信息论与编码

第6章 保真度准则下的信源编码

张建国

主要内容与基本要求

- 主要内容
  - 失真度与平均失真度；
  - 信息率失真函数及其性质；
  - 信息率失真函数的计算；
  - 保真度准则下的信源编码定理。
- 基本要求

本章目录

6.1 引言

前两章分别讨论了无失真信源编码和有噪信道编码定理。总的来说，无论是理想的无噪信道还是有噪信道，只要信息率小于信道容量，总能找到一种编码，从而以任意小的错误概率，任意接近信道容量的传输率在信道上传送信息。

无失真信源编码： $\frac{L[H(U)+\delta]}{N} \le \log D,\ L\to\infty,\ P_e\to 0$

无失真信道编码： $\frac{LH(U)}{N} \le C,\ N\to\infty,\ P_e\to 0$

反之，如果信息传输率大于信道容量，就不存在能实现无失真传输的编码。如连续信源的绝对熵为无穷大，因此无法实现无失真传输。

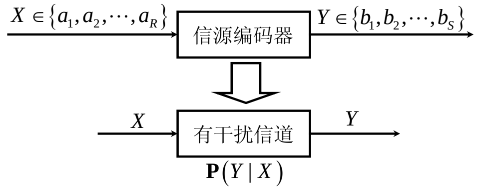
幸运的是，实际的信息处理过程往往允许存在一定的失真，允许失真可以降低对系统信息率要求，提高传输效率。（如人的感官系统）

6.1 引言

然而，什么是允许的失真？如何对失真进行描述？在允许一定程度失真的条件下，能够把信源信息压缩到什么程度？信息率失真理论回答了这些问题，论述了在限失真范围内的信源编码问题。信息率失真理论是量化、数模转换、频带压缩和数据压缩等现代通信技术的理论基础。

基本的研究方法：把有失真的信源编码器看作有干扰的信道，信道的输入为信源的输出，输出即为编码后的有失真的输出符号。

在所有满足失真要求的信道中，寻找输出信息率最小的。



6.2 失真度与平均失真度

失真测度是信息率失真理论的基础。

6.2.1 失真度

定义（失真度）：设某信源X的符号取自集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_R\}$，经过信源编码器，输出$Y$的符号构成集合$\{b_1, b_2, \cdots, b_S\}$。对应于每一对输入输出$(a_i, b_j)$，定义一个非负实值函数

$$d(a_i, b_j) \geq 0 \quad i = 1, \cdots, R; \quad j = 1, \cdots, S$$

衡量信源符号a_i编码为符号b_j所引起的误差或失真，称之为(a_i, b_j)间的失真度，或称**失真函数**。

失真函数的值可人为地规定。较小的值代表较小的失真，$d(a_i, b_j) = 0$表示没有失真。如一般失真函数可以定义如下：

$$d(a_i, b_j) = \begin{cases} 0, & a_i = b_j \\ \alpha_{ij}, & \alpha_{ij} > 0, a_i \neq b_j \end{cases}$$

6.2 失真度与平均失真度

失真矩阵

设编码器共有R个输入符号和S个输出符号。将所有可能的$R \times S$失真函数排成如下的矩阵形式：

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d(a_1, b_1) & d(a_1, b_2) & \cdots & d(a_1, b_S) \\ d(a_2, b_1) & d(a_2, b_2) & \cdots & d(a_2, b_S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(a_R, b_1) & d(a_R, b_2) & \cdots & d(a_R, b_S) \end{bmatrix}$$

称之为失真矩阵。

若失真矩阵的每一行都是同一集合A中各元素的不同排列，且每一列也都是同一集合B中各元素的不同排列，则失真矩阵具有对称性。以这种具有对称性的失真矩阵来度量失真的信源称为**失真对称信源**。

