信号与系统B
Signals and Systems
第2章　信号与系统

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2013年 9月 18 日

本章内容与基本要求

基本要求

- 掌握信号与系统的描述方法；
- 掌握信号自变量变换对信号的影响；
- 掌握任意信号的奇偶分解；
- 掌握常用基本信号的特性；
- 掌握离散时间复指数信号与正弦信号的周期性；
- 掌握系统的性质以及增量线性系统的等效方法。

信号的表示

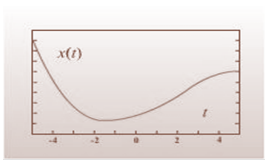
引言： 本章旨在讨论信号与系统的基本概念，建立相应的数学描述方法，以便利用这种数学描述及其表示，建立一种信号与系统的分析体系。

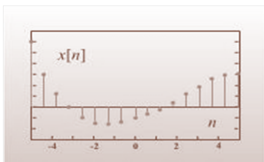
信号可以描述范围极广泛的物理现象。作为信号分析的基础，本课程只研究确定性信号，确定性信号可以表示为一个或几个自变量的函数。

连续时间信号是指自变量（时间）的取值是连续的。

离散时间信号是指自变量（时间）只取整数值的信号。

离散时间信号也可以从连续时间信号通过提取其样本而得到。

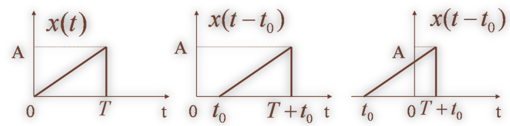




时移变换（Shift of Signals）

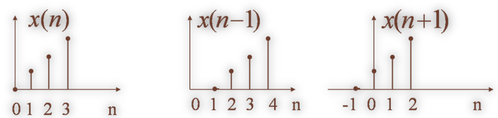
对**连续信号**：$x(t) \to x(t-t_0)$

当$t_0>0$时，信号向右平移t_0；当$t_0<0$时，信号向左平移$|t_0|$。



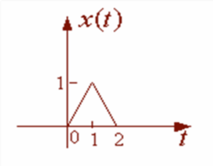
对**离散信号**：$x(n) \to x(n-n_0)$

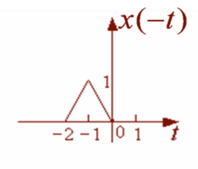
当$n_0>0$时，信号向右平移n_0；当$n_0<0$时，信号向左平移$|n_0|$。



反转变换（Reflection of Signals）

连续：$x(t) \to x(-t)$，信号以$t=0$为轴做镜像对称；
离散：$x(n) \to x(-n)$，信号以$n=0$为轴做镜像对称。

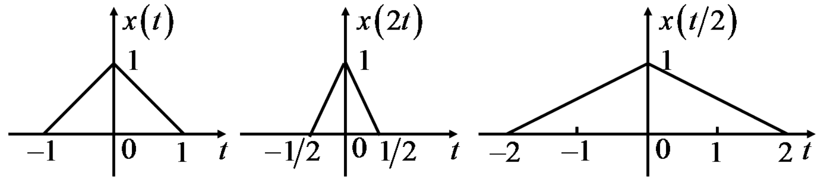




将信号的时移与反转相结合，就可以得到$x(-t \pm t_0)$和$x(-n \pm n_0)$。在画波形时可以先平移再反转，也可以先反转再平移。但要注意的是，反转后自变量变为$-t$或$-n$，所以平移的方向与前述相反。

尺度变换（Scaling）

$x(t) \to x(at)$
当$a>1$时，$x(at)$是将$x(t)$在时间上压缩a倍；
当$0<a<1$时，$x(at)$是将$x(t)$在时间上扩展$1/a$倍。



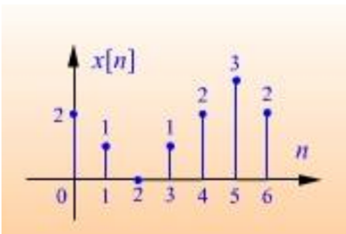
由于离散时间信号的自变量只能取整数值，因而严格来说尺度变换只对连续时间信号而言。

