

西安交通大学

硕士学位论文

具有任意形状任意特征应变的二维异性夹杂问题研究

学位申请人：王标

指导教师：马利锋教授

学科名称：力学

2016年5月

**Study on Two-dimensional Inhomogeneous Inclusion Problems
with Arbitrary Shape and Arbitrary Eigenstrain**

A thesis submitted to
Xi'an Jiaotong University
in partial fulfillment of the requirements
for the degree of
Master of Engineering

By
Biao Wang
Supervisor: Prof. Lifeng Ma
Mechanics
May 2016

论文题目：具有任意形状任意特征应变的二维异性夹杂问题研究

学科名称：力学

学位申请人：王标

指导教师：马利锋教授

摘 要

夹杂问题对航天、船舶、车辆、动力、纳米等多个领域的尖端材料的发展有着重要作用，材料中夹杂的存在影响着材料局部和整体的应力场，对夹杂问题的研究，有利于理解材料的强度、疲劳和破坏等力学性能，对提高材料的质量和性能具有重要的意义。本文对无限大以及有限基体平面中含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题进行了研究，具体归纳如下：

(1) 研究了无限大平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题。利用等效特征应变原理，将其转化为相应的同性夹杂问题，从同性夹杂问题的一般解构造出该异性夹杂问题的一般解，并进一步地针对无限大平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题进行了研究，并给出了该问题的解析解，从所得结果可以看出，当该对称特征应变退化为均匀分布的特征应变时，退化后所得结果和 Eshelby 所得结果一致；

(2) 研究了有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题。应用叠加原理将其分解为无限大平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题和一个带边界条件的一般弹性力学问题，并证明了该分解的正确性，从而给出了该问题的一般解；

(3) 研究了有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题。利用等效特征应变原理，将其转换为相应的同性夹杂问题，根据该同性夹杂问题的一般解得到了该异性夹杂问题的一般解，并利用该一般解，进一步地求解了有限平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题的解析解，而后使用该解析解研究了厚壁圆筒的过盈配合问题，从所得结果可以看出，该结果和经典弹性力学所求结果一致。

综上所述，本文利用等效特征应变原理和叠加原理，给出了无限大以及有限基体平面中含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题的一般解答，并将其应用于相应的非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题的研究。

关键词：任意形状；任意特征应变；异性夹杂；等效特征应变原理；叠加原理

论文类型：理论研究

Title: Study on two-dimensional inhomogeneous inclusion problems with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain

Discipline: Mechanics

Applicant: Biao Wang

Supervisor: Prof. Lifeng Ma

ABSTRACT

The study of inclusions plays an important role in the development of advanced materials for aerospace, marine, automotive and many other applications. The presence of inclusions in engineering materials affects or disturbs their elastic field at the local and the global scale, thus the research on inclusions is helpful to understand the mechanical properties such as strength, fatigue and failure of materials, and it is of great significance to improve the quality and performance of the materials. This thesis studies the inhomogeneous inclusion problems with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain in the infinite and finite matrix plane. The main research contents and results of this thesis can be summarized as follows:

(1) It studies the inhomogeneous inclusion problem with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain in the infinite plane. Based on the principle of equivalent eigenstrain, the problem is transformed into the corresponding homogeneous inclusion problem, and the general solution of inhomogeneous inclusion is constructed from the general solution of the homogeneous inclusion problem. Further, the problem of non-uniform symmetrical dilatational eigenstrain in infinite plane is studied, and the analytical solution of this problem is also given. It can be seen from the results that when the symmetrical dilatational eigenstrain is reduced to the uniform eigenstrain, the results are consistent with those obtained by Eshelby.

(2) The solution for homogeneous inclusion problem with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain in the finite plane is presented. By the superposition principle, the original problem is composed into the homogeneous inclusion problem with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain in the infinite plane and the general elasticity problem with boundary conditions. Also, the correctness of the decomposition is proved, and accordingly the general solution of this problem is derived.

(3) The inhomogeneous inclusion problem with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain in the finite plane is studied at last. By virtue of the principle of equivalent eigenstrain, the problem is transformed into the corresponding homogeneous inclusion problem, and the general solution of inhomogeneous inclusion is constructed from the general solution of the homogeneous inclusion problem. Moreover, the analytical solution of circular inhomogeneous inclusion problems with non-uniform symmetrical dilatational eigenstrain in the finite plane is also obtained. Then the analytical solution is used to study the interference

ABSTRACT

fit of the thick cylinder. It can be seen that the results obtained here are same as the results from classical elasticity.

In summary, the general solutions to the inhomogeneous inclusion problems with arbitrary shape and arbitrary eigenstrain in the infinite and finite matrix plane are derived by employing the principle of equivalent eigenstrain and superposition in this thesis. And, It applies the results to the study of corresponding circular inhomogeneous inclusion problems with non-uniform symmetrical dilatational eigenstrain.

KEY WORDS: Arbitrary shape; Arbitrary eigenstrain; Inhomogeneous inclusion; The principle of equivalent eigenstrain; Superposition principle

TYPE OF THESIS: Theoretical Research

目 录

1 绪论.....	1
1.1 选题背景和意义.....	1
1.2 研究现状概述.....	2
1.3 本文的主要工作.....	3
2 同性夹杂问题的弹性力学基础.....	5
2.1 同性夹杂问题的基本方程.....	5
2.1.1 Hooke 定律.....	5
2.1.2 平衡方程与边界条件.....	6
2.1.3 相容方程.....	7
2.2 Kolosov-Muskhelishvili 复变函数在平面问题上的一般解.....	7
2.3 无限大平面内含一点夹杂问题的基本解.....	8
3 异性夹杂问题的等效特征应变原理.....	11
3.1 引言.....	11
3.2 无限大平面含异性夹杂问题的一般解.....	11
3.3 有限平面含同性夹杂问题的一般解.....	13
3.4 有限平面含异性夹杂问题的一般解.....	15
3.4.1 仅特征应变作用时异性夹杂问题的一般解.....	15
3.4.2 仅基体边界受外荷载作用时异性夹杂问题的一般解.....	17
3.4.3 外荷载与特征应变同时作用时异性夹杂问题的一般解.....	20
3.5 本章小结.....	22
4 无限大平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题.....	23
4.1 引言.....	23
4.2 无限大平面含非均匀对称特征应变圆形同性夹杂问题解答.....	24
4.2.1 夹杂区域外的应变场和应力场.....	26
4.2.2 夹杂区域内的弹性应变场和应力场.....	27
4.2.3 夹杂区域内的总应变场.....	29
4.3 无限大平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题解答.....	29
4.4 应用.....	32
4.4.1 异性夹杂中心处含点热源的热变形问题.....	32
4.4.2 纳米夹杂的特征应变模型.....	34
4.5 本章小结.....	36
5 有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题.....	37
5.1 引言.....	37

目 录

5.2 有限平面含非均匀对称特征应变圆形同性夹杂问题解答.....	38
5.2.1 夹杂区域外的应变场和应力场.....	39
5.2.2 夹杂区域内的总应变场和应力场.....	40
5.3 有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题解答.....	40
5.4 应用：厚壁圆筒的过盈配合问题.....	42
5.5 本章小结.....	44
6 结论与展望.....	45
6.1 结论.....	45
6.2 展望.....	45
致 谢.....	47
参考文献.....	48
攻读学位期间取得的研究成果.....	51
声明	

CONTENTS

1	Preface.....	1
1.1	Background and Significance of The Topic.....	1
1.2	Brief Overview of Current Research.....	2
1.3	The Main Contents of The Thesis.....	3
2	Fundamental Equations of Elasticity of Homogeneous Inclusion Problem.....	5
2.1	Basic Equations of Homogeneous Inclusion Problem.....	5
2.1.1	Hooke's Law.....	5
2.1.2	The Equations of Equilibrium and Boundary Conditions.....	6
2.1.3	Compatibility Conditions.....	7
2.2	General Solution on Plane Problem Represented by Complex Potentials of Kolosov-Muskhelishvili.....	7
2.3	Fundamental Solution for Problem of A Point-wise Inclusion in The Infinite Plane...8	
3	The Principle of Equivalent Eigenstrain for Inhomogeneous Inclusion Problems.....	11
3.1	Introduction.....	11
3.2	General Solution for Inhomogeneous Inclusion Problem in The Infinite Plane.....	11
3.3	General Solution for Homogeneous Inclusion Problem in The Finite Plane.....	13
3.4	General Solution for Inhomogeneous Inclusion Problem in The Finite Plane.....	15
3.4.1	General Solution for Inhomogeneous Inclusion under External Load.....	15
3.4.2	General Solution for Inhomogeneous Inclusion with Eigenstrain.....	17
3.4.3	General Solution for Inhomogeneous Inclusion with Eigenstrain and also under External Load.....	20
3.5	Brief Summary.....	22
4	Circular Inhomogeneous Inclusion Problem with Non-uniform Symmetrical Dilatational Eigenstrain in The Infinite Plane.....	23
4.1	Introduction.....	23
4.2	The Solution for Circular Homogeneous Inclusion Problem with Non-uniform Symmetrical Dilatational Eigenstrain in The Infinite Plane.....	24
4.2.1	Strain Field and Stress Field outside The Inclusion.....	26
4.2.2	Elastic Strain Field and Stress Field inside The Inclusion.....	27
4.2.3	Total Strain Field inside The Inclusion.....	29
4.3	The Solution for Circular Inhomogeneous Inclusion Problem with Non-uniform Symmetrical Dilatational Eigenstrain in The Infinite Plane.....	29
4.4	Application.....	32
4.4.1	Thermal Deformation due to A Point Heat at The Inhomogeneous Inclusion Center.....	32
4.4.2	Eigenstrain Model of a Nano-scale Inclusion.....	34
4.5	Brief Summary.....	36

CONTENTS

5	Circular Inhomogeneous Inclusion Problem with Non-uniform Symmetrical Dilatational Eigenstrain in The Finite Plane.....	37
5.1	Introduction.....	37
5.2	The Solution for Circular Homogeneous Inclusion Problem with Non-uniform Symmetrical Dilatational Eigenstrain in The Finite Plane.....	38
5.2.1	Strain Field and Stress Field outside The Inclusion.....	39
5.2.2	Total Strain Field and Stress Field inside The Inclusion.....	40
5.3	The Solution for Circular Inhomogeneous Inclusion Problem with Non-uniform Symmetrical Dilatational Eigenstrain in The Finite Plane.....	40
5.4	Application: Interference Fit Problem of Thick Cylinder.....	42
5.5	Brief Summary.....	44
6	Conclusions and Suggestions.....	45
6.1	Conclusions.....	45
6.2	Suggestions.....	45
	Acknowledgements.....	47
	References.....	48
	Achievements.....	51
	Declarations	

1 绪论

1.1 选题背景和意义

夹杂是指在一连续体内部给定特征应变的局部区域，该连续体被称为基体，如图 1-1 所示，由于特征应变的存在，将引起夹杂与基体处于内应力状态，该内应力被称为特征应力^[1]。按基体材料和夹杂材料的构成，夹杂问题可分为同性夹杂问题和异性夹杂问题；按基体区的大小，夹杂问题可分为无限大夹杂问题、半无限大夹杂问题和有限夹杂问题；按基体材料和夹杂的维度，夹杂问题可分为平面夹杂问题和空间夹杂问题。

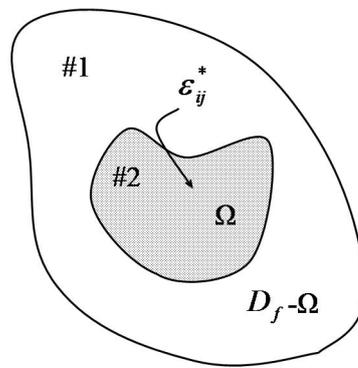


图 1-1 夹杂和基体示意图

夹杂问题在固体力学和工程中有着极其广泛的应用。自 19 世纪 50 年代后期，Eshelby^[2-3]研究并给出了含均匀特征应变的椭球形夹杂问题的解以来，很多学者相继对各种形状（如多面体、多边形，环形等）的各类夹杂问题（如因热变形、相变、沉积、材料缺陷、塑性应变以及空洞等因素而引起的夹杂问题）进行了深入研究。夹杂问题成为了固体力学中最热门的课题之一。

在过去的 60 年里，夹杂问题对航天、船舶、车辆、动力、纳米等多个领域的尖端材料的发展有着重要作用^[4]。复合材料是夹杂问题在尖端材料发展中的典型应用之一，它将夹杂物作为基体的增强基，可以满足单一材料无法达到的性能要求，克服了传统单一材料的某些弱点，其性能和功能均优于单一材料。如金属基复合材料具有高温强度高、横向强度高、导热性好，线膨胀系数小、组织结构稳定性好、抗腐蚀、可焊接以及局部强化等优点，陶瓷基复合材料具有熔点高、硬度高、化学稳定性高、耐磨损、抗氧化以及耐腐蚀等优点^[5]。喷丸处理是工厂广泛采用的一种表面强化工艺，它是夹杂问题在表面处理中的应用。喷丸处理也称喷丸强化，是减少构件疲劳，提高构件寿命的有效方法之一，喷丸处理后基体表面形成一定的压应力使得基体的疲劳强度和构件的寿命延长^[6]。过盈配合是夹杂问题在装配问题中的应用。过盈连接是利用被联件间的

过盈配合直接把被连接件连接在一起,这种连接又称紧配合连接。实际过程中,可分别将连接件和被连接件分别看成夹杂和基体,这种连接具有结构简单、定心性好、承载能力高、能承受冲击载荷、对轴的强度削弱小等优点,缺点是对重型机械装配困难,对配合尺寸精度要求较高^[7]。

另一方面,材料中夹杂的存在影响着材料局部和整体的应力场,因此会在一定程度上影响材料的力学性能使其无法发挥应有的功能,如铁等金属材料在加工过程中常不可避免的含有夹杂物质,如氧化物、碳化物和空洞,这些夹杂物可能导致裂纹成核和增长,进而引起材料破坏^[4]。同时夹杂物的形态分布也对其性能和质量有着显著的影响。

因而对夹杂问题的研究,有利于理解材料的强度、疲劳和破坏等力学性能,对提高材料的质量和性能具有重要意义。

1.2 研究现状概述

19世纪50年代后期,英国学者 Eshelby^[2-3]两篇关于夹杂问题的研究开创了细观力学和夹杂力学两个方向,Eshelby 发现当异性椭球夹杂内特征应变均匀分布时,椭球内的弹性场也是均匀分布的。随后一大批国内外学者根据 Eshelby 的结果对该问题做了进一步研究。

早期有 Mura^[1], Wills^[8], Christensen^[9]等人对该问题做了全面系统的研究,这些研究主要集中于无限大体中含均匀分布特征应变的同性夹杂问题。而后,其他学者进一步研究了无限大体中其他形状的同性夹杂问题,并采用 Eshelby 在研究椭球异性夹杂问题时所采用的等效夹杂法研究了许多其他形状的异性夹杂问题。如 Jaswon 和 Bhargava^[10]利用复变函数方法研究了椭圆夹杂问题。Deng 和 Meguid^[11]研究了压电材料中的圆形夹杂问题。Schmid 和 Podladchikov^[12]研究切应力下的椭圆夹杂问题。Pan^[13]研究了各向异性材料中多边形同性夹杂问题。Chiu^[14]利用等效夹杂法和格林函数法研究了立方体夹杂问题。Wu 和 Du^[15-16]分别研究了圆柱体和半球形夹杂问题。Onaka^[17]研究了环形夹杂问题。Kuvshinov^[18]研究了多面体夹杂问题。Waldvogel^[19]于1979年提出了多面体夹杂问题的算法,随后 Rodin^[20]应用 Waldvogel 的算法证明了在多面体夹杂中 Eshelby 张量不存在。同时当夹杂的尺寸接近原子时,由于表面效应,表面能也开始发挥作用,Shama 和 Ganti^[21]考虑了表面能的影响,将 Eshelby 椭球夹杂的线弹性解应用到纳米尺度的夹杂问题;肖俊华给出了考虑夹杂界面效应时空隙—夹杂—基体等效介质模型的全场精确解,并推导了中空纳米夹杂填充复合材料有效反平面剪切模量的闭合形式解^[22]。Makeev 和 Madhukar^[23]比较了分别由线弹性理论和原子仿真法得出的夹杂应变的差异,研究表明,当夹杂半径大于5个原子间距时两种方法得出的结果无明显差异,当夹杂半径在4-5个原子间距时两种方法得出的结果有细微的差别。

在上述研究中,研究领域多限制于同性均匀夹杂问题,而对于异性夹杂问题又多采用等效夹杂法,但该法从未得到严格的证明。最近,Zheng^[24]和 Zou^[25]等的研究表明,