6.2 失真度与平均失真度

例6.1 离散信源$R = S$，当编码器的输出符号与输入符号相同时，认为没有失真，失真度为0；而当输出符号与输入符号不同时，就存在失真，且具有相同的失真度。因此失真函数可定义为：

$$d(a_i, b_j) = \begin{cases} 0, & a_i = b_j \\ 1, & a_i \neq b_j \end{cases}$$

这种失真常称为**汉明失真**。

汉明失真矩阵为方阵，其对角线元素为0，非对角线元素为1。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特别地，当 $R = 2$时，失真矩阵为：$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6.2 失真度与平均失真度

例6.2 删除信源。输入符号 R个，输出符号 $S=R+1$个。若输出符号与输入符号相同，无失真；若输出符号与输入符号不同且不是 b_{R+1}，则为有失真；如果输出符号为 b_{R+1}，则为有失真，但其影响只是其他失真情况的一半。因此，失真函数可以定义为：

$$d(a_i,b_j)=\begin{cases}0, & j=i\\ 1, & j\neq i, j\neq R+1\\ 1/2, & j=R+1\end{cases}$$

失真矩阵为：

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

当 $R=2$ 时，为二元删除信源

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1/2\\ 1 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

6.2 失真度与平均失真度

例6.3 平方误差失真。输入输出符号数 $R=S$，当编码器的输出符号与输入符号相同时，认为没有失真，失真度为0；而当输出符号与输入符号不同时，就存在失真，失真的严重程度用输入输出符号差的平方来度量。因此失真函数定义为：$d(a_i,b_j)=(a_i-b_j)^2$。失真矩阵为：

$$\mathbf{D}=\begin{Bmatrix}(a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & \cdots & (a_1-b_R)^2\\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & \cdots & (a_2-b_R)^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_R-b_1)^2 & (a_R-b_2)^2 & \cdots & (a_R-b_R)^2\end{Bmatrix}$$

如：$R=3$，$X\in\{0,1,2\}$，$Y\in\{0,1,2\}$，则失真矩阵为：

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

6.2 失真度与平均失真度

从以上例子可以看出：

失真函数 $d(a_i,b_j)$ 是**人为规定**的，给出其规定时应该考虑解决问题的需要以及失真可能引起的损失、风险或者主观感觉上的差别等因素。

常用的失真函数还有以下几种。

绝对失真：　$d(a_i,b_j)=|a_i-b_j|$

相对失真：　$d(a_i,b_j)=|a_i-b_j|/|a_i|$

通常，选择一个合适的、与主观特性匹配且数学上易于处理的失真函数是非常困难的。

6.2.2 平均失真度

输入输出符号是随机的，因此单符号失真函数 $d(a_i,b_j)$也是一个随机变量，它出现的概率为$P(a_i,b_j)$。

6.2 失真度与平均失真度

对所有可能编码符号组合求平均，即为信源在该编码器下的**平均失真度**，通常用其表示整个信源的失真大小。

$$\bar{D}=\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{S}P(a_i,b_j)d(a_i,b_j)$$

用$P(a_i)$表示信源符号a_i出现的概率，$P(b_j|a_i)$表示编码器将a_i编码为b_j的概率。因此，平均失真度可表示为：

$$\bar{D}=\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{S}P(a_i,b_j)d(a_i,b_j)=\sum_i\sum_j P(a_i)P(b_j|a_i)d(a_i,b_j)$$

平均失真度是对给定信源分布$\{P(a_i)\}$经过某一种符号转移概率分布为$\{P(b_j|a_i)\}$的有失真编码器后所产生的失真的总体量度。

以上定义可以推广到 N次扩展信源的情况。

可以证明：离散无记忆平稳信源X的N次扩展信源通过无记忆编码器编码后的平均失真度 $\bar{D}(N)$，是单符号平均失真度的N倍，即：

$$\bar{D}(N)=N\bar{D}$$

6.3 信息率失真函数及其性质

6.3.1 保真度准则与D失真许可的试验信道

定义（保真度准则）：通常要求由编码器引起的平均失真不能超过某一给定的限定值D，即要求$\bar{D}\le D$。称这种对失真的限制条件为保真度准则。

平均失真度与信源的统计特性、失真度以及编码器的特性有关。在实际分析中通常只关心某一方面的影响，此时可假设其它参数固定不变。

比如，在给定信源的概率分布及失真函数$d\left(a_i,b_j\right)$条件下，可以研究如何选择适当的编码器，从而使平均失真度满足保真度准则。

如前所述，我们可以将有失真信源编码器假想为一个有干扰的信道，这样就可以用分析信道传输的方法来研究限失真信源编码问题。此时，选择满足失真条件的编码器的问题就转化为一个信道选择问题。