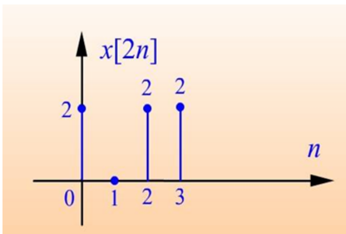
离散时间信号的抽取decimation）

抽取：$x(n) \to x(2n)$。

显然，$x(2n)$是从$x(n)$中依次抽出自变量取偶数时的各点而构成的。这一过程称为对信号$x(n)$的抽取（decimation）。

对信号抽取的过程是不可逆的。



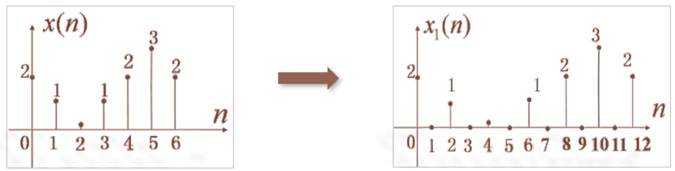


离散时间信号的内插（interpolation）

内插：

$$x(n) \to x_1(n) = \begin{cases} x(n/2) & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$$

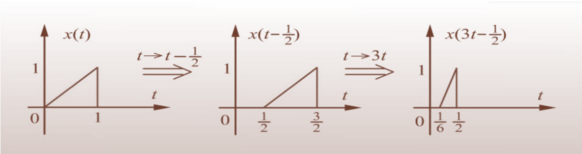
从$x(n)$到$x_1(n)$的过程称为对信号$x(n)$的内插。



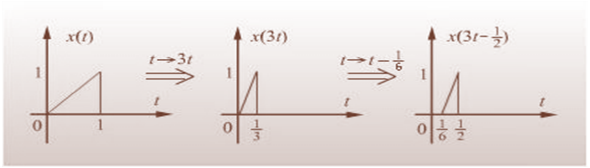
对信号内插的过程是可逆的。

例1-信号的自变量变换：$x(t) \to x\left(3t-\frac{1}{2}\right)$

解一：$x(t) \xrightarrow{t\to t-\frac{1}{2}} x\left(t-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{t\to 3t} x\left(3t-\frac{1}{2}\right)$



解二：$x(t) \xrightarrow{t\to 3t} x(3t) \xrightarrow{t\to t-\frac{1}{6}} x\left(3\left(t-\frac{1}{6}\right)\right) = x\left(3t-\frac{1}{2}\right)$



例2-信号的自变量变换：$x(t) \to x\left(-\frac{t}{3}+2\right)$

解一：

$$x(t) \xrightarrow{t\to -t} x(-t) \xrightarrow{t\to \frac{t}{3}} x\left(\frac{-t}{3}\right) \xrightarrow{t\to t-6} x\left(\frac{-t}{3}+2\right)$$

解二：

$$x(t) \xrightarrow{t\to t+2} x(t+2) \xrightarrow{t\to -t} x(-t+2) \xrightarrow{t\to \frac{t}{3}} x\left(-\frac{t}{3}+2\right)$$

解三：

$$x(t) \xrightarrow{t\to \frac{t}{3}} x\left(\frac{t}{3}\right) \xrightarrow{t\to -t} x\left(\frac{-t}{3}\right) \xrightarrow{t\to t-6} x\left(\frac{-t}{3}+2\right)$$

解四：

$$x(t) \xrightarrow{t\to t-6} x(t-6) \xrightarrow{t-6\to -(t-6)} x(-t+6) \xrightarrow{-(t-6)\to -(t-6)/3} x\left(\frac{-t}{3}+2\right)$$

信号的自变量变换

形如$x(t) \to x(\alpha t+\beta)$的自变量变换建议采用如下步骤：

1. 先根据β的值对信号时移得$x(t+\beta)$;
2. 再根据$|\alpha|$的值对第1步的结果以原点为中心做尺度变换得到$x(|\alpha|t+\beta)$;
3. 如果$\alpha<0$，还要对第2步的结果以纵坐标为轴进行反转；
4. 取特殊点进行验证。

如例二：

$$x(t) \xrightarrow{t\to t+2} x(t+2) \xrightarrow{t\to \frac{t}{3}} x\left(\frac{t}{3}+2\right) \xrightarrow{t\to -t} x\left(-\frac{t}{3}+2\right)$$

奇信号、偶信号及信号的奇偶分解（实）

对**实信号**而言：

如果有$x(-t)=x(t)$ 或$x(-n)=x(n)$，则称该信号为**偶信号**。

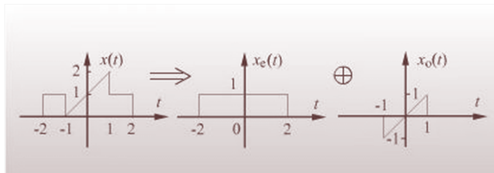
如果有$x(-t)=-x(t)$ 或$x(-n)=-x(n)$，则称该信号为**奇信号**。

任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和。

$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$，其中：　　$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$，其中：

$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)] \qquad x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)] \qquad x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$



