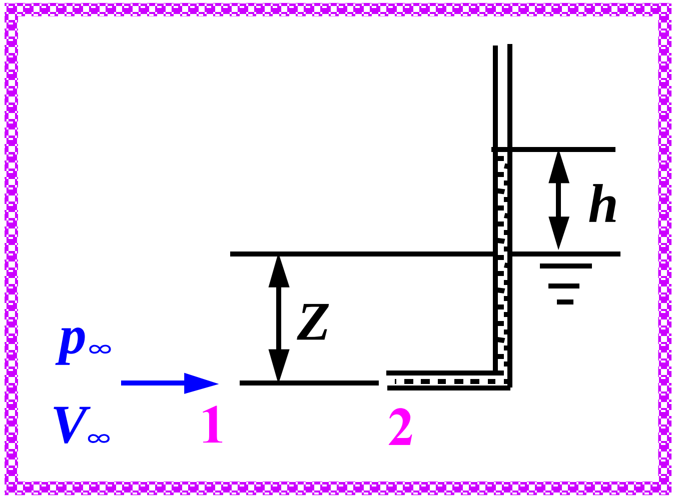


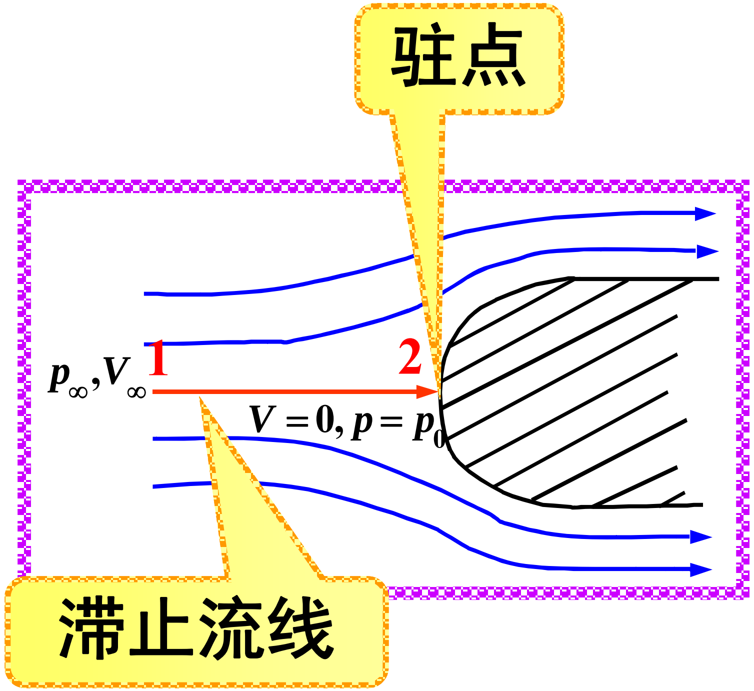
飞机机翼升力



水翼船

速度测量 → 简单皮托管 *pitot probe*

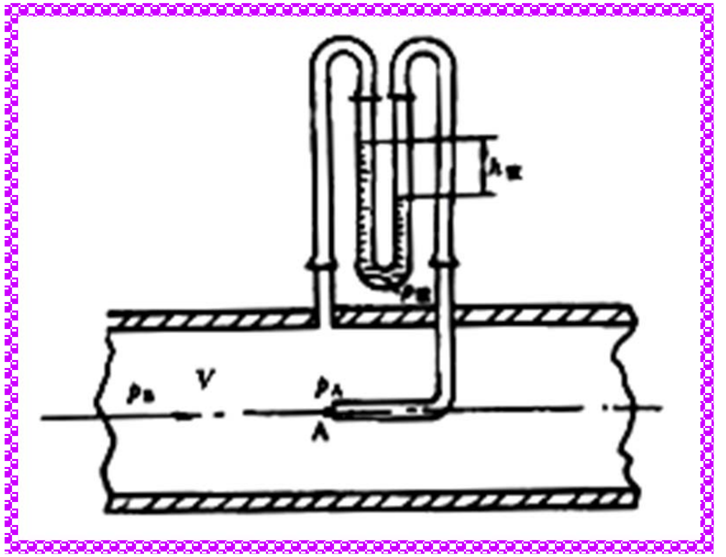




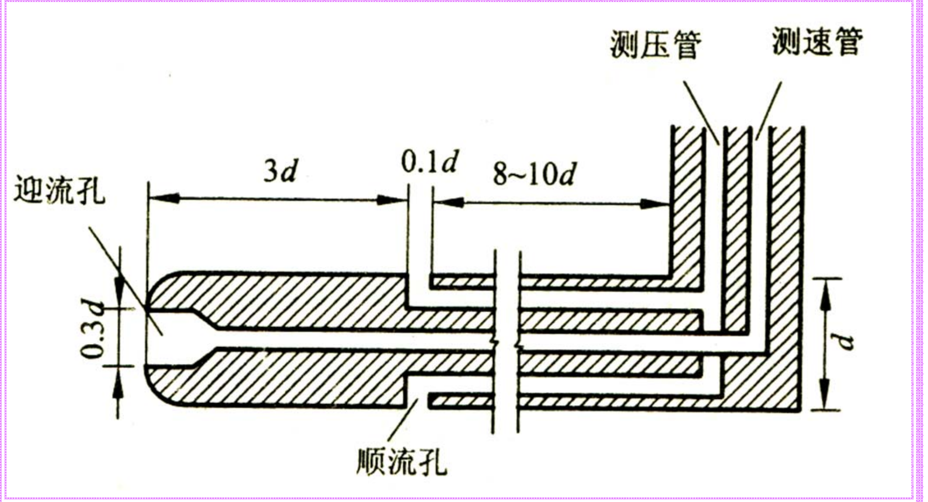
→ $$V_1=\sqrt{2gh}$$

毕托管

pitot-static probe

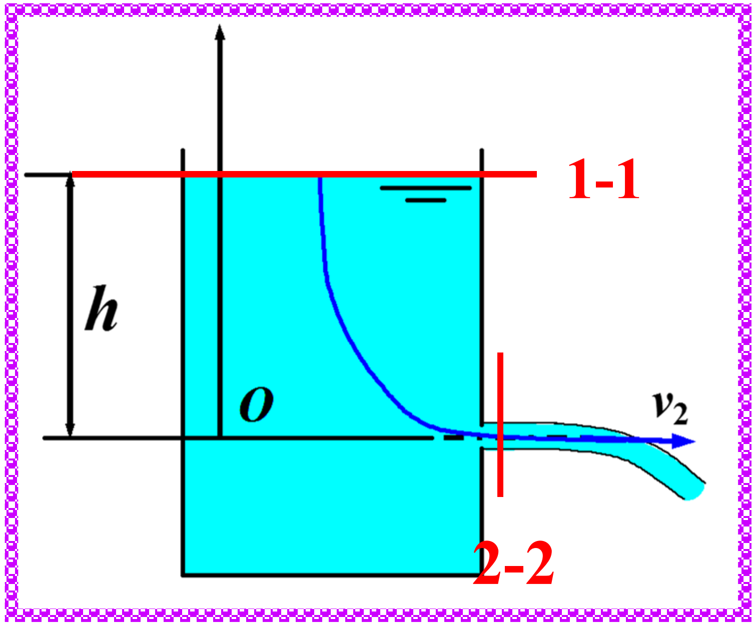


$$V=\sqrt{2gh\frac{\rho_0-\rho}{\rho}}$$



自由表面1，喷嘴2，自由面与喷嘴之间的高度差为h，求喷嘴出口速度v_2和h之间的关系。