将满足保真度准则的试验信道称为D**失真许可的试验信道**。

6.3 信息率失真函数及其性质

把所有D失真许可的试验信道组成一个集合，用B_D表示，即：

$$B_D=\left\{P\left(b_j\mid a_i\right):\bar{D}\le D\right\}$$

6.3.2 信息率失真函数

对给定的信源及失真函数，人们总希望在满足一定失真要求的情况下，使信源传给信宿的信息传输率尽可能的小。即在满足保真度准则的情况下，寻找信源必须传给信宿的信息率的下限。

从接收端来看，就是在满足保真度准则的情况下，寻找再现信源消息所必须获得的最低平均信息量。而接收端获得的平均信息量即为通过信道的平均互信息。因此，上述问题就转化为寻找满足保真度准则且平均互信息最小的试验信道，即在集合B_D中寻找平均互信息最小的信道。由于平均互信息是前向转移概率分布的下凸函数，所以该最小值存在。

6.3 信息率失真函数及其性质

将上述满足保真度准则时信源所必须传输的最小平均互信息量称为**信息率失真函数**，简称**率失真函数**。

$$R(D)=\min_{P\left(b_j|a_i\right)\in B_D}\left\{I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\right\}=\min_{\bar{D}\le D} I(\mathbf{X};\mathbf{Y})$$

可证明，对离散无记忆平稳信源的N次扩展编码，有$R_N(D)=NR(D)$

信息率失真函数的物理意义：对给定信源，在满足一定失真度要求的条件下，信息率可以压缩到的最小值（信源必须输出的最小信息率）。

信息传输速率本质上是描述信源特性的，因此$R(D)$也应该是仅仅用于描述信源。

若信源消息经无失真编码后的信息传输速率为R，而在保真度准则下信源编码输出的信息率为$R(D)$，且$R(D)<R$。这说明在保真度准则条件下的信源编码与无失真情况相比得到了压缩。

率失真函数仅取决于信源特性和保真度要求，与信道特性无关。

6.3 信息率失真函数及其性质

信息率失真函数与信道容量的比较

	信道容量C	率失真函数R(D)
研究对象	信道	信源
给定条件	信道转移概率 $\left\{P\left(b_j\mid a_i\right)\right\}$	信源分布 $\left\{P\left(a_i\right)\right\}$
选择参数	信源分布 $\left\{P\left(a_i\right)\right\}$	编码器映射关系 $\left\{P\left(b_j\mid a_i\right)\right\}$
结论	$C=\max_{P(a_i)}\left\{I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\right\}$	$R(D)=\min_{P\left(b_j\|a_i\right)\in B_D}\left\{I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\right\}$
$I(X;Y)=H(X)-H(X\mid Y)$	噪声干扰消失的信息量 $H(X\mid Y)$	压缩损失的信息量 $H(X\mid Y)$

6.3 信息率失真函数及其性质

信道容量表示信道的最大传输能力，反映的是信道本身的特性，应该与信源无关。但平均互信息量与信源的特性有关，为排除信源特性对信道容量的影响，在所有的信源中以那个能够使平均互信息量达到最大的信源为参考，从而使信道容量仅与信道特性有关，信道不同，C亦不同。

信息率失真函数描述信源本身的可压缩特性，它应该与信道无关。因此用所有可行信道中能够使平均互信息量达到最小的信道为参考，从而使信息率失真函数仅与信源特性有关，信源不同，率失真函数亦不同。