使用等效夹杂法研究二维任意形状夹杂时，对凸形夹杂所得的 Eshelby 张量误差较小，而对于非凸形夹杂计算所得的 Eshelby 张量存在着较大误差。随后 Ma 和 Korsunsky^[26]提出了无限大基体含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题的等效特征应变原理，并利用该原理，将该异性夹杂的问题变换为相应的同性夹杂问题，再利用同性夹杂问题的一般解，从而得到了该异性夹杂问题的一般解，但对于该解的具体应用仍需做进一步研究。

另一方面，当基体区的大小与夹杂区的大小相比不是无限大时，基体表面效应就必须加以考虑，因此对有限基体中含夹杂问题的研究就显得十分必要。Kinoshita 和 Mura^[27]最先研究了该问题，而由 Ru^[28]提出的解析延拓法很容易解决平面圆形基体中任意形状的夹杂问题。而对于空间夹杂问题，由于很难得到相应的格林函数（即便是对于球对称分布的问题），使得该问题的研究难度也大大增加。最近，Li 等^[29-30]绕开了格林函数法，得到了球形基体中心分布一球形夹杂问题的解，在该解中 Eshebly 张量表现为“径向横观各向同性张量”，在垂直于径向的方向上相等，同时在 Dirichlet 和 Neumann 边界条件下该 Eshebly 张量被表达为经典 Eshebly 张量与由边界所产生的项的和，但该解仅在某些特殊条件下与 Luo 和 Weng^[31]的解一致。最近，Zou 等^[32]提出了叠加原理研究了有限基体中含任意形状均匀特征应变的同性夹杂问题，该法将原问题分解为无限大平面内相应的夹杂问题和受适当边界条件的一般弹性力学问题。

同样地，对有限基体中含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题极少得到有效的解决。基于此，本文着眼于无限大基体平面以及有限基体平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题，从无限大基体平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题开始，利用等效特征应变原理和叠加原理，解决有限基体平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题，并将给出该问题的一般解。最后结合实际工程应用对所求得的一般解给出具体的应用实例。

1.3 本文的主要工作

结合上节的研究现状及所存在的问题，本文拟对无限大基体平面和有限基体平面中含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题进行研究。本文之后的内容由以下几部分组成：首先，第二章将简要介绍本研究所需的相关理论，包括同性夹杂问题的基本方程，平面问题的复变函数表示，无限大平面中含一点特征应变的同性夹杂问题的解；接着，在第三章中，将首先介绍了无限大平面含任意形状任意特征应变异性夹杂问题的一般解，并将利用叠加原理解决有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题，最后将利用等效特征应变原理和叠加原理解决有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题；第四章中将利用无限大平面含任意形状任意特征应变异性夹杂问题的一般解，讨论无限大平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题，并将给出该问题的典型实例；然后，在第五章中将研究与第四章相对应的有限平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题，并将给出该解的应用实例；最后，第六章将总结本文主要结论，并

对进一步研究内容进行展望。

2 同性夹杂问题的弹性力学基础

本文主要研究任意形状的异性夹杂问题，为了对任意形状的异性夹杂问题进行求解，首先需要给出相应的同性夹杂问题的解。本章主要介绍同性夹杂问题的基本理论，包括同性夹杂问题的基本方程；平面问题的复变函数表示；无限大平面中含一点特征应变的同性夹杂问题的解。

2.1 同性夹杂问题的基本方程

考虑一任意区域 D ， D 内分布着某一特定的特征应变 ε_{ij}^0 ，在该特征应变作用下，区域 D 内任意一点 $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ 将会产生位移 u_i 、应变 ε_{ij} 和应力 σ_{ij} 。本小节主要给出解决该弹性场问题所需的 Hooke 定律、平衡方程与边界条件以及相容方程^[1]。

2.1.1 Hooke 定律

本文研究基于小变形情况时的夹杂问题，总应变 ε_{ij} 等于弹性应变 e_{ij} 与特征应变 ε_{ij}^0 之和，即：

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_{ij}^0 \quad (2-1)$$

而由几何方程可知：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-2)$$

其中： $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 。

由 Hooke 定律知，弹性应变 e_{ij} 和应力 σ_{ij} 应满足如下关系：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) \quad (2-3)$$

其中： C_{ijkl} 为区域 D 材料的弹性模量，对于重复的下标采用爱因斯坦求和约定。

由于 C_{ijkl} 是对称的，即 $C_{ijlk} = C_{ijkl}$ ，因此 $C_{ijlk} u_{l,k} = C_{ijkl} u_{k,l}$ 。因此式 (2-3) 也可写作：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} (u_{k,l} - \varepsilon_{kl}^0) \quad (2-4)$$

对于特征应变 ε_{ij}^0 等于 0 的区域，式 (2-3) 变为：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2-5)$$

对式 (2-3) 取逆有：

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2-6)$$

这里将 $S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ 称为弹性柔度。

对于各向同性材料，式 (2-3) 与 (2-6) 可以退化为：

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + \lambda\delta_{ij}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^0) \\ \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 &= \frac{1}{2\mu}\{\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}\nu / (1+\nu)\}\end{aligned}\quad (2-7)$$

式中： λ —— 拉梅常数； μ —— 剪切模量； ν —— 泊松比。

当所考虑的问题为二维平面应力问题时，式 (2-7) 可进一步退化，将退化后的公式写成如下分量形式：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\mu}{\kappa-1}\{(\kappa+1)(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0) + (3-\kappa)(\varepsilon_y - \varepsilon_y^0)\} \\ \sigma_y &= \frac{\mu}{\kappa-1}\{(\kappa+1)(\varepsilon_y - \varepsilon_y^0) + (3-\kappa)(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0)\} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu(\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^0) \\ \sigma_z &= \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0\end{aligned}\quad (2-8)$$

同样地，对于平面应变问题，所对应的分量形式为：

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\mu}{\kappa-1}\{(\kappa+1)(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0 - \nu\varepsilon_z^0) + (3-\kappa)(\varepsilon_y - \varepsilon_y^0 - \nu\varepsilon_z^0)\} \\ \sigma_y &= \frac{\mu}{\kappa-1}\{(\kappa+1)(\varepsilon_y - \varepsilon_y^0 - \nu\varepsilon_z^0) + (3-\kappa)(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0 - \nu\varepsilon_z^0)\} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu(\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^0) \\ \sigma_z &= -\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\mu\varepsilon_z^0 + \frac{3-\kappa}{\kappa-1}\mu(\varepsilon_x + \varepsilon_x^0 - \varepsilon_x^0 - \varepsilon_y^0) \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{zy} = 0\end{aligned}\quad (2-9)$$

其中 κ 为 Kolosov 常数，其定义如下：

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu), & \text{平面应力} \\ 3-4\nu, & \text{平面应变} \end{cases}\quad (2-10)$$

2.1.2 平衡方程与边界条件

在计算特征应力时，通常假定区域 D 不受任何外力和边界约束。若这些条件不满足，则总应力场可由自由体的特征应力与特定边值下的应力解叠加解得，因此下面只考虑自由体含特征应变的问题。

由弹性力学相关理论知，当弹性体为自由体，即不受外力和边界约束时，其平衡方程为：

$$\sigma_{ij,j} = 0 (i=1,2,3) \quad (2-11)$$

边界条件为:

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (2-12)$$

这里 n_i 为区域 D 边界的外法线单位向量。

将式 (2-4) 代入到式 (2-11) 与 (2-12), 可以得到:

$$C_{ijkl}u_{k,j} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^0 \quad (2-13)$$

$$C_{ijkl}u_{k,j}n_j = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0n_j \quad (2-14)$$

由平衡方程 (2-13) 和边界条件 (2-14) 可以看出, 弹性自由体内分布一特征应变 ε_{ij}^0 时的情况, 与在该弹性体内受体力 $X_i = -C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^0$ 、而边界上受外荷载 $T_i = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0n_j$ 作用时的情况类似, 因此可以说, 对自由体而言, 由特征应变 ε_{ij}^0 所引起的位移场 u_i 可等效于弹性体受体力 $-C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^0$ 以及表面力 $C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0n_j$ 作用时所产生的位移场 u_i 。

2.1.3 相容方程

应变张量 ε_{ij} 有六个分量而位移向量 u_i 只有三个分量, 因此必须有相容性条件强加于应变分量以保持变形连续, 由几何方程 (2-2) 通过消去位移向量 u_i , 即可得到相容方程:

$${}_{pkij}{}_{ql}{}_{ij,kl} = 0 \quad (2-15)$$

其中 ${}_{pkij}$ 是置换张量, 该式是保证弹性体中应变分量给出单值连续位移解所需要的充要条件。

2.2 Kolosov-Muskhelishvili 复变函数在平面问题上的一般解

复变函数方法是解决平面弹性力学问题的有力工具。国际上, 对使用该方法解决弹性力学问题做了大量工作, 其中前苏联科学家 N.I.Muskhelishvili 在这方面的贡献尤为突出^[33]。本文主要着眼于平面问题下夹杂问题的研究, 在此本小节主要给出 Kolosov-Muskhelishvili 复变函数理论在解决平面弹性力学问题中的一般解答。

对平面问题中的只含同一种材料的弹性体来说, 所有的应力分量和位移分量均可用势函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表示:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2(\overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z)) \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中: $i = \sqrt{-1}$; $z = x_1 + ix_2 = x + iy$; $\varphi'(z) = d\varphi(z)/dz$; $\varphi''(z) = d^2\varphi(z)/dz^2$; $\psi'(z) = d\psi(z)/dz$; $\overline{\psi(z)}$ 表示 $\psi(z)$ 的共轭; μ 为剪切模量; κ 为 Kolosov 常数, 具体

定义见式 (2-10)。

式 (2-16) 即为应力分量与位移分量的复变函数表示。对某一具体问题而言, 当求得势函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 后, 将式 (2-16) 的实部和虚部分开, 经过有限步简单的运算即可得到各应力分量 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} 和各位移分量 u_x , u_y 。即通过势函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 即可唯一确定相应平面弹性问题的解。

若引入,

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Omega(z) = [z\varphi'(z) + \psi(z)]' \quad (2-17)$$

则式 (2-16) 可以改写为:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_{22} - i\sigma_{12} &= [\Phi(z) + \overline{\Omega(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}] \\ 2\mu(u_{1,1} + iu_{2,1}) &= [\kappa\Phi(z) - \overline{\Omega(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}] \end{aligned} \quad (2-18)$$

其中: $\Phi'(z) = d\Phi(z)/dz$, 下标 i 表示关于 x_i 的微分。

同样地, 当势函数 $\Phi(z), \Omega(z)$ 已知时, 就可以把实部和虚部分开, 经过有限步简单的运算即可解出全部应力分量和位移分量。

式 (2-16) 及 (2-18) 即为 Kolosov-Muskhelishvili 复变函数公式, 它是由 Kolosov 于 1935 年首先推导出来, 而后于 1953 年 Muskhelishvili 总结丰富并发表。势函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 或 $\Phi(z), \Omega(z)$ 称为复 Airy 函数或复应力函数, 也称为 Kolosov 势函数或 Muskhelishvili 势函数。

2.3 无限大平面内含一点夹杂问题的基本解

本小节主要介绍已知无限大平面内含一点夹杂问题时的复势函数, 以及如何利用该复势函数求解该平面的应变场。

设有一无限大平面, 其内一点 $s(x_0, y_0)$ 处有一点夹杂, 该夹杂的主应变为 ε_{x_0} , ε_{y_0} , 方位角为 β , 如图 2-1 所示, 该问题的 Kolosov-Muskhelishvili 势函数可以表示为^[34]:

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \frac{\mu(\varepsilon_{y_0} - \varepsilon_{x_0})e^{2i\beta}}{\pi(1+\kappa)(z-s)^2} \\ \Omega_0(z) = \frac{\mu[2(\varepsilon_{y_0} + \varepsilon_{x_0}) - e^{2i\beta}(\varepsilon_{y_0} - \varepsilon_{x_0})]}{\pi(1+\kappa)(z-s)^2} + \frac{2\mu(\varepsilon_{y_0} - \varepsilon_{x_0})e^{2i\beta}}{\pi(1+\kappa)} \frac{(\bar{s}-s)}{(z-s)^2} \end{cases} \quad (2-19)$$

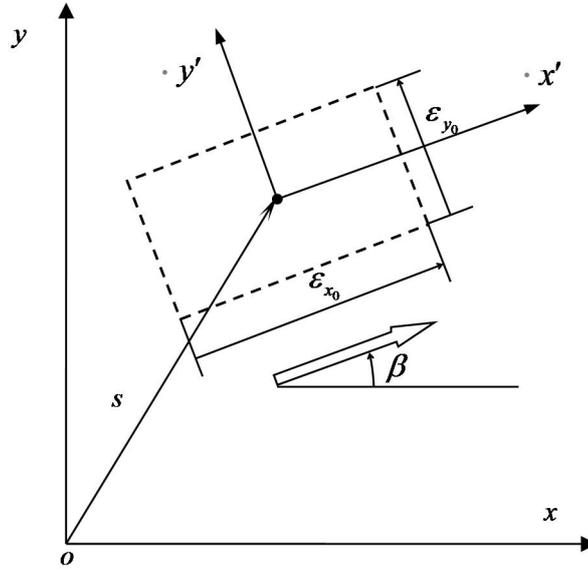


图 2-1 位于无限大平面内的一点夹杂

为方便起见，将点夹杂的两个主应变 $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}$ 和方位角 β 变到 $x-y$ 坐标系中，得到三个分量 $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{12}^0$ ，具体变换公式如下：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^0 &= \frac{(\varepsilon_{x_0} + \varepsilon_{y_0})}{2} + \frac{(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon_{y_0})}{2} \cos 2\beta \\ \varepsilon_{22}^0 &= \frac{(\varepsilon_{x_0} + \varepsilon_{y_0})}{2} - \frac{(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon_{y_0})}{2} \cos 2\beta \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon_{y_0})}{2} \sin 2\beta\end{aligned}\quad (2-20)$$

利用 $\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, \varepsilon_{12}^0$ 代替 $\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}$ 和 β ，可将 Kolosov-Muskhelishvili 势函数进一步表达为^[35]：

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \frac{\mu [(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]}{\pi(1+\kappa)(z-s)^2} \\ \Omega_0(z) = \frac{\mu \{2(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) - [(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]\}}{\pi(1+\kappa)(z-s)^2} + \frac{2\mu [(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) - i2\varepsilon_{12}^0]}{\pi(1+\kappa)} \frac{(\bar{s}-s)}{(z-s)^3} \end{cases}\quad (2-21)$$

对式(2-18)第三式进行积分, 并将实部和虚部分开, 并经过有限步简单的运算, 即可得到无限大平面内任意一点的位移表达式:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \left[2\kappa\varepsilon_{12}^0 \bar{y} - \kappa(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) \bar{x} + (3\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) \bar{x} + 2\varepsilon_{12}^0 \bar{y} \right] + \frac{2\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \left[2\bar{x}\bar{y}(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) + 2\varepsilon_{12}^0(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \right] \right] \quad (2-22)$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \left[\kappa(\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0) \bar{y} + 2\kappa\varepsilon_{12}^0 \bar{x} + (3\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) \bar{y} - 2\varepsilon_{12}^0 \bar{x} \right] + \frac{2\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \left[4\varepsilon_{12}^0 \bar{x}\bar{y} - (\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{11}^0)(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \right] \right] \quad (2-23)$$

再利用几何方程(2-2)即可得到该平面内任意一点的应变表达式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^t &= \frac{\left\{ \varepsilon_{11}^0 \left[12\bar{x}^2 \bar{y}^2 + \bar{y}^4 (\kappa - 1) - \bar{x}^4 (3 + \kappa) \right] + \varepsilon_{22}^0 \left[\bar{x}^4 (\kappa - 1) - \bar{y}^4 (\kappa - 5) - 12\bar{x}^2 \bar{y}^2 \right] - 4\varepsilon_{12}^0 \left[\bar{y}^3 \bar{x} (\kappa - 5) + \bar{x}^3 \bar{y} (3 + \kappa) \right] \right\}}{2\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3} \\ \varepsilon_{yy}^t &= \frac{\left\{ \varepsilon_{11}^0 \left[\bar{y}^4 (\kappa - 1) - \bar{x}^4 (\kappa - 5) - 12\bar{x}^2 \bar{y}^2 \right] + \varepsilon_{22}^0 \left[12\bar{x}^2 \bar{y}^2 + \bar{x}^4 (\kappa - 1) - \bar{y}^4 (3 + \kappa) \right] - 4\varepsilon_{12}^0 \left[\bar{x}^3 \bar{y} (\kappa - 5) + \bar{y}^3 \bar{x} (3 + \kappa) \right] \right\}}{2\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3} \\ \varepsilon_{xy}^t &= \frac{2 \left[\varepsilon_{11}^0 (\bar{y}^3 \bar{x} - 3\bar{x}^3 \bar{y}) + \varepsilon_{22}^0 (\bar{x}^3 \bar{y} - 3\bar{y}^3 \bar{x}) + \varepsilon_{12}^0 (\bar{x}^4 - 6\bar{x}^2 \bar{y}^2 + \bar{y}^4) \right]}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3} \end{aligned} \quad (2-24)$$