奇信号、偶信号及信号的奇偶分解（复）

对**复信号**而言：

如果有$x^*(-t)=x(t)$ 或$x^*(-n)=x(n)$，则称该信号为**共轭偶信号**。

如果有$x^*(-t)=-x(t)$ 或$x^*(-n)=-x(n)$，则称该信号为**共轭奇信号**。

复信号也能分解成一个偶信号与一个奇信号之和。

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t) \qquad x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

其中：

$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x^*(-t)]$$
$$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x^*(-t)]$$

其中：

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$$
$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

周期信号与非周期信号

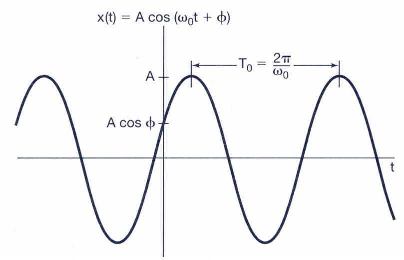
周期信号的定义：

$$x(t)=x(t+T) \qquad x(n)=x(n+N)$$

满足上述关系的正实数（正整数）中最小的一个，称为信号的**基波周期**T_0（N_0）

不具备周期性的信号称为非周期信号。

$x(t)=c$（常数）可视为周期信号，但它的基波周期没有确定的定义。
$x(n)=c$（常数）可以视为周期信号，其基波周期为1。



连续时间和离散时间正弦信号

常用的基本信号包括：正弦信号、指数信号、单位阶跃信号、符号函数、单位冲激和单位脉冲信号。

连续时间正弦信号：

$$x(t)=A\cos(\Omega_0 t+\phi)$$

连续时间正弦信号是周期信号，其基波周期$T_0=2\pi/\Omega_0$。

离散时间正弦信号：

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi)$$

离散时间正弦信号不一定是周期的。

设$x(n)=\cos\omega_0 n$具有周期性，则

$$\cos\omega_0 n=\cos\omega_0(n+N)$$

根据周期性要求，有$\omega_0 N=2\pi m$，其中N和m为整数。

连续时间和离散时间正弦信号

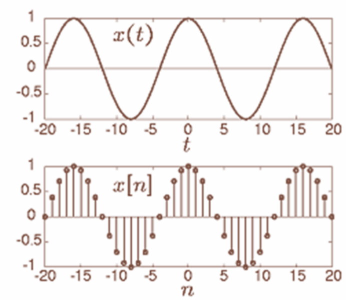
即：

$$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}$$

表明只有当$\omega_0/2\pi$是有理数时，信号才是周期的。

离散时间信号可以通过对连续时间信号提取其离散时刻的样本（即采样）而得到。**对同一个连续时间信号以不同的时间间隔采样，将得到不同的序列。**

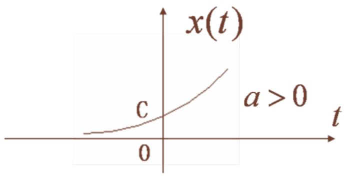
对周期性连续时间信号采样，所得到的序列不一定是周期的。 只有当信号的基波周期T_0与采样间隔T_s之比T_0/T_s是有理数时，采样所得到的序列才具有周期性。

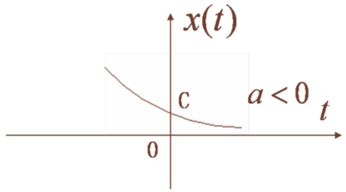


连续时间指数信号（Exponential Signal）

连续时间指数信号的一般形式为：$x(t)=ce^{at}$，其中，c、a为常数。

实指数信号：当c、a为实数时





周期性复指数信号：当$c=1$、$a=j\Omega_0$时

$x(t)=e^{j\Omega_0 t}=\cos\Omega_0 t+j\sin\Omega_0 t$。

基波周期$T_0=2\pi/\Omega_0$。实部、虚部均为正弦信号，显然有：

$$\cos\Omega_0 t=\frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right]\quad \sin\Omega_0 t=\frac{1}{2j}\left[e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}\right]$$

连续时间指数信号（Exponential Signal）

成谐波关系的复指数信号集： $\phi_k(t)=\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

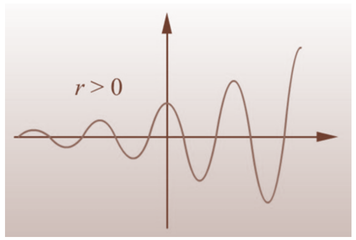
此信号集中的每一个信号都是周期的，其周期为：$T_k=2\pi/|k\Omega_0|$。