信道容量给出了信道可能传输的最大信息量，是无差错传输的上限。**引入信道容量的目的是为信道编码服务，即为提高通信的可靠性服务。**

率失真函数给出了保真度条件下信源信息率可被压缩的最低限度。**引入率失真函数是为信源的压缩编码服务，或者说是为提高通信的有效性服务。**

6.3 信息率失真函数及其性质

6.3.3 信息率失真函数的性质

从直观感觉可知，若允许的失真越大，所需的信息传输速率越小。下面讨论率失真函数的一些基本性质。

1. **率失真函数$R(D)$的定义域$(0, D_{\max})$**

(1) $D_{\min}$ 和 $R(D_{\min})$

给定信源$[X, P(a_i)]$及失真矩阵$\mathbf{D}$，信源的平均失真度为

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{R} \sum_{j=1}^{S} P(a_i, b_j) d(a_i, b_j)$$

由于失真函数是非负实函数，所以平均失真度的理论下限是零。

实际信源的最小平均失真度为：

$$\bar{D}_{\min} = \min\left[\sum_i \sum_j P(a_i) P(b_j \mid a_i) d(a_i, b_j)\right]$$

$$= \sum_i P(a_i) \min\left[\sum_j P(b_j \mid a_i) d(a_i, b_j)\right]$$

6.3 信息率失真函数及其性质

显然，若选择试验信道使得对每一个符号平均编码失真达到最小，总的平均失真度也达到最小值。对某个固定的符号，它编码为不同输出的失真函数组成失真矩阵的某一行，其中必有一个或多个相等的最小值，用$\min_j d(a_i, b_j)$表示。失真矩阵某一行中所有等于最小失真的列的下标构成集合 $J = \left\{ j : d(a_i, b_j) = \min_j d(a_i, b_j) \right\}$。

如果按如下方式选择试验信道，

$$\begin{cases} \sum_{j \in J} P(b_j \mid a_i) = 1 \\ P(b_j \mid a_i) = 0 \qquad j \notin J \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, R$$

可得信源的最小平均失真度为：

$$\bar{D}_{\min} = \sum_{i=1}^{R} p(a_i) \cdot \left[\min_j d(a_i, b_j)\right]$$

6.3 信息率失真函数及其性质

实际的允许失真度是否能达到零，与单个符号的失真函数有关。**只有当失真矩阵中每行至少有一个零元素时，信源的平均失真度才能达到零。**此时$D_{\min} = 0$ 。

为满足保真度准则$\bar{D} = D_{\min} = 0$，试验信道$H(X \mid Y) = 0$，所以，通过试验信道的平均互信息量为

$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y) = H(X)$$

即：为满足保真度准则，信宿Y必须从信源X获得的信息量，等于信源X的信息熵$H(X)$。那么，信源X必须输出的最小信息率，即信源X的信息率失真函数为

$$R(D_{\min}) = R(0) = H(X)$$

上式是否成立与失真矩阵的形式有关。**只有当失真矩阵中每行至少有一个零，且每列最多只有一个零时，上式才成立。**

6.3 信息率失真函数及其性质

例6.4 删除信源 $X:\{0,1\}$，试验信道输出 $Y:\{0,1,2\}$，失真矩阵为

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1/2\\ 1 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

求最小允许失真度 $D_{\min}$，满足最小失真度的试验信道，及 $R(D_{\min})$。

解：最小允许失真度

$$D_{\min}=\sum_{i=1}^{2}p(a_i)\cdot\left[\min_j d\left(a_i,b_j\right)\right]=\sum_{i=1}^{2}P(a_i)\cdot 0=0$$

按前述达到最小平均失真度的试验信道的选择方法，可得信道矩阵：

$$\mathbf{P}(y\,|\,x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

显然，这是一个理想信道，　$I(X;Y)=H(X)$

因此，$R(D_{\min})=R(0)=H(X)$　　　#

6.3 信息率失真函数及其性质

例6.5 信源 $\begin{pmatrix}X\\ P(x)\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{Bmatrix}$　信宿 $Y:\{0,1\}$，失真矩阵 $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