其中: $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, 其含义为无限大平面内任意一点 (x, y) 到该点特征应变 (x_0, y_0) 的横、纵坐标之差。

式(2-24)可作为使用格林函数法求解由特征应变所引起的弹性体的应力场和应变场问题的影响函数, 通过对其积分即可得到无限大平面中含特征应变为 ε_{ij}^0 的夹杂区 Ω 时, 任意一点的应变场:

$$\varepsilon_{ij}(x, y) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^t(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0 = F_{ij}(\varepsilon_{ij}^0), \quad (x_0, y_0) \in \Omega \quad (2-25)$$

再由本构方程(2-3)即可得到由该夹杂区所引起的任意一点的应力场 $\sigma_{ij}(x, y)$ 。至此, 对无限大平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题得到了完全解答。

3 异性夹杂问题的等效特征应变原理

3.1 引言

上一章给出了无限大平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题的一般解。但在实际工程应用中，有很多问题均是异性夹杂问题，如热膨胀问题、相变问题、增强相问题、沉淀物或缺陷问题、塑性应变问题、失配应变问题以及孔洞问题等。且夹杂区的大小与基体相比，并不总是无限小的^[4]，因此夹杂区几何尺寸的影响便是不可忽略的。

在过去的 50 年里，异性夹杂问题得到了大量研究。但正如绪论所言，这些问题的研究仅局限于夹杂区的形状是椭圆或椭球且夹杂区的特征应变均匀的异性夹杂问题，而非椭圆形状夹杂或特征应变任意时的情况，很多研究仍是基于由 Esheby^[2-3]解决椭圆均匀夹杂问题所建立的 EIM 方法，该法将椭圆异性夹杂问题转变为椭圆同性夹杂问题；然而 Zheng^[24]和 Zou^[25]发现直接用 EIM 方法得到的凸形异性夹杂问题的 Esheby 张量存在微小的误差，而对于非凸形异性夹杂问题则误差更大。因此对任意形状夹杂任意特征应变问题仍需进一步解答。

最近 Ma^[26]提出的特征应变原理解决了这一问题，本章正是基于此做进一步研究。本章第 2 节首先介绍无限大平面含任意形状任意特征应变异性夹杂问题的一般解；随后第 3 节根据第二章所列结果，进一步地对有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题进行求解；第 4 节利用第 3 节的结果对有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题进行求解；最后在第 5 节得出结论。

3.2 无限大平面含异性夹杂问题的一般解

考虑图 3-1 (a) 所示的无限大平面 D ，其材料为#1，且受远场力 σ^∞ 的作用， D 内含一任意形状的异性夹杂区域 Ω ， Ω 的材料为#2，且 Ω 内含有任意分布的特征应变 ε_{ij}^* ，则根据等效特征应变原理，该问题可以等效于 D 内含同性夹杂区域 Ω 的问题，如图 3-1 (b)，只要夹杂区域 Ω 内的特征应变 ε_{ij}^0 满足^[26]：

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq} + S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq}^\infty + S_{ijkl} C_{klpq}^* \varepsilon_{pq}^* \quad (3-1)$$

其中： $\varepsilon_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij}^0)$ 为区域 Ω 内的总应变，见式 (2-25)； C_{ijkl} ， S_{ijkl} 分别为#1 的弹性模量和弹性柔度； C_{ijkl}^* 为#2 的弹性模量； ε_{ij}^∞ 是仅由远场力 σ_{ij}^∞ 作用于图 3-1 (b) 中的基体时所产生的应变。

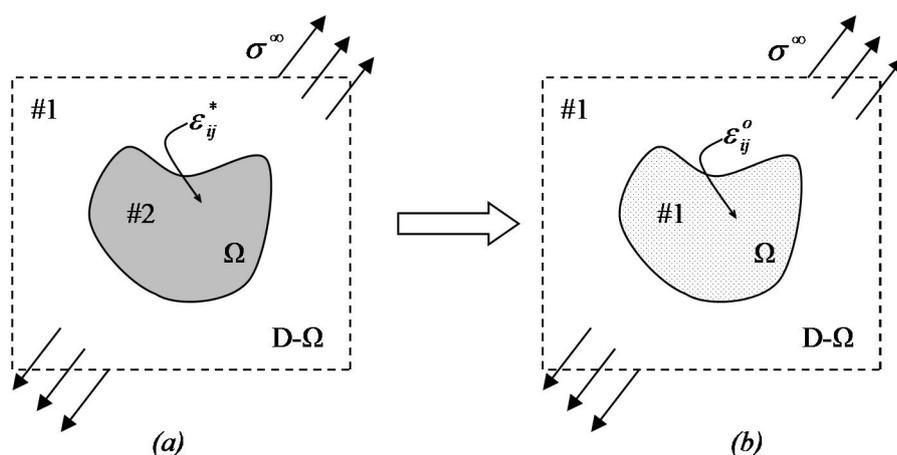


图 3-1 无限大平面异性夹杂一般问题

在求出夹杂区域 Ω 内的特征应变 ε_{ij}^0 后，将其代入到式 (2-3) 可得图 3-1 (b) 中夹杂区域 Ω 内的应力：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}^0) + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\infty, \quad \text{in } \Omega \quad (3-2)$$

将其代入到式 (2-5) 可得图 3-1 (b) 中 $D-\Omega$ 区域内的应力：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\infty, \quad \text{in } D-\Omega \quad (3-3)$$

由于上述两个问题完全等效，因此该应力解也是图 3-1 (a) 异性夹杂问题的应力解，由此该问题得到一般解答。

当远场力 $\sigma^\infty = 0$ 时，即该异性夹杂问题只受特征应变的作用时，式 (3-1)、(3-2) 与 (3-3) 分别退化为：

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq} + S_{ijkl} C_{klpq}^* \varepsilon_{pq}^* \quad (3-4)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}^0), \quad \text{in } \Omega \quad (3-5)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \text{in } D-\Omega \quad (3-6)$$

当异性夹杂区域 Ω 内的特征应变 $\varepsilon_{ij}^* = 0$ 时，即该异性夹杂问题只受远场力作用时，式 (3-1)、(3-2) 与 (3-3) 分别退化为：

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq} + S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq}^\infty \quad (3-7)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}^0) + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\infty, \quad \text{in } \Omega \quad (3-8)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\infty, \quad \text{in } D-\Omega \quad (3-9)$$

3.3 有限平面含同性夹杂问题的一般解

上节给出了无限大平面含任意形状任意特征应变异性夹杂问题的一般解，本节给出有限平面含任意形状任意特征应变同性夹杂问题的一般解。

因当有限基体平面边界受外力时，则该问题可由基体边界不受外力的自由体下的同性夹杂问题与特定边值条件下的一般弹性力学问题叠加解得，因此下面只考虑自由体的同性夹杂问题。考虑图 3-2 (a) 所示的有限平面区域 D_f ，其材料为#1，弹性模量为 C_{ijkl} ，区域 D_f 的边界自由， D_f 内含一同性夹杂区域 Ω ，且夹杂区 Ω 含有任意分布的特征应变 ε_{ij}^0 。

对于有限平面内含同性夹杂的问题，由一点夹杂所引起的总应变场无直接可用的显式格林函数表达，下面将利用叠加原理求解该同性夹杂问题。

对于图 3-2 (a) 所示的问题，由式 (2-13) 与 (2-14) 知，在 D_f 内有：

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^p \quad (3-10)$$

在 D_f 的边界上：

$$C_{ijkl}u_{k,l}n_j = 0 \quad (3-11)$$

其中： $\varepsilon_{kl}^p = \varepsilon_{kl}^0\chi^\Omega$ ， χ^Ω 是 Ω 的特征函数，当 $\mathbf{x} \in \Omega$ 时， $\chi^\Omega(\mathbf{x}) = 1$ ；当 $\mathbf{x} \notin \Omega$ 时， $\chi^\Omega(\mathbf{x}) = 0$ 。

利用叠加原理将上述问题分解为如下两个子问题，如图 3-2 (b)，(c) 所示，其中图 3-2 (b) 所示为一无限大平面 D 含同性夹杂的问题，夹杂区域为 Ω ，且夹杂区 Ω 含有特征应变 ε_{ij}^0 ；图 3-2 (c) 所示为一个只含力边界条件的一般弹性力学问题；且 (c) 在 D_f 的边界力与 (b) 在相同位置产生的内力互为相反数。下面来证明将 (b) (c) 问题的解叠加所得的解即为 (a) 问题的解。

设 (b) (c) 中的位移场分别为 u_i^b ， u_i^c ，根据式 (2-13) 与 (2-14) 得， u_i^b ， u_i^c 在 D_f 内分别满足：

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{k,lj}^b &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^p \\ C_{ijkl}u_{k,lj}^c &= 0 \end{aligned} \quad (3-12)$$

在 D_f 的边界上分别满足：

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{k,l}n_j^b &= T_i \\ C_{ijkl}u_{k,l}n_j^c &= -T_i \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中 T_i 为 (b) 问题中 D_f 的边界上所产生的内力。

令,

$$u_i^s = u_i^b + u_i^c \quad (3-14)$$

将 u_i 代入式 (3-10) 与 (3-11), 则显然等式满足, 由此知:

$$u_i = u_i^s \quad (3-15)$$

即问题 (b) (c) 叠加后的位移与原问题 (a) 中的位移相等, 再由几何方程 (2-2) 和本构方程 (2-3) 与 (2-5) 易知叠加后的应变场和应力场也和原问题相同。即原问题 (a) 和分解后的子问题 (b) (c) 等效。

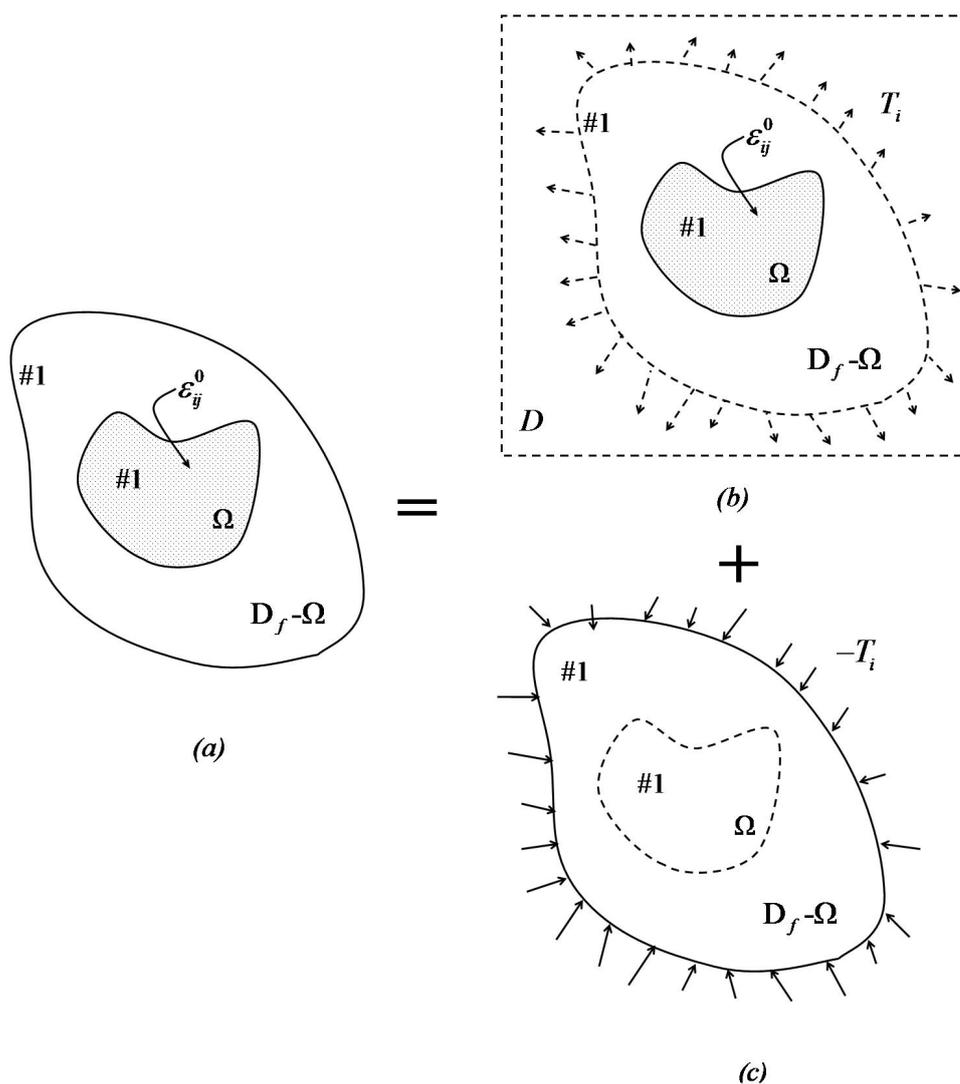


图 3-2 有限平面同性夹杂一般问题

由式 (2-25) 知, (b) 中总应变 ϵ_{ij}^b 和特征应变 ϵ_{ij}^0 的关系可以表示为:

$$\epsilon_{pq}^b = F_{pq}^b (\epsilon_{ij}^0) \quad (3-16)$$

(c) 中的总应变 ε_{pq}^c 可由弹性力学解得, 显然 ε_{pq}^c 和 D_f 与 ε_{ij}^0 有关, 当区域 D_f 一定时, ε_{pq}^c 可以表示为:

$$\varepsilon_{pq}^c = T_{pq}^c (\varepsilon_{ij}^0) \quad (3-17)$$

从而, 原问题 (a) 的总应变 ε_{pq}^a 可以表示:

$$\varepsilon_{pq}^a = \varepsilon_{pq}^b + \varepsilon_{pq}^c = H_{pq} (\varepsilon_{ij}^0) \quad (3-18)$$

再根据式 (2-3) 与 (2-5) 即可得到, (a) 中任意一点处的应力:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad \text{in } \Omega \quad (3-19)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \text{in } D_f - \Omega \quad (3-20)$$

同时从上述过程可以看出, 当有限平面逐渐趋于无限大平面时, 式 (3-17) 逐渐趋于 0, 式 (3-16) 趋于无限大平面同性夹杂问题的解, 因此式 (3-18) 将退化为 (2-25)。

至此, 给出了有限平面含任意形状任意特征应变同性夹杂问题的一般解, 下面将利用该解求有限平面含任意形状任意特征应变异性夹杂问题。

3.4 有限平面含异性夹杂问题的一般解

本节将依次给出有限平面异性夹杂问题如下三种情况的一般解: (1) 夹杂区分布有任意特征应变, 而基体边界上不受外荷载作用时的情况; (2) 基体边界上受外荷载作用, 但夹杂区无特征应变时的情况; (3) 夹杂区分布任意特征应变, 且基体边界上受外荷载作用时的情况。同时需要指出的是, 第三种情况是最一般的情况, 前两种情况可由第三种情况退化得到。

3.4.1 仅特征应变作用时异性夹杂问题的一般解

考虑图 3-3 (a) 所示的有限平面区域 D_f , 其材料为 #1, 弹性模量为 C_{ijkl} , 弹性柔度为 S_{ijkl} , 区域 D_f 的边界自由, D_f 内含一异性夹杂区域 Ω , 其材料为 #2, 弹性模量为 C_{ijkl}^* , 且夹杂区 Ω 含有任意分布的特征应变 ε_{ij}^* 。

图 3-3 (b) 所示为相应的同性夹杂问题, 下面将证明当 (b) 中特征应变 ε_{ij}^0 满足一定条件时, (a) 问题等效于 (b) 问题。

由弹性力学知, 虚功原理可表示为:

$$\int_v f_i \delta u_i dv + \int_s T_i \delta u_i ds = \int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-21)$$

其中: f_i 为体力, δu_i 与 $\delta \varepsilon_{ij}$ 分别表示虚位移和虚应变。

首先假想分别将问题 (a) (b) 中夹杂区域 Ω 从基体 D_f 中切开, 并代之以相应的边界力, 利用式 (3-21), 对 (a) 中夹杂区域 Ω 有:

$$\int_V f_i^* \delta u_i dv + \int_S T_i^* \delta u_i ds = \int_V \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-22)$$

对 (b) 中夹杂区域 Ω 有:

$$\int_V f_i \delta u_i dv + \int_S T_i \delta u_i ds = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-23)$$