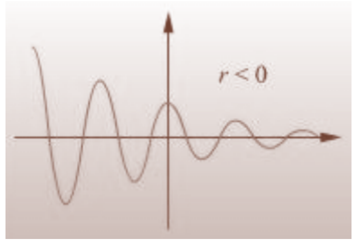
所有信号的公共周期为：$T_0=2\pi/|\Omega_0|$，每个信号的频率都是Ω_0的整数倍，因此称为“谐波”。

复指数信号：当$c=|c|e^{j\theta},a=\sigma+j\Omega_0$时，$x(t)=ce^{at}=|c|\,e^{\sigma t}e^{j(\Omega_0 t+\theta)}$

$\mathfrak{Re}\,[x(t)]=|c|\,e^{\sigma t}\cos(\Omega_0 t+\theta)\quad \mathfrak{Im}\,[x(t)]=|c|\,e^{\sigma t}\sin(\Omega_0 t+\theta)$

实部和虚部都是按指数规律变化的正弦振荡。

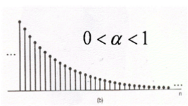


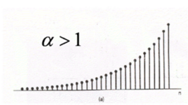


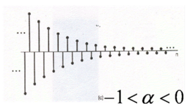
离散时间指数信号（Exponential Signal）

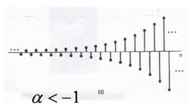
离散时间指数信号的一般形式为：$x(n)=ca^n$，其中，c、a为常数。

实指数信号：当c、a为实数时









复指数信号：当$c=1$、$a=e^{j\omega_0}$时

$x(n)=e^{j\omega_0 n}$与$x(t)=e^{j\Omega_0 t}$形式相同，但该信号不一定是周期的。

只有在$\omega_0/2\pi=m/N$时才具有周期性，满足此关系的m和N中，必有一组是无公因子的，此时的N即为信号的基波周期N_0。

基波频率：

$$\omega_B=\frac{2\pi}{N_0}=\frac{\omega_0}{m}\quad N_0=\frac{2\pi}{\omega_0}m$$

离散时间指数信号（Exponential Signal）

成谐波关系的复指数信号集： $\phi_k(n)=\left\{e^{jk2\pi/Nn}\right\}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

基波周期为N，基波频率$2\pi/N$。由于

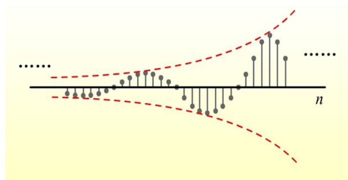
$$\phi_{k+N}(n)=e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\phi_k(n)$$

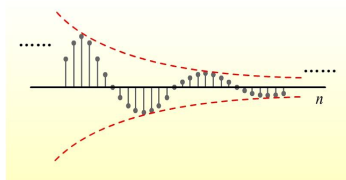
该信号集中的信号并不都是独立的，其中只有N个独立的谐波分量。

一般的复指数信号：当$c=|c|e^{j\theta},a=re^{j\omega_0}$时，$x(n)=|c|\,r^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$

$\mathfrak{Re}\,[x(n)]=|c|\,r^n\cos(\omega_0 n+\theta)\quad \mathfrak{Im}\,[x(n)]=|c|\,r^n\sin(\omega_0 n+\theta)$

实部和虚部都是按指数规律变化的正弦振荡。





信号$e^{j\Omega_0 t}$与$e^{j\omega_0 n}$的比较

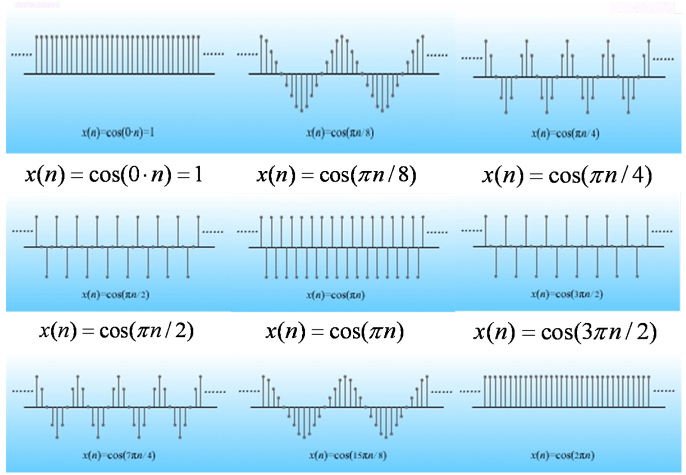
$e^{j\Omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Ω_0不同，信号不同； 对任何Ω_0，信号都是周期的； 基波频率：$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ 基波周期：T_0	频率差2π的整数倍时，信号相同； 仅当$\omega_0=\frac{2\pi}{N}m$时，才是周期的； 基波频率：$\frac{2\pi}{N}=\frac{\omega_0}{m}$ 基波周期：N