求最小允许失真度 $D_{\min}$，满足最小失真度的试验信道，及 $R(D_{\min})$。

解：最小允许失真度

$$D_{\min}=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{1}{6}$$

满足最小失真度的试验信道应该满足如下条件：

$$\begin{cases}p(0\,|\,0)=1\\ p(0\,|\,2)+p(1\,|\,2)=1\\ p(1\,|\,1)=1\end{cases}$$

满足上述条件的信道有无穷多个，$\mathbf{P}(y\,|\,x)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$0<p<1$

6.3 信息率失真函数及其性质

联合概率矩阵

$$\mathbf{P}(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ \frac{p}{3} & \frac{1-p}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

信宿概率分布

$$P(b_1)=\frac{1+p}{3}\qquad P(b_2)=\frac{2-p}{3}$$

$$\mathbf{P}(y\,|\,x)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

互信息熵

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y\,|\,X)$$

$$=\frac{1+p}{3}\log\frac{3}{1+p}+\frac{2-p}{3}\log\frac{3}{2-p}-\left(\frac{p}{3}\log\frac{1}{p}+\frac{1-p}{3}\log\frac{1}{1-p}\right)$$

易求得，当 $p=1/2$ 时，互信息熵取最小值。所以：

$$R(D_{\min})=I(X;Y)\big|_{p=1/2}=\log 2-\frac{1}{3}\log 2=\frac{2}{3}\log 2<\log 3=H(X)$$　#

6.3 信息率失真函数及其性质

（2）$D_{\max}$ 和 $R(D_{\max})$

根据定义，率失真函数是所有满足保真度准则的信道能传输的平均互信息的最小值。又平均互信息具有非负性，其下限值为零。因此率失真函数也是非负的，下限值也为零。

把能使平均互信息量 $I(X;Y)=0$ 的最小平均失真度定义为最大允许的失真度 $D_{\max}$。

当平均互信息量等于零时，信道的输入随机变量和输出随机变量之间一定统计独立，即有

$$P(b_j\,|\,a_i)=P(b_j),\quad j=1,2,\cdots,S$$

根据平均失真度的定义，在此情况下的最小值为：

$$\overline{D}_{\min}'=\min_{p(b_j/a_i)}\left\{\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{S}p(a_i)p(b_j/a_i)d(a_i,b_j)\right\}=\min_{p(b_j)}\left\{\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{S}p(a_i)p(b_j)d(a_i,b_j)\right\}$$

6.3 信息率失真函数及其性质

$$=\min_{p(b_j)}\left\{\sum_{j=1}^{S}p(b_j)\sum_{i=1}^{R}p(a_i)d(a_i,b_j)\right\}$$

显然，$\sum_i P(a_i)d(a_i,b_j)>0,\ \forall j$，这些值总有一个或多个最小值，设所有取最小值的下标组成集合J。选择$P(b_j)$，使得$\sum_J P(b_j)=1$，而其余$P(b_j)=0$，则上式取得最小值，此即为最大允许的失真度：

$$D_{\max}=\bar{D}'_{\min}=\min_j\left\{\sum_{i=1}^{R}p(a_i)d(a_i,b_j)\right\}$$

可见，最大允许的失真度由信源的概率分布和规定的失真函数确定。

此时，率失真函数

$$R(D_{\max})=I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(Y)-H(Y)=0$$

当允许的失真度超过最大允许失真度时，信源不需输出任何信息。

综上，一般情况下，$R(D)$的定义域为$(0,D_{\max})$。

当$D_{\min}<D<D_{\max}$时，$H(X)>R(D)>0$。

6.3 信息率失真函数及其性质

2. 率失真函数是允许失真度的下凸函数

在允许失真度的定义域内任选D_1、D_2，$\theta,\bar{\theta}\geq 0$且$\theta+\bar{\theta}=1$。证明：

$$R(\theta D_1+\bar{\theta}D_2)\leq\theta R(D_1)+\bar{\theta}R(D_2)$$

证明：对某信源$[X,P(x)]$和失真函数$d(a_i,b_j)$，设信道$P_1(b_j|a_i)$与$P_2(b_j|a_i)$的信息率分别达到$R(D_1)$和$R(D_2)$，用Y_1与Y_2分别表示这两个信道的输出。则

$$R(D_1)=I(X;Y_1);\quad \bar{D}_1=\sum_i\sum_j P(a_i)P_1(b_j|a_i)d(a_i,b_j)$$
$$R(D_2)=I(X;Y_2);\quad \bar{D}_2=\sum_i\sum_j P(a_i)P_2(b_j|a_i)d(a_i,b_j)$$