对1，2两点列伯努利方程

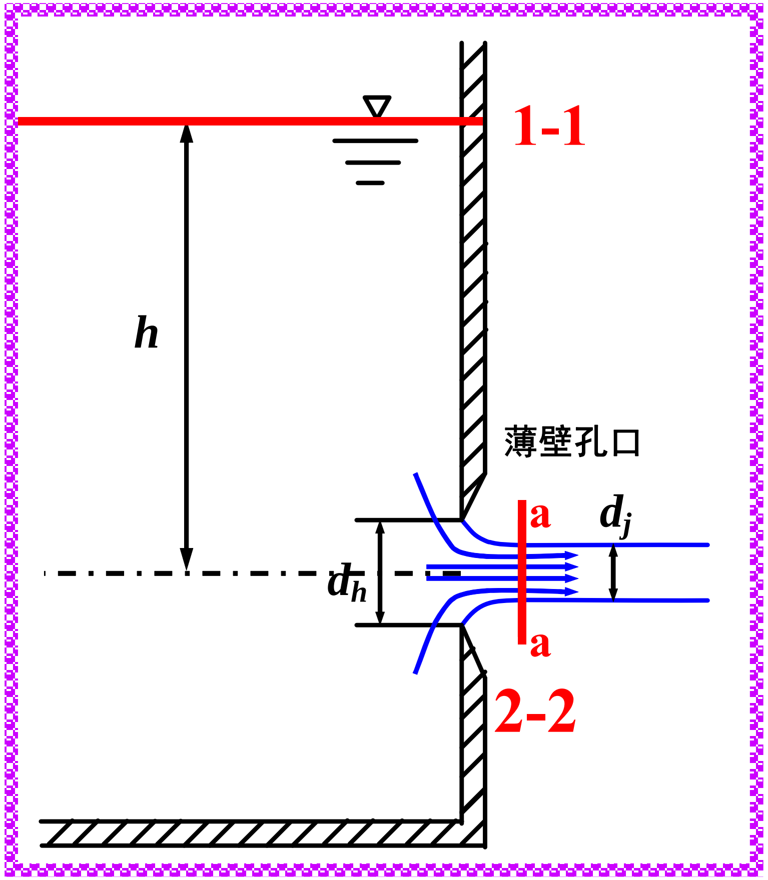


$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}$$

由 $z_1=z_2+h \qquad V_1=0$

$$p_1=p_2=p_a$$

$\Rightarrow$ $\boxed{V_2=\sqrt{2gh}}$ Torricelli 1644



实际中由于粘性、表面张力等，需要修正

$$Q = C_d A\sqrt{2gh}$$

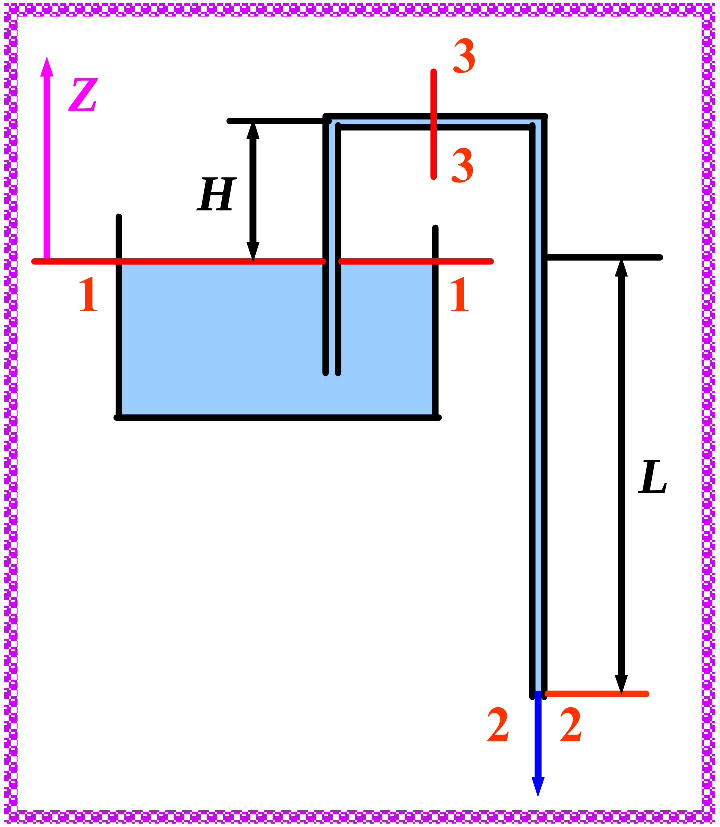
虹吸管 *siphon pipe*

$$V_2 = \sqrt{2gL}$$

- 最高截面表压

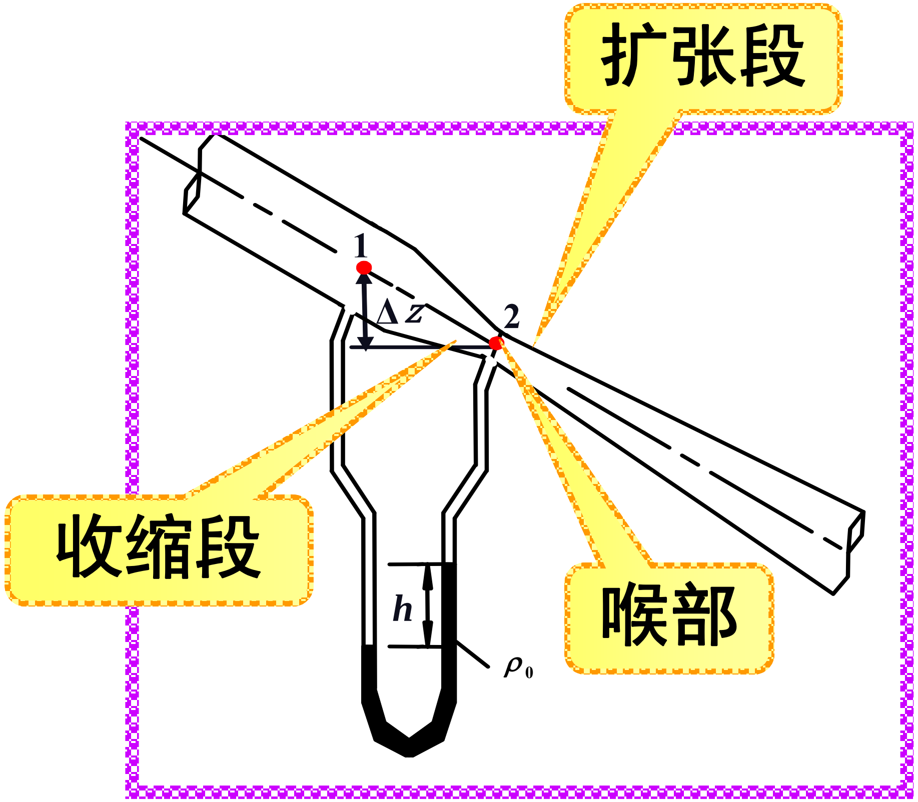