其中: f_i 、 T_i 、 σ_{ij} 分别为问题 (a) 中区域 Ω 的体力、边界力和应力; f_i^* 、 T_i^* 、 σ_{ij}^* 分别为问题 (b) 中区域 Ω 的体力、边界力和应力; δu_i 与 $\delta \varepsilon_{ij}$ 分别为对应的虚位移和虚应变。

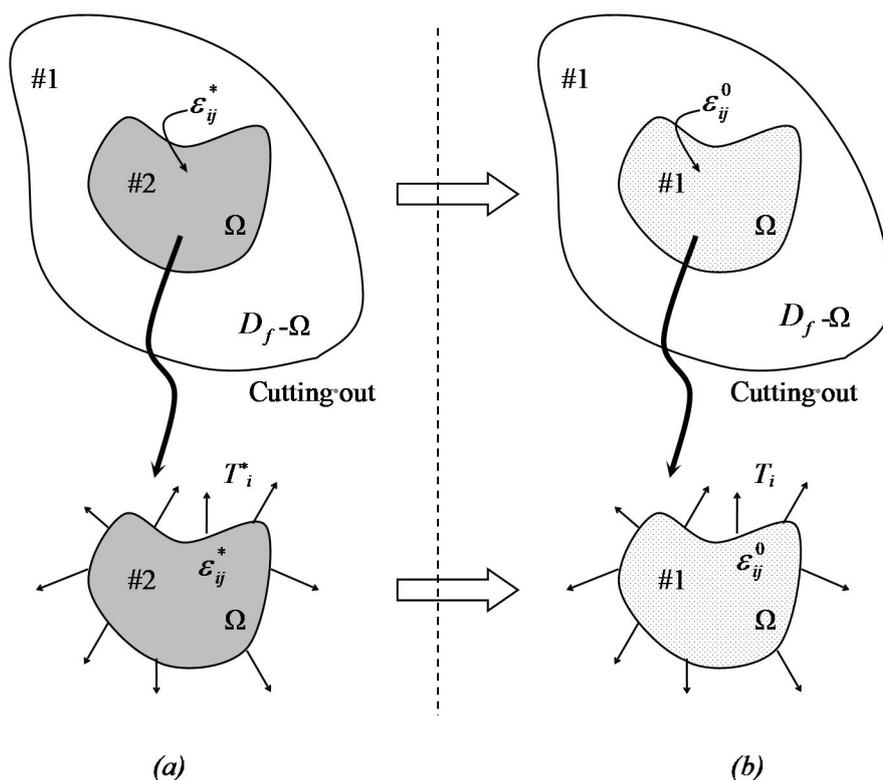


图 3-3 含特征应变的有限平面异性夹杂问题

且由式 (2-3) 知, 对 (a) 中区域 Ω 有:

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}^* (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \quad (3-24)$$

对 (b) 中区域 Ω 有:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) \quad (3-25)$$

同时 $f_i = f_i^*$, $T_i = T_i^*$ 是保证问题 (a) (b) 等效必要条件, 且当两个问题等效时, 其位移 u_i 与总应变 ε_{ij} 也必然是相同的,

将式 (3-22) 与 (3-23) 相减可得:

$$\int_V (f_i - f_i^*) \delta u_i dv + \int_S (T_i - T_i^*) \delta u_i ds = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-26)$$

则当 $f_i = f_i^*, T_i = T_i^*$ 时, 由 δu_i 与 $\delta \varepsilon_{ij}$ 的任意性可知:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* \quad (3-27)$$

将式 (3-25) 与 (3-26) 分别代入到式 (3-27) 的左右两端得,

$$C_{ijkl}^* (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) \quad (3-28)$$

从而问题 (b) 中夹杂区域 Ω 的等效特征应变 ε_{kl}^0 为:

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq} + S_{ijkl} C_{klpq}^* \varepsilon_{pq}^* \quad (3-29)$$

其中: $\varepsilon_{ij} = H_{ij}(\varepsilon_{ij}^0)$ 可由式 (3-18) 求解得到。

即当 ε_{ij}^0 满足式 (3-29) 时, 问题 (a) (b) 中的总应变以及应力完全相同, 从而证明了问题 (a) (b) 等效。且一旦 ε_{ij}^0 得到, 再利用式 (2-3) 与 (2-5) 即可得到, (a) 中任意一点处的应力:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad \text{in } \Omega \quad (3-30)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \text{in } D_f - \Omega \quad (3-31)$$

3.4.2 仅基体边界受外荷载作用时异性夹杂问题的一般解

接下来考虑情况 (2), 如图 3-4 (a) 所示, 有限平面区域 D_f 材料为 #1, 弹性模量为 C_{ijkl} , 弹性柔度为 S_{ijkl} , 区域 D_f 的边界受外荷载 σ^s 作用, D_f 内含一异性夹杂区域 Ω , 其材料为 #2, 弹性模量为 C_{ijkl}^* , 夹杂区 Ω 内无特征应变。

图 3-3 (b) 所示为相应的同性夹杂问题, 下面来证明当 (b) 中特征应变 ε_{ij}^0 满足一定条件时, (a) 问题等效于 (b) 问题。

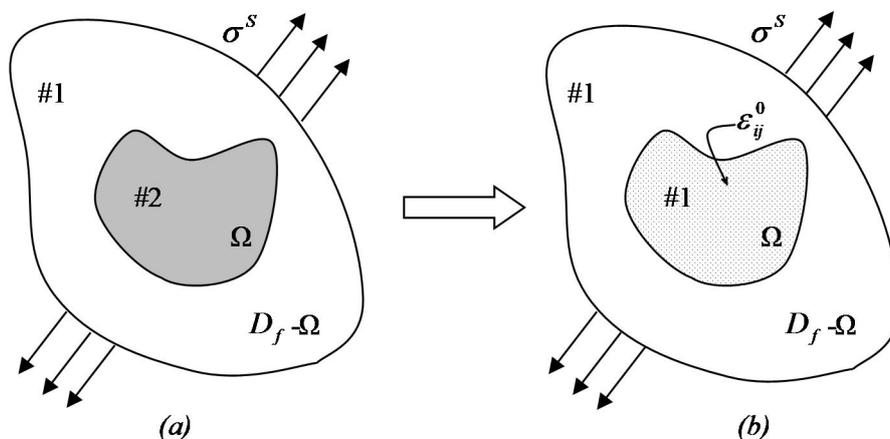


图 3-4 受边界荷载作用的有限平面异性夹杂问题

根据叠加原理，图 3-4 (b) 问题可以分解为如下两个子问题：(I) 如图 3-5 (c) 所示，仅受边界力 σ^s 作用时的弹性力学问题；(II) 如图 3-5 (d) 所示，仅含特征应变 ε_{ij}^0 时的同性夹杂问题。相应地，图 3-4 (a) 问题也可以分解为如下两个子问题：(I) 如图 3-5 (e) 所示，受边界力 σ^s 作用且含特征应变 ε_{ij}^d 时的异性夹杂问题；(II) 如图 3-5 (f) 所示，仅含特征应变 $-\varepsilon_{ij}^d$ 时的异性夹杂问题。

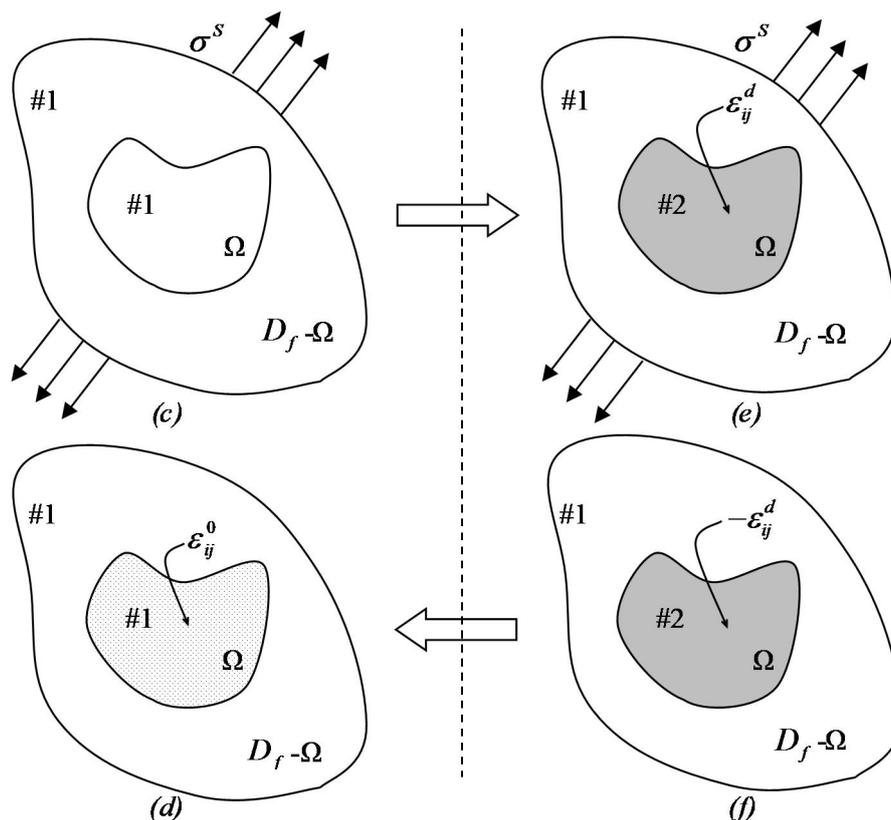


图 3-5 利用叠加原理分解后的子问题

需要指出的是，图 3-5 (e) 中的特征应变 ε_{ij}^d 可以是任意的，但同时可以证明当 ε_{ij}^d 满足一定条件时，图 3-5 (e) 和 (c) 问题等价，该结论的证明与 3.3.1 节的证明方法类似，首先假想分别将问题 (c) (e) 中夹杂区域 Ω 从基体 D_f 中切开，并代之以相应的边界力，如图 3-6。

利用式 (3-21)，对 (c) 中区域 Ω 有：

$$\int_{\nu} f_i \delta u_i dv + \int_s T_i \delta u_i ds = \int_{\nu} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-32)$$

对图 3-6 (e) 中夹杂区域 Ω 有：

$$\int_{\nu} f_i^* \delta u_i dv + \int_s T_i^* \delta u_i ds = \int_{\nu} \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-33)$$

其中： f_i 、 T_i 、 σ_{ij} 分别为问题 (c) 中区域 Ω 的体力、边界力和应力； f_i^* 、 T_i^* 、 σ_{ij}^* 分

别为问题 (e) 中区域 Ω 的体力、边界力和应力; δu_i 与 $\delta \varepsilon_{ij}$ 分别为对应的虚位移和虚应变。

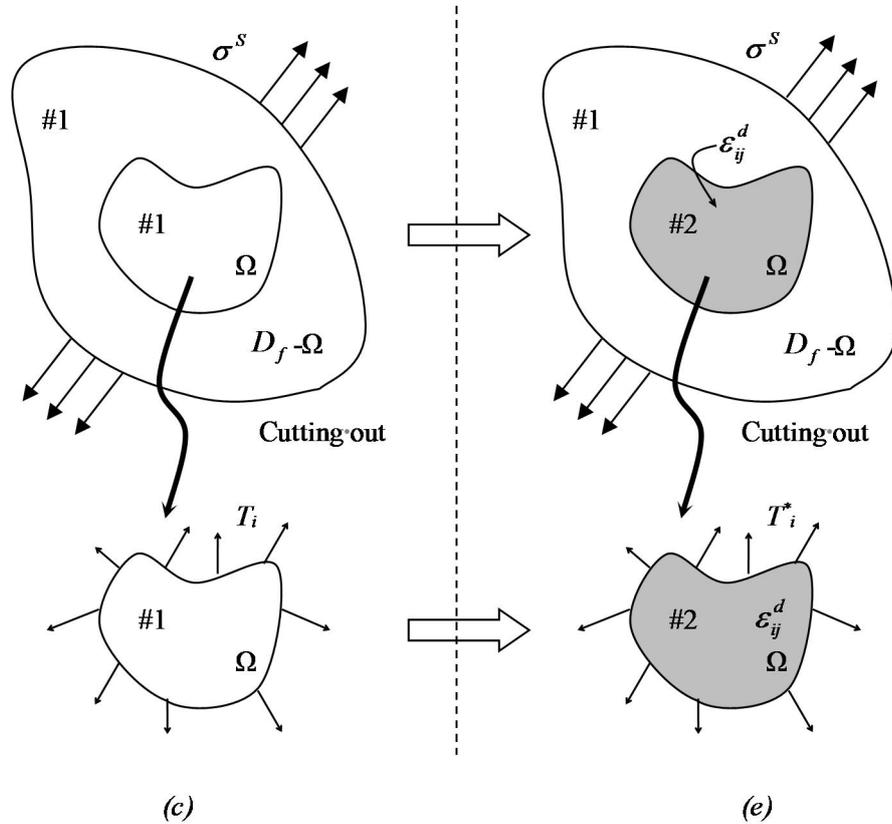


图 3-6 问题 (c) (e) 等价关系证明

且由式 (2-3) 知, 对 (c) 中区域 Ω 有:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^s \quad (3-34)$$

对 (e) 中区域 Ω 有:

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}^* (\varepsilon_{kl}^s - \varepsilon_{kl}^d) \quad (3-35)$$

类似地, $f_i = f_i^*, T_i = T_i^*$ 是保证问题 (c) (e) 等效必要条件, 且当两个问题等效时, 其位移 u_i 与总应变 ε_{ij}^s 也必然是相同的, 注意为下文叙述方便起见, 这里将由边界荷载 σ^s 所引起的总应变记为 ε_{ij}^s 。

将式 (3-32) 与 (3-33) 相减可得:

$$\int_v (f_i - f_i^*) \delta u_i dv + \int_s (T_i - T_i^*) \delta u_i ds = \int_v (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3-36)$$

则当 $f_i = f_i^*, T_i = T_i^*$ 时, 由 δu_i 与 $\delta \varepsilon_{ij}$ 的任意性可知:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* \quad (3-37)$$

将式 (3-35) 与 (3-36) 分别代入到 (3-27) 的左右两端得,

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl}^* (\varepsilon_{kl}^S - \varepsilon_{kl}^d) \quad (3-38)$$

从而问题 (e) 中夹杂区域 Ω 的等效特征应变 ε_{kl}^d 为:

$$\varepsilon_{ij}^d = S_{ijkl}^* (C_{klpq}^* - C_{klpq}) \varepsilon_{pq}^S \quad (3-39)$$

其中: ε_{ij}^S 由弹性力学求解得到。

当 ε_{ij}^d 满足式 (3-39) 时, 问题 (c) (e) 中的总应变以及应力完全相同, 从而证明了问题 (c) (e) 等效。

下面选取满足式 (3-39) 的特征应变作为问题 (e) 中的特征应变, 一旦 ε_{ij}^d 选定, 根据 3.4.1 节可将图 3-5 中问题 (f) 等效为问题 (d), 利用式 (3-29) 得:

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq} - S_{ijkl} C_{klpq}^* \varepsilon_{pq}^d \quad (3-40)$$

其中: $\varepsilon_{ij} = H_{ij}(\varepsilon_{ij}^0)$ 为夹杂区的总应变, 可由式 (3-18) 求解得到。

再将式 (3-39) 代入到 (3-40), 得到:

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq} + S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \varepsilon_{pq}^S \quad (3-41)$$

从以上过程可以看出, 当问题 (c) (d) 与问题 (e) (f) 分别等效时, ε_{ij}^0 满足式 (3-41), 根据叠加原理, 即 ε_{ij}^0 满足式 (3-41) 时, 图 3-4 中的问题 (a) (b) 等效。且一旦 ε_{ij}^0 得到, 再利用式 (2-3) 与 (2-5) 即可得到, 问题 (a) 中任意一点处的应力为:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}^0) + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^S, \quad \text{in } \Omega \quad (3-42)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^S, \quad \text{in } D_f - \Omega \quad (3-43)$$

3.4.3 外荷载与特征应变同时作用时异性夹杂问题的一般解

最后考虑最一般的情况 (3), 如图 3-7 (a) 所示, 有限平面区域 D_f 材料为 #1, 弹性模量为 C_{ijkl} , 弹性柔度为 S_{ijkl} , 区域 D_f 的边界受外荷载 σ^S 作用, D_f 内含一异性夹杂区域 Ω , 其材料为 #2, 弹性模量为 C_{ijkl}^* , 夹杂区 Ω 含有任意分布的特征应变 ε_{ij}^* 。