构造一个新的试验信道：

$$P(b_j|a_i)=\theta P_1(b_j|a_i)+\bar{\theta}P_2(b_j|a_i)$$

该信道的平均失真度为：

$$\bar{D}=\sum_i\sum_j P(a_i)P(b_j|a_i)d(a_i,b_j)$$

6.3 信息率失真函数及其性质

$$=\sum_i\sum_j P(a_i)\left[\theta P_1(b_j|a_i)+\bar{\theta}P_2(b_j|a_i)\right]d(a_i,b_j)$$
$$=\theta\sum_i\sum_j P(a_i)P_1(b_j|a_i)d(a_i,b_j)+\bar{\theta}\sum_i\sum_j P(a_i)P_2(b_j|a_i)d(a_i,b_j)$$
$$=\theta\bar{D}_1+\bar{\theta}\bar{D}_2$$

因此该信道属于$\theta D_1+\bar{\theta}D_2$许可的试验信道集合。设该信道的输出为$Y$，信源通过该信道的互信息熵为$I(X,Y)$，则有

$$I(X;Y)\geq R(\theta D_1+\bar{\theta}D_2)$$

由于互信息熵是信道转移概率的下凸函数，所以有

$$I(X;Y)\leq\theta I(X;Y_1)+\bar{\theta}I(X;Y_2)=\theta R(D_1)+\bar{\theta}R(D_2)$$

以上两式结合，可得：

$$R(\theta D_1+\bar{\theta}D_2)\leq\theta R(D_1)+\bar{\theta}R(D_2)\qquad \text{得证 \#}$$

6.3 信息率失真函数及其性质

3. 率失真函数是严格递减的连续函数

下凸性意味着率失真函数是连续的，率失真函数的连续性可以通过互信息熵是信道转移概率的连续函数来证明。

率失真函数是非增的。因为若$D_2>D_1$，则$B_{D_2}\supset B_{D_1}$。

可以利用它的下凸性证明它是严格递减的。

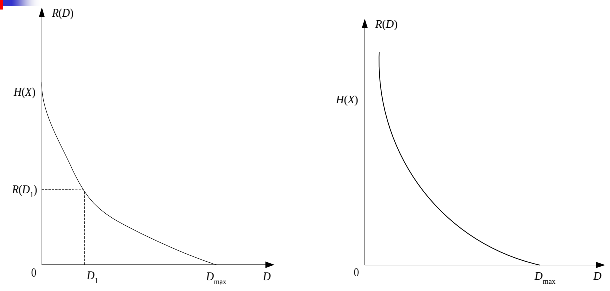
综上所述，可以得出如下结论：

（1）$R(D)$是非负的实数，即$R(D)\geq 0$。其定义域为$(0,D_{\max})$，值域为$(0,H(X))$。

（2）$R(D)$是关于D的下凸函数，因而也是关于D的连续函数。

（3）$R(D)$是关于D的严格递减函数。

6.3 信息率失真函数及其性质



(a) 离散系统 **(b) 连续系统**

信息率失真函数的曲线

6.4 保真度准则下的信源编码定理

定理（限失真信源编码定理） 设离散无记忆信源的信息率失真函数为$R(D)$，并且选定有限的失真函数D。对任意的允许平均失真度 $D \geq 0$ 和任意小的正数ε。

当信息率$R > R(D)$时，只要信源序列长度 L足够长，一定存在一种信源编码方式C，其译码后的平均失真度

$$\bar{D}(C) \leq D + \varepsilon$$

反之，若$R < R(D)$，则无论采用什么样的编码方式，其译码失真必大于允许失真度，即

$$\bar{D}(C) > D$$