$$p_{3m} = -\rho g\left(H + L\right)$$

- 注意冷沸腾现象



流量测量 → 文丘里流量计 *Venturi meter*

$$Q = A_2\sqrt{\frac{2gh(\rho_0-\rho)}{\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\rho}}$$

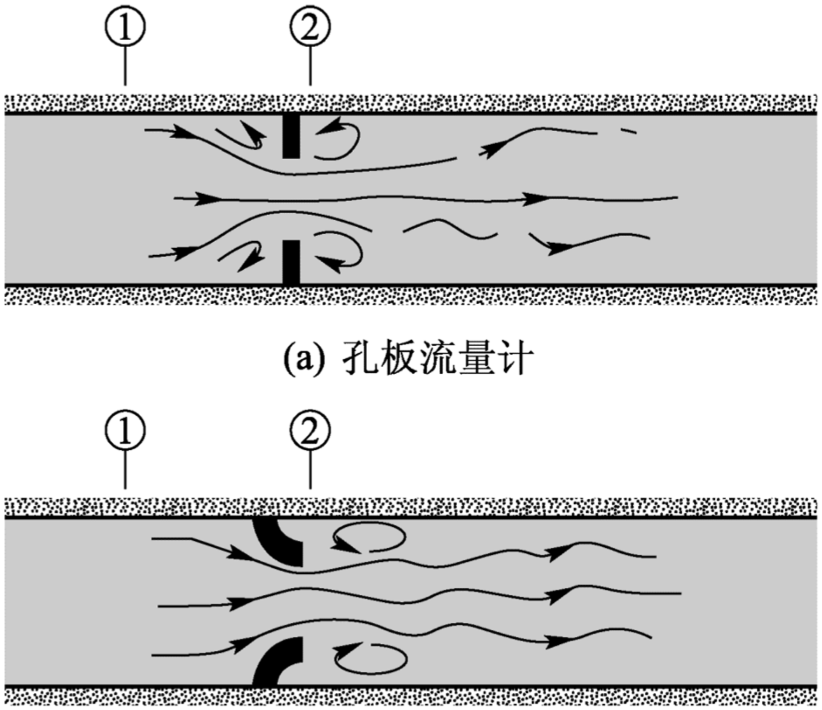


- 考虑粘性影响，需乘以流量系数c_d

节流式流量计

孔板
流量计

orifice meter



(a) 孔板流量计

(b) 喷管流量计

喷嘴
流量计

nozzle meter

作业：P.130～132

- 4 . 8
- 4 . 12
- 4 . 13
- 4 . 18
- 4 . 20

小结1

欧拉方程

适用条件，牛顿第二定律

公式

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

沿流线积分及总流伯努利方程

适用条件，物理意义，应用

公式

沿流线积分的伯努利方程

$$\frac{V_1^2}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}=\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}$$

$$\frac{V_1^2}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\rho g}=\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\rho g}$$