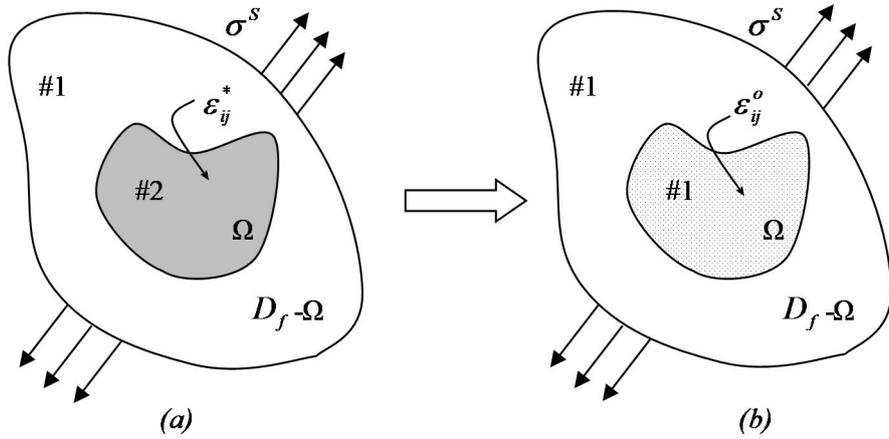


图 3-7 有限平面异性夹杂一般问题

和 3.4.2 节类似, 利用同样的证明过程可以得到等效的同性夹杂问题, 如图 3-4 (b) 所示, 在此略去该证明过程, 等效后的特征应变 ϵ_{ij}^0 为:

$$\epsilon_{ij}^0 = S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \epsilon_{pq} + S_{ijkl} (C_{klpq} - C_{klpq}^*) \epsilon_{pq}^S + S_{ijkl} C_{klpq}^* \epsilon_{pq}^* \quad (3-44)$$

其中: $\epsilon_{ij} = H_{ij}(\epsilon_{ij}^0)$ 可由式 (3-18) 求解得到。

同样地, 且一旦 ϵ_{ij}^0 得到, 即可得到问题 (a) 中任意一点处的应力:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0) + C_{ijkl} \epsilon_{kl}^S, \quad \text{in } \Omega \quad (3-45)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + C_{ijkl} \epsilon_{kl}^S, \quad \text{in } D_f - \Omega \quad (3-46)$$

至此, 有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题得到了一般解答。

特例 1: 令 $\sigma^S = 0$, 易得出式 (3-44)、(3-45) 与 (3-46) 将退化为式 (3-29)、(3-30) 与 (3-31);

特例 2: 令 $\epsilon_{ij}^* = 0$, 易得出式 (3-44)、(3-45) 与 (3-46) 将退化为式 (3-41)、(3-42) 与 (3-43);

因此情况 (1) 与情况 (2) 是情况 (3) 的特例。

特例 3: 令 $C_{ijkl} = C_{ijkl}^*$, $\epsilon_{ij}^S = 0$ 易得出式 (3-44)、(3-45) 与 (3-46) 将退化为式 (3-18)、(3-19) 与 (3-20), 即该异性夹杂问题退化为相应的同性夹杂问题;

特例 4: 有限平面逐渐趋于无限大平面, 则 $\epsilon_{ij} = H_{ij}(\epsilon_{ij}^0)$ 逐渐趋于 $F_{ij}(\epsilon_{ij}^0)$, 式 (3-44)、(3-45) 与 (3-46) 将退化为式 (3-7)、(3-8) 与 (3-9), 即, 有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题可退化为无限大平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题。

3.5 本章小结

本章利用等效特征应变原理与叠加原理得到了无限大平面含任意形状任意特征应变异性夹杂问题的一般解、有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题的一般解以及有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题的一般解。且根据结果可知，有限大平面含异性夹杂问题的一般解经过适当的简化可以退化到无限大平面含异性夹杂问题的一般解和有限同性夹杂问题的一般解。

4 无限大平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题

4.1 引言

无限大平面圆形异性夹杂问题在材料工程、纤维增强复合材料力学以及其他工程领域十分常见。如环形试件在淬火过程中残余应力的产生，以及钛合金基体复合材料中半导体纤维的碳单纤维核的纳米尺度残余应力问题等。同时圆形夹杂问题由于几何形状简单使得寻找到其解析解成为可能。

在一般的文献中，圆形夹杂问题通常由椭圆形夹杂问题退化得到，尽管圆形夹杂在某些特殊情况下具有很好的对称性。只有极少的文献对非均匀特征应变的圆形夹杂问题进行过研究，如 Mara^[1]和 Rahman^[36]分别分析了特征应变为多项式分布形式时的圆形同性夹杂问题；Sharma 和 Sharma^[37]研究了特征应变为高斯以及指数分布时的椭球形同性夹杂问题。该问题的主要困难在于异性夹杂以及特征应变是任意时的情况。

同时自然界中有许多常见且物理意义明确的现象，如热、扩散以及成分梯度等，这些现象所引起的特征应变通常是关于圆心呈对称分布的。基于此，本章将对含非均匀对称特征的圆形异性夹杂问题进行研究，如图 4-1 所示，夹杂区域的大小为 $\rho < \rho_1$ ，其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，该区域中分布有非均匀对称的特征应变。

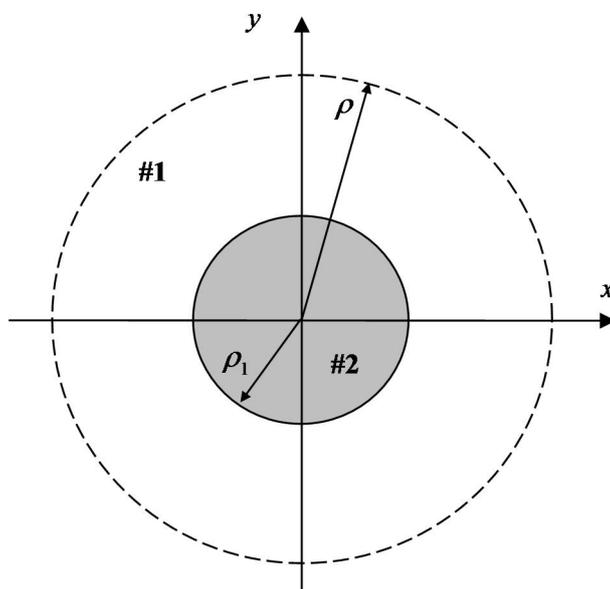


图 4-1 无限平面圆形异性夹杂问题

本章第 2 节首先给出无限大平面含非均匀对称特征的圆形同性夹杂问题的解答；随后在第 3 节给出无限大平面含非均匀对称特征的圆形异性夹杂问题的解答；第 4 节通过两个具体实例演示第 3 节中解的应用；最后在第 5 节得出结论。

4.2 无限大平面含非均匀对称特征应变圆形同性夹杂问题解答

假定夹杂区域为 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_1$ ，其内分布有满足 $\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_0(\rho)$ ， $\varepsilon_{12}^0 = 0$ 的非均匀对称特征应变，基体区域 $\rho > \rho_1$ 内无特征应变，如图 4-2 所示：

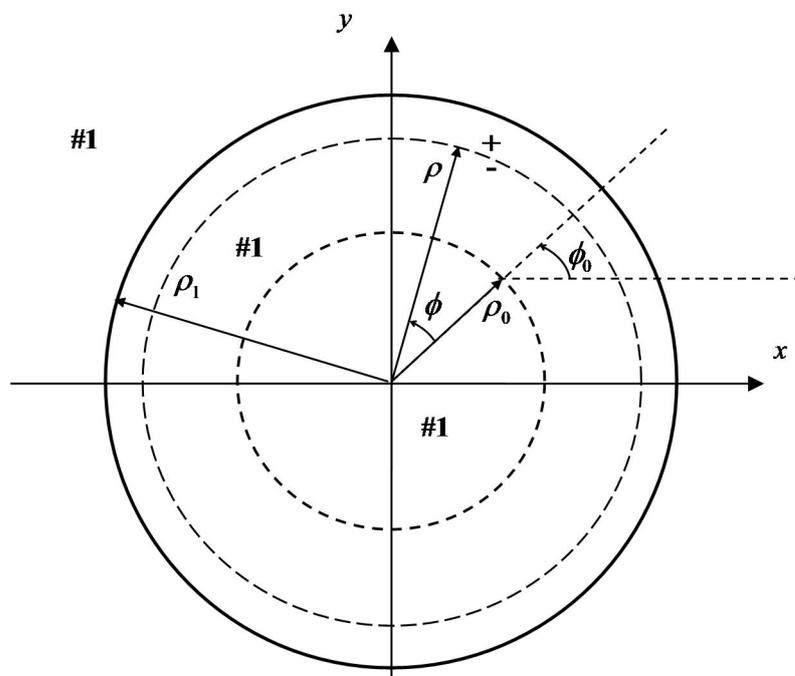


图 4-2 无限大平面圆形同性夹杂问题

由式 (2-24) 知，夹杂区域内任意一点 (x_0, y_0) 处的特征应变所引起的弹性应变场为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{2(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)\varepsilon_0(\rho_0)}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)\varepsilon_0(\rho_0)}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{2(2\bar{x}\bar{y})\varepsilon_0(\rho_0)}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2}\end{aligned}\quad (4-1)$$

再利用式 (2-25) 对其进行积分, 即可得到由整个夹杂区所引起的弹性应变场:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \int_{\Omega} \frac{2(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \varepsilon_0(\rho_0) d\Omega = \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{yy} &= \int_{\Omega} \frac{2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \varepsilon_0(\rho_0) d\Omega = \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{xy} &= - \int_{\Omega} \frac{2(2\bar{x}\bar{y})}{\pi(1+\kappa)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} \varepsilon_0(\rho_0) d\Omega = - \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(2\bar{x}\bar{y})}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0\end{aligned}\quad (4-2)$$

此处, Ω 表示夹杂区域的面积, $\rho_0^2 = (x_0^2 + y_0^2)$, $\bar{x} = (x - x_0) = (x - \rho_0 \cos \phi_0)$, $\bar{y} = (y - y_0) = (y - \rho_0 \sin \phi_0)$ 。

需要特别指出的是, 如下两个等式在下面的计算中发挥着重要作用:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{[(y - \rho_0 \sin \phi_0)^2 - (x - \rho_0 \cos \phi_0)^2]}{[(y - \rho_0 \sin \phi_0)^2 + (x - \rho_0 \cos \phi_0)^2]^2} d\phi_0 \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x^2 + y^2) > \rho_0^2 \\ 0, & (x^2 + y^2) < \rho_0^2 \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\bar{y}\bar{x}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{(y - \rho_0 \sin \phi_0)(x - \rho_0 \cos \phi_0)}{[(y - \rho_0 \sin \phi_0)^2 + (x - \rho_0 \cos \phi_0)^2]^2} d\phi_0 \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi(yx)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x^2 + y^2) > \rho_0^2 \\ 0, & (x^2 + y^2) < \rho_0^2 \end{cases}\end{aligned}\quad (4-3)$$

使用上述两个等式, 可由式 (4-2) 得到任意一点 (x, y) 处的应力和应变。

4.2.1 夹杂区域外的应变场和应力场

利用式 (4-3), 通过对式 (4-2) 求解可以得到, 当 $\rho > \rho_1$, 其中 $\rho^2 = (x^2 + y^2)$ 时任意一点的应变为:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 = \frac{4}{(1+\kappa)} \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 = -\frac{4}{(1+\kappa)} \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{xy} = -\frac{4}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{x}\bar{y})}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi_0 \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 = -\frac{4}{(1+\kappa)} \frac{(2yx)}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \end{cases} \quad (4-4)$$

式 (4-4) 的极坐标表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho) = \frac{4}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ \varepsilon_{rr}(\rho) = -\frac{4}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho) = 0 \end{cases} \quad (4-5)$$

利用本构方程 (2-5), 并略去中间的计算过程可得夹杂区域外任意一点处应力的极坐标表示为:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \sigma_{rr}(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \sigma_{r\theta}(\rho) = 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

4.2.2 夹杂区域内的弹性应变场和应力场

当计算夹杂区内 $\rho < \rho_1$ ，其中 $\rho^2 = (x^2 + y^2)$ 时的应变场和应力场时，由于积分式 (4-2) 会产生奇异性，因此该种情况和计算夹杂区域外应变场和应力场的情况有所不同。下面将给出具体的求解细节。

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(\rho^+) = \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{y}^2 - \bar{x}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 = \frac{4}{(1+\kappa)} \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{yy}(\rho^+) = \frac{2}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 = -\frac{4}{(1+\kappa)} \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{xy}(\rho^+) = -\frac{4}{\pi(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(\bar{x}\bar{y})}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} d\phi \right] \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 = -\frac{4}{(1+\kappa)} \frac{(2yx)}{(x^2 + y^2)^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \end{cases} \quad (4-7)$$

其中： $\varepsilon_{ij}(\rho^+)$ 表示极坐标 ρ 正方向极限的应变值，如图 4-2 所示，此应变是由在圆 $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ 内部和边界上的特征应变所引起的弹性应变。

在此需要强调的是，根据等式 (4-3)， $\rho_0 > \rho$ 区域的特征应变不会引起 ρ 处的弹性变形。式 (4-7) 的极坐标的形式为：

$$\begin{cases} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho^+) = \frac{4}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ \varepsilon_{rr}(\rho^+) = -\frac{4}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho^+) = 0 \end{cases} \quad (4-8)$$

由此可以得到在 ρ^+ 处的应力为：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(\rho^+) \\ \sigma_{rr}(\rho^+) \\ \sigma_{r\theta}(\rho^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu \\ & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho^+) \\ \varepsilon_{rr}(\rho^+) \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho^+) \end{bmatrix} = 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}(\rho^+) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

式中： λ —— 拉梅常数。

接下来利用图 4-3 来说明如何通过 $\sigma_{ij}(\rho^+)$ 来计算 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 上的应力 $\sigma_{ij}(\rho)$ 。

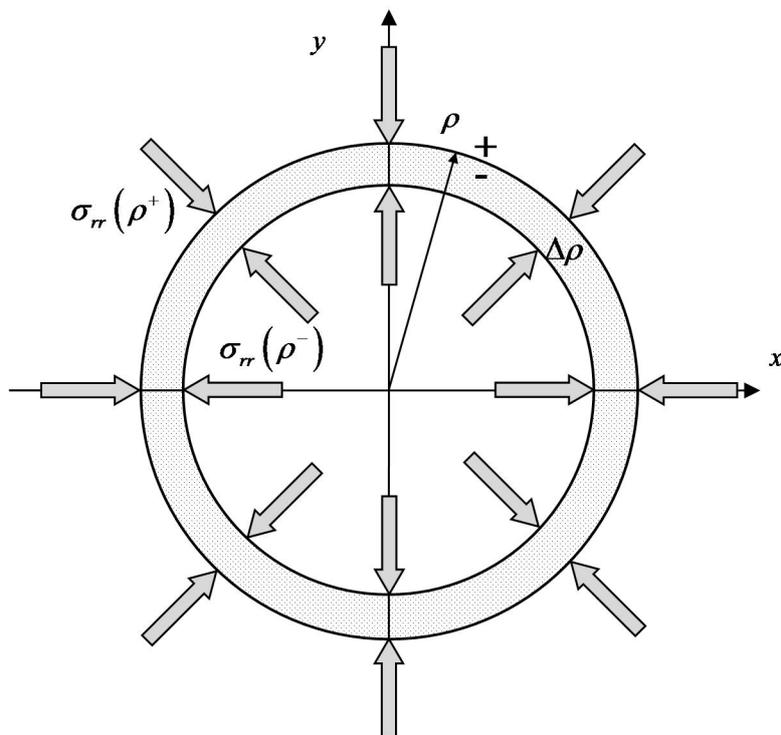


图 4-3 隔离体法求解应力 $\sigma_{ij}(\rho)$

在 2.1.2 节中曾经指出特征应变可以等效于体力，而当 $\Delta\rho \rightarrow 0$ 时材料的体积也逐渐趋于 0，因此特征应变可以忽略不计，从而得到如下关系：

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \sigma_{rr}(\rho^+) = \sigma_{rr}(\rho^-) \equiv \sigma_{rr}(\rho) \quad (4-10)$$

根据圆环的经典弹性解^[38]，可以得到 $\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{rr}(\rho)$ ，因此：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(\rho) \\ \sigma_{rr}(\rho) \\ \sigma_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(\rho^+) \\ \sigma_{rr}(\rho^+) \\ 0 \end{bmatrix} = -2\mu\varepsilon_{\theta\theta}(\rho^+) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

对式 (2-5) 取逆，即可得到夹杂区内任一点的弹性应变：

$$\mathbf{e}(\rho) = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\sigma_{rr}(\rho)}{2(\lambda + \mu)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0(\rho) \\ \varepsilon_0(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{4\mu}{(\lambda + \mu)(1 + \kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

式中 \mathbf{C} 为基体材料#1 的弹性模量， \mathbf{e} 、 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为一点处的弹性应变和应力。各个量的

具体表达式为：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & & \\ & & 2\mu & \\ & & & 2\mu \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{\theta\theta} \\ e_{rr} \\ e_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

若式 (4-1) 中的特征应变为常数，即 $\varepsilon_0(\rho_0) = \varepsilon_0$ ，则 (4-11) 退化为：

$$\sigma_{rr}(\rho) = \sigma_{\theta\theta}(\rho) = -\frac{4\mu\varepsilon_0}{(1+\kappa)} = -\frac{\mu\varepsilon_0}{(1-\nu)} \quad (4-14)$$

该结果与 Eshelby 所得的结果完全相同^[1]。

4.2.3 夹杂区域内的总应变场

接下来，将求解 $\rho < \rho_1$ 内的总应变，由式 (2-1) 知，夹杂区域内的总应变等于弹性应变和特征应变之和，即：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\rho) = \mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}^0(\rho) = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^0(\rho) \quad (4-15)$$

其中 \mathbf{C} ， \mathbf{e} ， $\boldsymbol{\sigma}$ 的表达式见式 (4-13)， $\boldsymbol{\varepsilon}$ ， $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 分别为一点处的总应变和特征应变，其具体表达式如下：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{rr}^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0(\rho) \\ \varepsilon_0(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

则根据式 (4-12) 与 (4-15) 得任意一点处总应变的表达式为：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho) \\ \varepsilon_{rr}(\rho) \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = -\frac{4\mu}{(\lambda + \mu)(1 + \kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0(\rho) \\ \varepsilon_0(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

由此得到了无限大平面非均匀对称特征应变圆形同性夹杂问题的解。下面将利用该解得到相应异性夹杂问题的解。

4.3 无限大平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题解答

本节将研究含非均匀对称特征应变的圆形异性夹杂问题。如图 4-4 (a) 所示，基体区域的材料为#1，夹杂区域的材料为#2，非均匀对称特征应变分布于夹杂区 $\rho < \rho_1$ 内，基体 $\rho > \rho_1$ 内无特征应变。

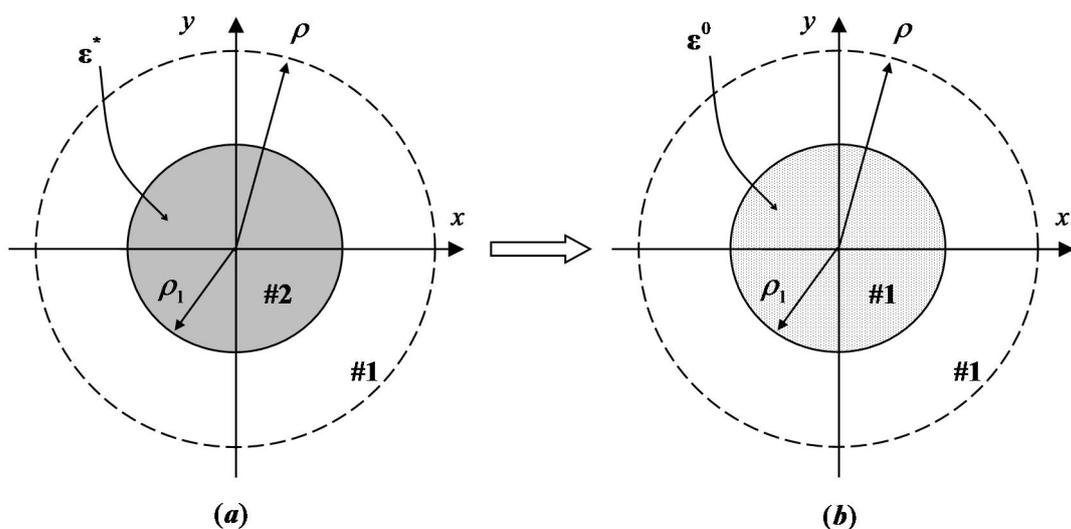


图 4-4 无限大平面圆形异性夹杂问题的等效变换

由 3.2 节的等效特征应变原理，可将异性夹杂问题 (a) 转变为相应的同性夹杂问题 (b)。根据式 (3-4)，可得等效后 (b) 中的特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 满足：

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^0 = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^*)\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}^*\boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-18)$$

其中 \mathbf{C} ， \mathbf{C}^* 分别为基体和夹杂材料的弹性张量， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为总应变， $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 为等效后的特征应变， $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 为夹杂区的对称分布的特征应变，为下述方便起见，这里列出上述各个量的具体表达式：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & & \\ & & & 2\mu \end{bmatrix}, \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \lambda_2 + 2\mu_2 & \lambda_2 & & \\ \lambda_2 & \lambda_2 + 2\mu_2 & & \\ & & & 2\mu_2 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{rr}^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}^* \\ \varepsilon_{rr}^* \\ \varepsilon_{r\theta}^* \end{bmatrix}$$

由于 $\varepsilon_{ij}^*(\rho) = \delta_{ij}\varepsilon^*(\rho)$ 为对称分布，根据对称性可知，等效后的特征应变和总应变也必须是对称分布的，即 $\varepsilon_{ij}^0(\rho) = \delta_{ij}\varepsilon_0(\rho)$ ， $\varepsilon_{ij}(\rho) = \delta_{ij}\varepsilon(\rho)$ 将其代入到式 (4-18) 可得：

$$2\varepsilon_0(\rho)(\lambda + \mu) = 2\left[(\lambda - \lambda_2) + (\mu - \mu_2)\right] \left[\varepsilon_0(\rho) - \frac{4\mu}{(\lambda + \mu)(1 + \kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \right] + 2\varepsilon^*(\rho)(\lambda_2 + \mu_2) \quad (4-20)$$

通过对上式化简可得：

$$\varepsilon_0(\rho) + \chi \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \varepsilon^*(\rho), \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-21)$$

其中： $\chi = \frac{4\mu[(\lambda - \lambda_2) + (\mu - \mu_2)]}{(1 + \kappa)(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2)}$ 。

通过解式 (4-21) 即可求得 $\varepsilon^0(\rho)$ 为：

$$\varepsilon_0(\rho) = \frac{1}{\rho^{(2+\chi)}} \left\{ \int \rho^\chi \frac{d}{d\rho} [\rho^2 \varepsilon^*(\rho)] d\rho + C \right\}, \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-22)$$

将式 (4-22) 回带到式 (4-21) 即可确定常数 C 。

当 $\varepsilon^0(\rho)$ 确定后，再利用 4.2 节式 (4-5) (4-6) (4-11) 与 (4-17) 即可得到夹杂区域内外任意一点处的应变和应力，至此，无限大平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题得到了一般解答。

作为本节的结束，给出一个典型的算例来演示上述解的使用方法，设 $\varepsilon^*(\rho)$ 为 ρ 的多项式级数形式，即：

$$\varepsilon^*(\rho) = \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n, \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-23)$$

将上式带到式 (4-22)，然后再将得到的结果回带到式 (4-21) 可以得到：

$$\varepsilon_0(\rho) = \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{n+2}{n+2+\chi} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n, \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-24)$$

根据式 (4-5) 和 (4-6) 基体 $\rho > \rho_1$ 内任意一点的应力和应变分别为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} = \frac{1}{\rho^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ \quad = \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2+\chi} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (4-25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta\theta} = -\varepsilon_{rr} = \frac{1}{\rho^2} \frac{4}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ \quad = \frac{4}{(1+\kappa)} \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2+\chi} \\ \varepsilon_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (4-26)$$

利用式 (4-11) 和 (4-17) 可得夹杂区 $\rho < \rho_1$ 内任意一点处的应力和总应变:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(\rho) = \sigma_{\theta\theta}(\rho) = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2+\chi} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-27)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}(\rho) = \varepsilon_{\theta\theta}(\rho) = -\frac{4\mu}{(\lambda+\mu)(1+\kappa)} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+2+\chi} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \\ \quad + \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{n+2}{n+2+\chi}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \\ \varepsilon_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-28)$$

4.4 应用

4.4.1 异性夹杂中心处含点热源的热变形问题

以下两小节结合工程实际给出圆形异性夹杂的两个具体应用。正如 Yoshikawa 与 Hasebe^[39]所言, 点热源问题是热弹性力学的基本问题之一, 该问题在土木工程、力学以及微观力电设备系统中上有很多应用。

此处假定点热源位于异性夹杂区的中心, 如图 4-5 所示, 设基体区域的材料为#1, 热传导率为 k_1 , 热膨胀系数为 α_1 , 夹杂区域的材料为#2, 热传导率为 k_2 , 热膨胀系数为 α_2 , 点热源的总热流密度为 Q 。

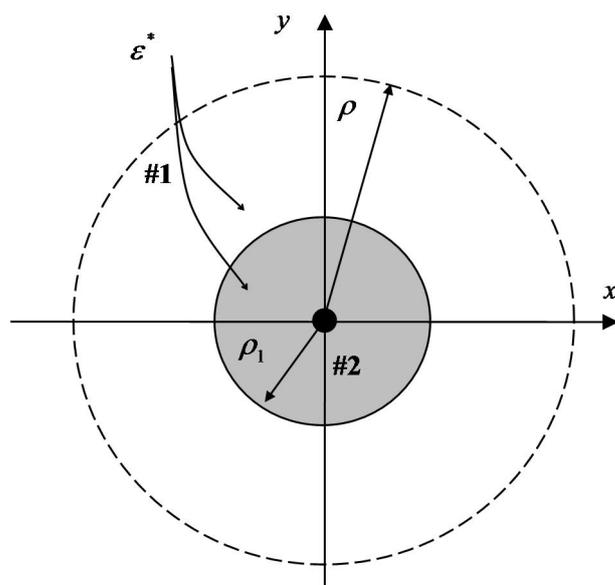


图 4-5 点热源位于夹杂中心的异性夹杂问题

根据傅里叶热传导方程，温度场达到稳态后在夹杂区和基体的分布为：

$$\begin{cases} t_1 = \frac{Q}{2\pi k_1} \ln \frac{1}{\rho}, & \rho < \rho_1 \\ t_2 = \frac{Q}{2\pi k_2} \ln \frac{1}{\rho}, & \rho > \rho_1 \end{cases} \quad (4-29)$$

从而该夹杂问题的特征应变可以表示为：

$$\begin{cases} \varepsilon^{*(\#2)} = \alpha_2 t_2 = \frac{\alpha_2 Q}{k_2 2\pi} \ln \frac{1}{\rho} = A_2 \ln \frac{1}{\rho}, & \rho < \rho_1 \\ \varepsilon^{*(\#1)} = \alpha_1 t_1 = \frac{\alpha_1 Q}{k_1 2\pi} \ln \frac{1}{\rho} = A_1 \ln \frac{1}{\rho}, & \rho > \rho_1 \end{cases} \quad (4-30)$$

由式 (4-21)，等效后的特征应变 $\varepsilon_0(\rho)$ 满足：

$$\varepsilon_0(\rho) + \chi \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \varepsilon^*(\rho) = A_2 \ln \frac{1}{\rho}, \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-31)$$

通过对上式求解得：

$$\varepsilon_0(\rho) = A_2 \left(\frac{2}{(\chi+2)} \ln \frac{1}{\rho} - \frac{\chi}{(\chi+2)^2} \right), \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-32)$$

因此根据式 (4-11) 在夹杂区 ($\rho < \rho_1$) 内任意一点处的应力为：

$$\sigma_{rr}(\rho) = \sigma_{\theta\theta}(\rho) = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = -\frac{4\mu A_2}{(1+\kappa)} \left[\frac{1}{(\chi+2)} \left(1 + 2 \ln \frac{1}{\rho} \right) - \frac{\chi}{(\chi+2)^2} \right] \quad (4-33)$$

再根据式 (4-5) 在基体 ($\rho > \rho_1$) 内任意一点处的应力为：

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(\rho) = \sigma_{\theta\theta}(\rho) &= -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho \\ &= -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \left[\int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho + \int_{\rho_1}^\rho \varepsilon^{*(\#1)}(\rho) \rho d\rho \right] \\ &= -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \left[\int_0^{\rho_1} A_2 \left(\frac{2}{(\chi+2)} \ln \frac{1}{\rho} - \frac{\chi}{(\chi+2)^2} \right) \rho d\rho + \int_{\rho_1}^\rho A_1 \ln \frac{1}{\rho} \rho d\rho \right] \\ &= -\frac{8\mu}{(1+\kappa)} \left[\frac{1}{\rho^2} \left\{ \left[\frac{(1+2\ln \frac{1}{\rho_1})}{(\chi+2)} - \frac{\chi}{(\chi+2)^2} \right] \frac{A_2 \rho_1^2}{2} - \frac{A_1 \rho_1^2}{4} (1+2\ln \frac{1}{\rho_1}) \right\} + \frac{A_1}{4} \left(1+2\ln \frac{1}{\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (4-34)$$

若材料#1 和#2 为同一种材料（此时 $\chi = 0$ ），式（4-33）可退化为：

$$\sigma_{rr}(\rho) = \sigma_{\theta\theta}(\rho) = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = -\frac{2\mu A_1}{(1+\kappa)} \left(1 + 2 \ln \frac{1}{\rho} \right) \quad (4-35)$$

该结果也可通过式（4-33）令 $\rho_1 \rightarrow 0$ 得到。同时需要指出的是，该解很难用其他现存的方法得到，包括 Eshelby 等效夹杂法，这也说明了等效特征应变原理在解决异性夹杂问题上的高效性与实用性。

4.4.2 纳米夹杂的特征应变模型

为描述纳米尺度下固体表面的张力，Gurtin 与 Murdoch^[40-41]提出了著名的薄膜类型的表面模型。Steigmann 和 Ogden^[42]进一步推广了该模型并考虑了挠曲阻力效应。在这些模型中，物体的表面被认为是厚度为 0 且承受无限大表面应力的边界，这些模型被广泛地应用在纳米夹杂问题之中。最近，Markenscoff 和 Dundurs^[43]提出了一种有限厚度的界面模型，该模型界面中分布着均匀的特征应变，利用该模型可以解释曲率效应并在表面产生有限的表面应力。

本章利用等效特征应变原理解决了圆形异性夹杂问题，下面将以圆形夹杂问题为基础建立一种简明的纳米夹杂模型。如图 4-6 所示，假定特征应变分布在材料#2 的内表面，其厚度为 h ，即：

$$\varepsilon_0^*(\rho) = \varepsilon_0^*, \quad (\rho_0 < \rho < \rho_1, \rho_0 = \rho_1 - h) \quad (4-36)$$

其中 h 可以理解为纳米尺度下边界效应或粘合层的厚度。

由式（4-21）知，等效后的特征应变 $\varepsilon_0(\rho)$ 满足：

$$\varepsilon_0(\rho) + \chi \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \varepsilon^*(\rho) = \varepsilon^* H(\rho - \rho_0), \quad (\rho < \rho_1) \quad (4-37)$$

其中： $H(\rho - \rho_0)$ 为 Heaviside 函数。当 $\rho < \rho_0$ 时其值为 0；当 $\rho > \rho_0$ 时其值为 1。

对上式进行求解可得：

$$\begin{cases} \varepsilon_0(\rho) = 0, & (\rho < \rho_0) \\ \varepsilon_0(\rho) = \frac{\varepsilon^*}{\rho^{2+\chi}} \left\{ \frac{2}{(2+\chi)} \rho^{2+\chi} + \frac{\chi}{(2+\chi)} \rho_0^{2+\chi} \right\}, & (\rho_0 < \rho < \rho_1) \end{cases} \quad (4-38)$$

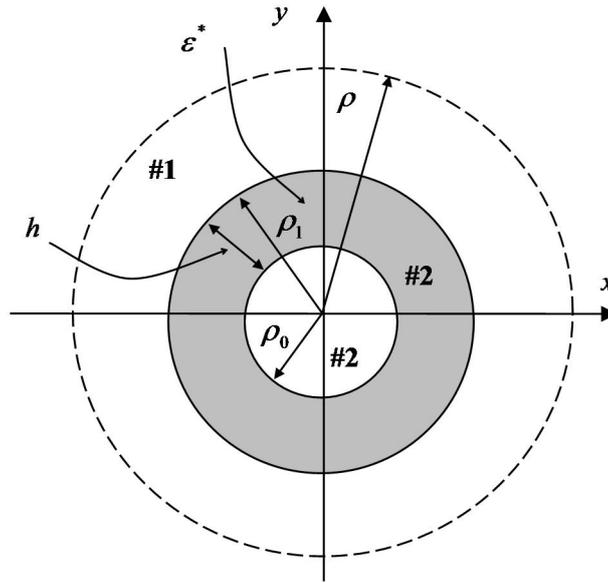


图 4-6 新型纳米夹杂模型

由此根据式 (4-11) 在夹杂区 ($\rho < \rho_1$) 内任意一点处的应力为:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{rr}(\rho) = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \begin{cases} 0, & (\rho < \rho_0) \\ -\frac{8\mu\varepsilon^*}{(1+\kappa)} \left[\frac{\rho^{2+\chi} - \rho_0^{2+\chi}}{(2+\chi)\rho^{2+\chi}} \right], & (\rho_0 < \rho < \rho_1) \end{cases} \quad (4-39)$$

再根据式 (4-5) 在基体 ($\rho > \rho_1$) 内任意一点处的应力为:

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} = \frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \frac{8\mu\varepsilon^*}{(1+\kappa)\rho^2} \left[\frac{\rho_1^{2+\chi} - \rho_0^{2+\chi}}{(2+\chi)\rho_1^\chi} \right] \quad (4-40)$$

从而可以看出参数 ρ_1 和 h 影响着夹杂区域内的应力分布, 因而可以说此处描述了宏观、微观以及纳米力学中的尺寸效应。该法亦可应用于纳米纤维增强复合材料中。下面讨论该问题的两种退化形式:

(1) 若材料 #1 和 #2 为同一种材料 (此时 $\chi = 0$), 即, 夹杂材料与基体材料相同, 此时式 (4-39) 与 (4-40) 退化为:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{rr}(\rho) = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \begin{cases} 0, & (\rho < \rho_0) \\ -\frac{4\mu\varepsilon^*}{(1+\kappa)} \left[\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2} \right], & (\rho_0 < \rho < \rho_1) \end{cases} \quad (4-41)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} = \frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho = \frac{4\mu\varepsilon^*}{(1+\kappa)} \left[\frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{\rho^2} \right], \quad \rho > \rho_1 \quad (4-42)$$

该退化形式给出了环形分布的特征应变夹杂问题的解。

(2) 令厚度 $h \rightarrow 0$ 且 $\varepsilon^* h \rightarrow \text{Const} = \varepsilon_s$, 则:

$$\sigma_{rr}(\rho) = \sigma_{\theta\theta}(\rho) = \begin{cases} 0 & , (\rho < \rho_1) \\ -\frac{8\mu\varepsilon_s}{(1+\kappa)\rho_1} & , (\rho = \rho_1) \end{cases} \quad (4-43)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} = \frac{8\mu\varepsilon_s\rho_1}{(1+\kappa)\rho^2}, \quad \rho > \rho_1 \quad (4-44)$$

该解即为与 Gurtin-Murdoch^[40-41]模型类似的薄膜模型, 该模型反映了界面尺寸效应。

4.5 本章小结

本章在第三章的基础上利用等效特征应变原理依次解决了无限大平面含非均匀对称特征应变圆形同性以及异性夹杂问题, 并得到了相应的解析解。通过解的退化可以看出, 当特征应变均匀分布时, 所得结果和 Eshelby 所得结果一致。该解析解在土木工程, 机械工程、材料微观力学、复合材料力学以及纳米夹杂问题中有着广泛的应用, 本章中利用所得解析解, 对两个具体的工程问题, 即异性夹杂中心处含点热源的热变形问题和纳米夹杂的特征应变问题, 进行了求解。

5 有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题

5.1 引言

上一章介绍了无限大平面含圆形异性夹杂问题，并给出了该问题的解析解，但在实际的工程应用中，往往基体区域的尺寸大小与夹杂区域尺寸的大小相比并不是无限大，因此基体边界的尺寸效应一般是不可忽略的。

在过去的 15 年里，一些学者对该问题进行了研究。如 Li 和 Wang^[44-45]重点研究了圆形基体中心含均匀分布特征应变的圆形同性夹杂问题，并给出了当基体外边界位移自由时的 Dirichlet-Eshelby 张量，以及当基体外边界应力自由时的 Neumann-Eshelby 张量；Liu^[46]研究了 2D 平面同性周期夹杂问题，并将结果表示成了柯西积分的形式；Mejak^[47]研究了对称分布在有限球形基体中的球形同性夹杂问题。但对有限平面异性夹杂问题的研究并不是很多。同时正如前一章所述，圆形夹杂问题在工程领域十分常见，且当夹杂区位于基体的中心、特征应变关于夹杂中心呈对称分布时，该问题有很好的对称性，正是基于这些原因，本章对含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题进行研究。如图 5-1 所示，基体的大小为 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ，边界自由，夹杂区域的大小为 $\rho < \rho_1$ ，该区域中分布有非均匀对称的特征应变。

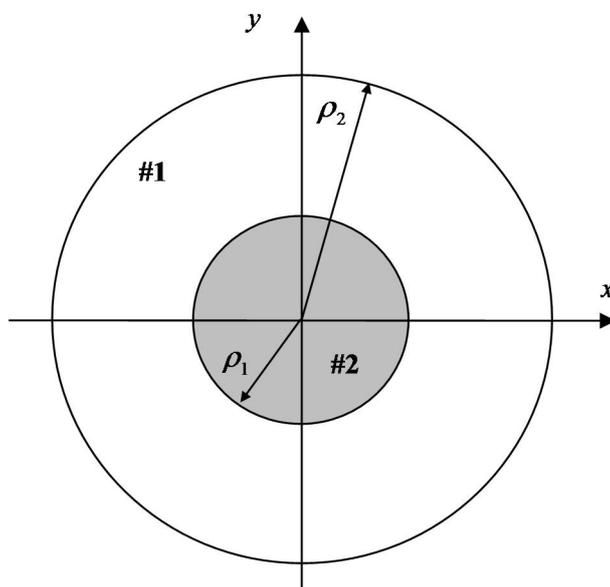


图 5-1 有限平面圆形异性夹杂问题

本章第 2 节首先给出有限平面含非均匀对称特征的圆形同性夹杂问题的解答；随后在第 3 节给出有限平面含非均匀对称特征的圆形异性夹杂问题的解答；第 4 节通过两个具体实例演示第 3 节中解的应用；最后在第 5 节得出结论。

5.2 有限平面含非均匀对称特征应变圆形同性夹杂问题解答

假定夹杂区域为 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_1$ ，其内分布有满足 $\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_0(\rho)$ ， $\varepsilon_{12}^0 = 0$ 的非均匀对称特征应变，基体区域 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ 内无特征应变，如图 5-2 (a) 所示。

由 3.3 节知，利用叠加原理上述问题可以分解为如下两个问题：如图 5-2 (b), (c) 所示，其中图 5-2 (b) 所示为一无限大平面含同性夹杂的问题，夹杂区域仍为 $\rho < \rho_1$ ，且夹杂区含有非均匀对称特征应变 ε_{ij}^0 ；图 5-2 (c) 所示为一个只含边界力 $-f_\rho$ 的一般弹性力学问题（由下文知 $-f_\theta = 0$ ，因此未在图中标出）；

下面首先来求 f_ρ 的值，由边界条件 (2-12) 可知，在 $\rho = \rho_2$ 边界上：

$$\begin{cases} f_\rho = \sigma_{rr}n_1 + \sigma_{r\theta}n_2 \\ f_\theta = \sigma_{r\theta}n_1 + \sigma_{\theta\theta}n_2 \end{cases} \quad (5-1)$$

式中 n_1 ， n_2 分别为边界单位外法线向量与圆轴向和环向的夹角余弦，即 $n_1 = 1$ ， $n_2 = 0$ 。

将 $n_1 = 1$ ， $n_2 = 0$ 以及式 (4-6) 求得的 $\rho = \rho_2$ 边界上的应力代入到式 (5-1)，有：

$$\begin{cases} f_\rho = -\frac{1}{\rho_2^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ f_\theta = 0 \end{cases} \quad (5-2)$$

需要指出的是，这里求得的 f_θ 的值和直接利用对称性所得的结果一致。

由式 (5.2) 知图 5-2 (c) 为均匀受压圆盘，根据弹性力学易知该问题的应力和应变分别为：

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{rr}(\rho) = \frac{1}{\rho_2^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \sigma_{r\theta}(\rho) = 0 \end{cases} \quad (5-3)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho) = \varepsilon_{rr}(\rho) = \frac{4}{(1+\kappa)\rho_2^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho) = 0 \end{cases} \quad (5-4)$$

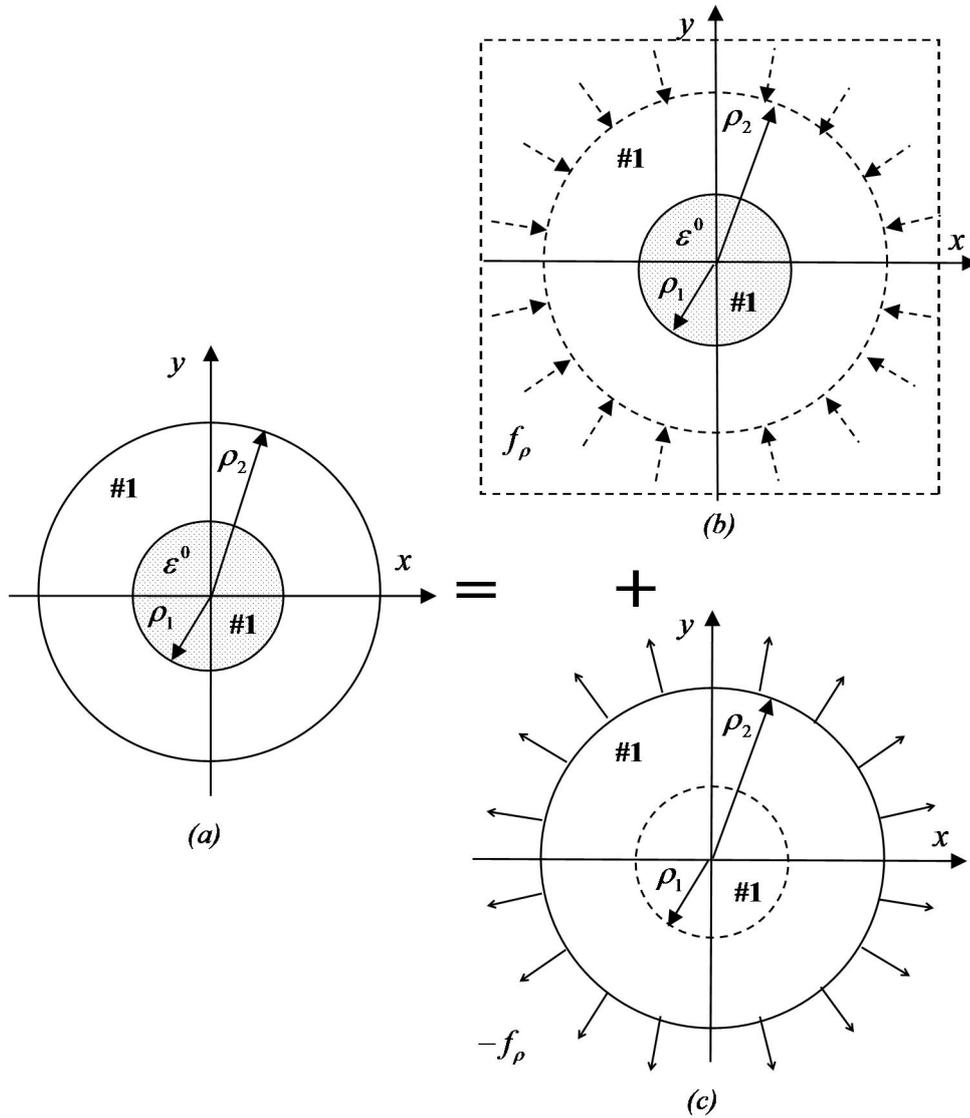


图 5-2 有限平面圆形同性夹杂问题

问题 (c) 得到了完全解答，而问题 (b) 的解由第 4.2 节可以得出，利用叠加法下面将分别给出问题 (a) 夹杂区域内外应变场和应力场。

5.2.1 夹杂区域外的应变场和应力场

利用式 (4-5)、(4-6)、(5-3) 与 (5-4)，可得，当 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ，其中 $\rho^2 = (x^2 + y^2)$ 时任意一点的应力和应变分别为：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(\rho) \\ \sigma_{rr}(\rho) \\ \sigma_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho_2^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0) \rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho) \\ \varepsilon_{rr}(\rho) \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \frac{4}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4\mu}{(\lambda+\mu)(1+\kappa)\rho_2^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho)\rho d\rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

5.2.2 夹杂区域内的总应变场和应力场

当 $\rho_1 < \rho < \rho_2$ 时, 利用式 (4-11)、(4-17)、(5-3) 与 (5-4), 任意一点的应力和总应变分别为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(\rho) \\ \sigma_{rr}(\rho) \\ \sigma_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = -\frac{8\mu}{(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho_2^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}(\rho) \\ \varepsilon_{rr}(\rho) \\ \varepsilon_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{\sigma_{rr}(\rho)}{2(\lambda+\mu)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0(\rho) \\ \varepsilon_0(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{4\mu}{(\lambda+\mu)(1+\kappa)\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{4\mu}{(\lambda+\mu)(1+\kappa)\rho_2^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho)\rho d\rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0(\rho) \\ \varepsilon_0(\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-8)$$

其中 \mathbf{C} 为基体材料#1 的弹性模量, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为一点处的弹性应变和应力。各个量的具体表达式见式 (4-13) 与 (4-16)。

特别地, 由式 (5-5)、(5-6)、(5-7) 与 (5-8) 可以看出, 当基体逐渐区域无限大时, 各式的第二项逐渐趋于 0, 所得的结果将退化为式 (4-5)、(4-6)、(4-11) 与 (4-17)。

由此得到了有限平面含非均匀对称特征应变圆形同性夹杂问题的解。下面将利用该解得到相应异性夹杂问题的解。

5.3 有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题解答

本节将研究含非均匀对称特征应变的圆形异性夹杂问题。如图 5-3 (a) 所示, 基体区域的材料为#1, 夹杂区域的材料为#2, 非均匀对称特征应变分布于夹杂区 $\rho < \rho_1$ 内, 基体 $\rho > \rho_1$ 内无特征应变。

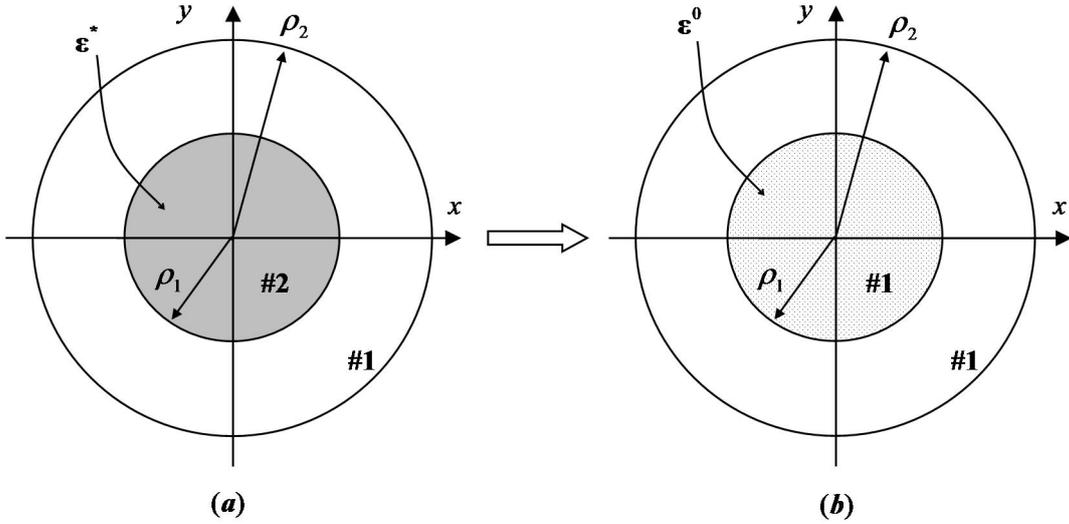


图 5-3 有限平面圆形异性夹杂问题的等效变换

由 3.4 节利用等效特征应变原理，可将异性夹杂问题 (a) 转变为相应的同性夹杂问题 (b)。根据式 (3-29)，可得等效后 (b) 中的特征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 满足：

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^0 = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^*)\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}^*\boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (\rho < \rho_1) \quad (5-9)$$

其中 \mathbf{C} ， \mathbf{C}^* 分别为基体和夹杂材料的弹性张量， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为总应变， $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 为特效后的特征应变， $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 为夹杂区的对称分布的特征应变，各个量的具体表达式见式 (4-19)，这里不再赘述。

由于 $\varepsilon_{ij}^*(\rho) = \delta_{ij}\varepsilon^*(\rho)$ 为对称分布，根据对称性可知，等效后的特征应变和总应变也须是对称分布的，即 $\varepsilon_{ij}^0(\rho) = \delta_{ij}\varepsilon_0(\rho)$ ， $\varepsilon_{ij}(\rho) = \delta_{ij}\varepsilon(\rho)$ 将其代入到式 (5-9)，得：

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\rho)(\lambda + \mu) &= \varepsilon^*(\rho)(\lambda_2 + \mu_2) \\ &+ [(\lambda - \lambda_2) + (\mu - \mu_2)] \left[\begin{aligned} &\varepsilon_0(\rho) + \frac{4\mu}{(\lambda + \mu)(1 + \kappa)\rho_2^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \\ & - \frac{4\mu}{(\lambda + \mu)(1 + \kappa)\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (5-10)$$

对上式进行化简得：

$$\varepsilon_0(\rho) + \chi \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0 + D = \varepsilon^*(\rho), \quad (\rho < \rho_1) \quad (5-11)$$

其中： $\chi = \frac{4\mu [(\lambda - \lambda_2) + (\mu - \mu_2)]}{(1 + \kappa)(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2)}$ ， $D = -\frac{\chi}{\rho_2^2} \int_0^{\rho_1} \varepsilon_0(\rho_0)\rho_0 d\rho_0$ 。

通过对式 (5-11) 求解, 得:

$$\varepsilon_0(\rho) = \frac{1}{\rho^{\lambda+2}} \left\{ \int \left[\rho^\lambda \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \varepsilon^*(\rho)) - 2D\rho^{\lambda+1} \right] d\rho + C \right\}, \quad (\rho < \rho_1) \quad (5-12)$$

将式 (5-12) 回带到式 (5-11) 即可确定常数 C 和 D 。

当 $\varepsilon^0(\rho)$ 确定后, 再利用 5.2 节式 (5-5)、(5-6)、(5-7) 与 (5-8) 即可得到夹杂区域内外任意一点处的应变和应力, 至此有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题得到了一般解答。

这里, 若基体区域趋于无穷大, 则 D 将趋于 0, 式 (5-12) 退化为 (4-22), 由此可以看出, 通过令基体区趋于无穷, 有限平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题的解即可退化为相应无限大平面异性夹杂问题的解, 这和第三章中的结论一致。

作为本章的结束, 下面将该解应用到实际的工程中, 进而说明该解如何使用并对所得结果的正确性起到验证作用。

5.4 应用: 厚壁圆筒的过盈配合问题

如图 5-4 所示, 内筒为实心圆筒, 材料为 #1, 半径为 $\rho_1 + \delta$; 外筒为空心圆筒, 材料为 #2, 内半径为 ρ_1 , 外半径为 ρ_2 , 将内筒和外筒进行装配, 则装配后的特征应变为:

$$\varepsilon^* = \frac{\delta}{\rho_1}, \quad \rho < \rho_1 \quad (5-13)$$

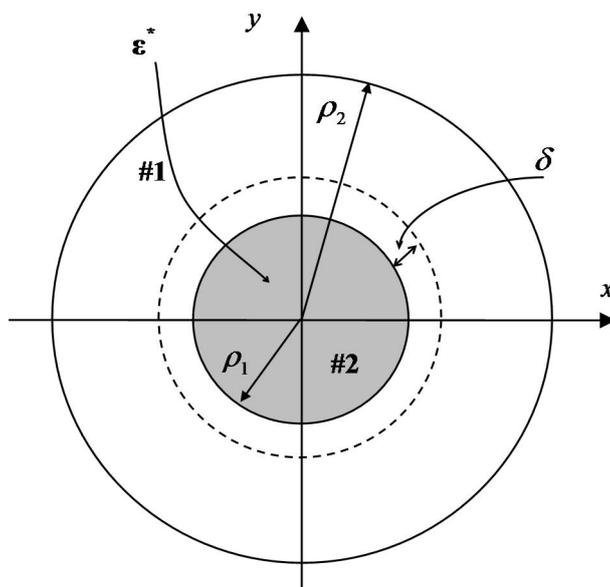


图 5-4 厚壁圆筒的过盈配合

由式 (5-11), 等效后的特征应变 $\varepsilon_0(\rho)$ 满足:

$$\varepsilon_0(\rho) + \chi \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \varepsilon_0(\rho) \rho d\rho + D = \varepsilon^*(\rho) = \frac{\delta}{\rho_1}, \quad (\rho < \rho_1) \quad (5-14)$$

通过对上式求解得:

$$\varepsilon_0(\rho) = \frac{2}{(\chi+2)(1+H)} \frac{\delta}{\rho_1}, \quad (\rho < \rho_1) \quad (5-15)$$

其中: $\chi = \frac{4\mu[(\lambda-\lambda_2)+(\mu-\mu_2)]}{(1+\kappa)(\lambda+\mu)(\lambda_2+\mu_2)}$, $H = -\frac{\chi}{\chi+2} \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}$ 。

因此根据式 (5-7) 在夹杂区 ($\rho < \rho_1$) 内任意一点处的应力为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(\rho) \\ \sigma_{rr}(\rho) \\ \sigma_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} - 1 \right) \frac{8\mu}{(1+\kappa)(\chi+2)(1+H)} \frac{\delta}{\rho_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

再根据式 (5-5) 在基体 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) 内任意一点处的应力为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}(\rho) \\ \sigma_{rr}(\rho) \\ \sigma_{r\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)(\chi+2)(1+H)} \frac{\delta}{\rho_1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \frac{8\mu}{(1+\kappa)(\chi+2)(1+H)} \frac{\delta}{\rho_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

将 $\kappa = 3 - 4\nu$ 代入式 (5-16) 或 (5-17) 可得过盈配合的接触应力为:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\delta}{\rho_1} \frac{2\mu}{(1-\nu)(\chi+2)(1+H)} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2^2} \quad (5-18)$$

负号代表接触应力为压应力, 将上式化简后, 得:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\delta}{\rho_1} \frac{EE_2(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{E(1-2\nu_2)(1+\nu_2)(\rho_2^2 - \rho_1^2) + E_2(1+\nu)\rho_2^2 + E_2(1-2\nu)(1+\nu)\rho_1^2} \quad (5-19)$$

式中: E , E_2 —— 外筒和内筒的弹性模量; ν , ν_2 —— 外筒和内筒的泊松比。

若该问题处于平面应力状态下, 即将 E 替换为 $E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$, ν 替换为 $\nu/(1+\nu)$, 则式 (5-19) 变为:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\delta}{\rho_1} \frac{EE_2(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{E(1-\nu_2)(\rho_2^2 - \rho_1^2) + E_2(1+\nu)\rho_2^2 + E_2(1-\nu)\rho_1^2} \quad (5-20)$$

该结果与经典弹性力学所得结果完全一致^[48]。

若材料#1 和#2 为同一种材料，式（5-20）可退化为：

$$\sigma_{rr} = -\frac{\delta}{\rho_1} \frac{E(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{2\rho_2^2} \quad (5-21)$$

5.5 本章小结

本章在前两章的基础上依次解决了有限平面含非均匀对称特征应变圆形同性以及异性夹杂问题，并得到了相应的解析解。该解通过退化后，可以得到无限大平面相应夹杂问题的解。最后利用所得解析解，对厚壁圆筒过盈配合问题进行了求解，所得结果和弹性力学经典解相同。

6 结论与展望

6.1 结论

本文利用等效特征应变原理和叠加原理,分别研究了无限大平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题、有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题以及有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题,所得结论归纳如下:

(1) 利用等效特征应变原理,将无限大平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题转化为无限大平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题,从同性夹杂问题的一般解给出了该异性夹杂问题的一般解;

(2) 应用叠加原理将有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题分解为无限大平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题和一个带边界条件的一般弹性力学问题,并证明了该分解的正确性,根据无限大平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题的一般解,给出了有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题的一般解;

(3) 利用等效特征应变原理,将有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题转换为有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题,根据有限平面含任意形状任意特征应变的同性夹杂问题的一般解得到了有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题的一般解;

(4) 在无限大平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题一般解的基础上,进一步地针对无限大平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题进行了研究,并给出了该问题的解析解,从所得结果可以看出,当该对称特征应变退化为均匀分布的特征应变时,退化后所得结果和 Eshelby 所得结果一致;

(5) 使用有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题的一般解,求解了有限平面非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题,并给出了该问题的解析解,而后使用该解析解研究了厚壁圆筒的过盈配合问题,从所得结果可以看出,该结果和经典弹性力学所求结果一致。

6.2 展望

在以上研究的基础上,结合本文的结果,进一步研究工作可从以下几个方面展开:

(1) 本文给出了无限大平面、有限平面含任意形状任意特征应变的异性夹杂问题的一般解,并使用该一般解得到了无限大平面、有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题的解析解,为了得到其他问题的解析解,可考虑椭圆形异性夹杂问题以及线型异性夹杂问题;

(2) 在求解无限大平面、有限平面含非均匀对称特征应变圆形异性夹杂问题时,巧妙的使用了对称性,从而得到了该问题的解析解,而对更一般的夹杂形状,则无此

性质，进一步的可利用数值解法来求解更一般形状的夹杂问题。

(3) 本文所研究的夹杂问题均为二维夹杂问题，可据此进一步地对三维夹杂问题进行研究。

致 谢

本文是在导师马利锋教授的悉心指导下完成的，在我的学业和论文研究中无不倾注着导师辛勤的心血和汗水，在此，谨向导师致以衷心感谢！感谢导师在选题和研究中给予的学术指导、精神上的鼓励和物质上的帮助。我从导师渊博的学识、深邃的学术思想、严谨的治学态度和勤奋求实的科学精神以及正直的品德中受益匪浅，在尊敬的导师身上，我不仅学到了扎实的专业知识，也学会了做人的道理这段学习经历将会成为我人生的宝贵财富。在本文完成之际，对导师多年的培育和关怀再次致以深深的感谢！

同时感谢文毅老师，赵晶师姐、胡勤伟师兄、邱一可师妹、施江吉、张永梅、袁延延等好友给予我的帮助；感谢我的舍友对我作息上的照顾和包容；感谢硕 3037 班的同学对我的关心和支持；感谢我的朋友们所给予我的温暖！

特别感谢父母、姐姐和姐夫等亲人给予我的理解和鼓励！

最后，谨向百忙之中抽出宝贵时间评审本论文和参加答辩的各位老师致以诚挚的谢意！

参考文献

- [1] Mura T. Micromechanics of Defects in Solids[M]. Second ed. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1987.
- [2] Eshelby JD. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1957, 241 (1226): 376-396.
- [3] Eshelby JD. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1959, 252 (1271): 561-569.
- [4] Zhou K, Gesin JH, Xu W, et al. A review of recent works on inclusions[J]. Mechanics of Materials, 2013, 60 (7): 144-158.
- [5] 蒋永秋, 陆逢升, 顾志建. 复合材料力学[M]. 西安: 西安交通大学, 2007: 1-8.
- [6] Withers P, Bhadeshia H. Residual stress. Part 1-measurement techniques[J]. Materials Science and Technology, 2001, 17(4): 355-365.
- [7] 濮良贵, 纪名刚. 机械设计[M]. 第七版. 北京: 高等教育出版社, 2001: 126-130.
- [8] Willis JR. Variational and related methods for the overall properties of composites[J]. Advances in Applied Mechanics, 1981, 21: 1-78.
- [9] Christensen RM, Lo KH. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1979, 27 (4): 315-330.
- [10] Jaswon MA, Bhargava RD. Two-dimensional elastic inclusion problems[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1961, 57 (3): 669-680.
- [11] Deng W, Meguid SA. Closed form solutions for partially debonded circular inclusion in piezoelectric materials[J]. Acta Mechanica, 1999, 137 (3): 167-181.
- [12] Schmid DW, Podladchikov YY. Analytical solutions for deformable elliptical inclusions in general shear[J]. Geophysical Journal International, 2003, 155 (1): 269-288.
- [13] Pan E. Eshelby problem of polygonal inclusions in anisotropic piezoelectric full- and half-planes[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2004, 52 (3): 567-589.
- [14] Chiu YP. On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space[J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 1977, 44 (4): 587-590.
- [15] Wu LZ, Du SY. The elastic field caused by a circular cylindrical inclusion[J]. Journal of Applied Mechanics, 1995, 62 (3): 579-584.
- [16] Wu LZ, Du SY. The elastic field with a hemispherical inclusion[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1999, 455 (1983): 879-891.
- [17] Onaka S. Strain fields caused by doughnut-like and tubular inclusions with uniform eigenstrains[J]. Mechanics Research Communications, 2005, 32 (3): 316-322.
- [18] Kuvshinov BN. Elastic and piezoelectric fields due to polyhedral inclusions[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45 (5): 1352-1384.
- [19] Waldvogel J. The Newtonian potential of homogeneous polyhedra[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 1979, 30 (2): 388-398.
- [20] Rodin, GJ. Eshelby's inclusion problem for polygons and polyhedra[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1996, 44 (12): 1977-1995.
- [21] Sharma P, Ganti S. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies[J]. Journal of Applied Mechanics, 2004, 72 (4): 663-671.
- [22] 肖俊华, 徐耀玲. 纳米夹杂复合材料的有效反平面剪切模量研究[J]. 固体力学学报, 2011, 32 (3): 287-291.

- [23] Makeev MA, Madhukar A. Stress and strain fields from an array of spherical inclusions in semi-infinite elastic media[J]. Ge nanoinclusions in Si, *Physical Review B*, 2003, 67 (7): 073201.
- [24] Zheng QS, Zhao ZH, Du DX. Irreducible structure, symmetry and average of Eshelby's tensor fields in isotropic elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, 54 (2): 368-383.
- [25] Zou WN, He QC, Huang MJ, Zheng QS. Eshelby's problem of non-elliptical inclusions[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, 58 (3): 346-372.
- [26] Ma LF, Korsunsky AM. The principle of equivalent eigenstrain for inhomogeneous inclusion problems[J]. *International Journal of Solids Structures*, 2014, 51 (25-26): 4477-4484.
- [27] Kinoshita N, Mura T. Eigenstrain problems in a finite elastic body[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1984, 44 (3): 524-535.
- [28] Ru CQ. Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-planes[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 1999, 66 (2): 315-321.
- [29] Li S, Sauer RA, Wang G. The Eshelby tensors in a finite spherical domain-Part I: Theoretical formulations[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 2007a, 74 (4): 770-783.
- [30] Li S, Wang G, Sauer RA. The Eshelby tensors in a finite spherical domain-Part II: Applications to homogenization[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 2007b, 74 (4): 784-797.
- [31] Luo HA, Weng GJ. On Eshelby's inclusion problem in a threephase spherically concentric solid, and a modification of Mori-Tanaka's method[J]. *Mechanics of Materials*, 1987, 6 (4): 347-361.
- [32] Zou WN, He QC, Zheng QS. Inclusions in a finite elastic body[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49 (13): 1627-1636.
- [33] Muskhelishvili NI, Radok JRM. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity[M]. England: Cambridge University Press, 1953.
- [34] Ma LF. Fundamental formulation for transformation toughening[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47 (22-23): 3214-3220.
- [35] Ma LF, Wang B, Korsunsky AM. Plane deformation of circular inhomogeneous inclusion problems with non-uniform symmetrical dilatational eigenstrain[J]. *Materials and Design*, 2015, 86: 809-817.
- [36] Rahman M. The isotropic ellipsoidal inclusion with a polynomial distribution of eigenstrain[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 2002, 69 (5): 593-601.
- [37] Sharma P, Sharma R. On the Eshelby's inclusion problem for ellipsoids with nonuniform dilatational Gaussian and exponential eigenstrains[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 2003, 70 (3): 418-425.
- [38] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 54-67.
- [39] Yoshikawa K, Hasebe N. Green's function for a heat source in an infinite region with an arbitrary shaped hole[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 1999, 66 (1): 204-210.
- [40] Gurtin ME, Murdoch AI. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, 57 (4): 291-323.
- [41] Gurtin ME, Murdoch AI. Surface stress in solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, 14 (6): 431-440.
- [42] Steigmann DJ, Ogden RW. Elastic surface-substrate interactions[J]. *Proceedings of the Royal Society*, 1999, 455 (1982): 437-474.
- [43] Markenscoff X, Dundurs J. Annular inhomogeneities with eigenstrain and interphase modeling[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, 64 (1): 468-482.
- [44] Li S, Sauer R, Wang G. Circular inclusion in a finite elastic domain I. The Dirichlet-Eshelby tensor[J]. *Acta Mechanica*, 2005, 179 (1): 67-90.
- [45] Wang G, Li S, Sauer R. Circular inclusion in a finite elastic domain II. The Neumann-Eshelby problem[J]. *Acta Mechanica*, 2005, 179 (1): 91-110.
- [46] Liu LP. Solutions to the periodic Eshelby inclusion problem in two dimensions[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2010, 15 (5): 557-590.

- [47] Mejak G. Eshelby tensors for a finite spherical domain with an axisymmetric inclusion[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2011, 30 (4): 477-490.
- [48] 王子昆, 黄上恒. 弹性力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1994: 144-198.

攻读学位期间取得的研究成果

- [1] Ma LF, Wang B, Korsunsky AM. Plane deformation of circular inhomogeneous inclusion problems with non-uniform symmetrical dilatational eigenstrain[J]. *Materials and Design*, 2015, 86: 809-817.