观察与$e^{j\omega_0 n}$相对应的正弦序列随ω_0变化的情况。可以看出，当ω_0从0增加到π时，信号振荡频率随之增加；当ω_0从π增加到2π时，信号的振荡频率随之下降。

离散时间信号的频率有效范围只有2π。高频对应于π的奇数倍附近，低频对应于π的偶数倍附近。

$$\boxed{e^{j2\pi n}=1, e^{j\pi n}=\cos(\pi n)=(-1)^n, e^{j\frac{\pi}{2}n}=j^n, e^{j\frac{3\pi}{2}n}=(-j)^n}$$

离散时间正弦序列随频率的变化情况



$x(n)=\cos(0\cdot n)=1$ $x(n)=\cos(\pi n/8)$ $x(n)=\cos(\pi n/4)$

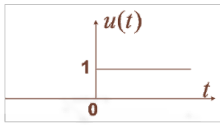
$x(n)=\cos(\pi n/2)$ $x(n)=\cos(\pi n)$ $x(n)=\cos(3\pi n/2)$

$x(n)=\cos(7\pi n/4)$ $x(n)=\cos(15\pi n/8)$ $x(n)=\cos(2\pi n)$

单位阶跃信号

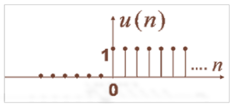
连续时间单位阶跃：

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



离散时间单位阶跃：

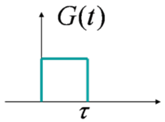
$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

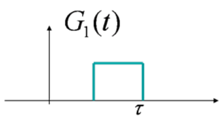


单位阶跃信号在简化信号的时域表示方面非常有用。

$$G(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

$$G_1(t)=u(t-t_0)-u(t-\tau)$$

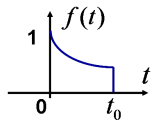


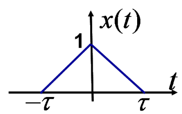


符号函数

$$f(t)=e^{-t}\left[u(t)-u(t-t_0)\right]$$

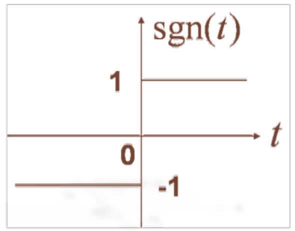
$$x(t)=(1+\frac{t}{\tau})\left[u(t+\tau)-u(t)\right]+(1-\frac{t}{\tau})\left[u(t)-u(t-\tau)\right]$$





符号函数定义：

$$\text{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$



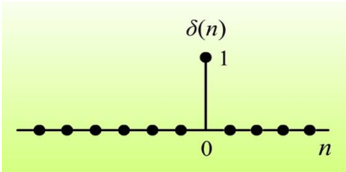
符号函数与单位阶跃的关系：

$$\text{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$
$$\text{sgn}(t)=2u(t)-1$$
$$\frac{d}{dt}\text{sgn}(t)=2\delta(t)$$

单位脉冲信号（Unit impulse ）

定义:

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



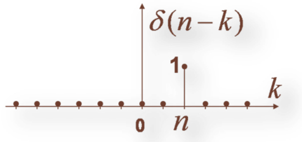
单位脉冲具有提取信号$x(n)$中某一点的样值的作用:

$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)\quad x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0)$$

单位脉冲与单位阶跃之间的关系:

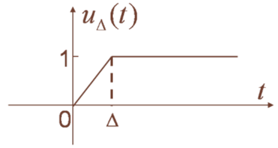
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$



单位冲激

定义：$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\quad \delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$

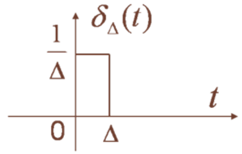


从数学角度看是不可能的，因为$u(t)$在$t=0$处不连续，因而也不可导。

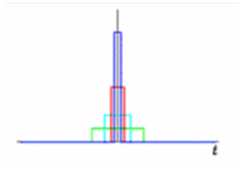
从极限的角度作一直观说明：

定义如图所示的$u_\Delta(t)$，

显然当$\Delta\to 0$时，$u_\Delta(t)\to u(t)$。



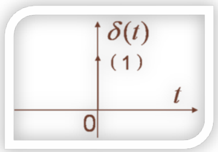
$$\delta_\Delta(t)=\frac{du_\Delta(t)}{dt}\quad \lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)=\delta(t)$$

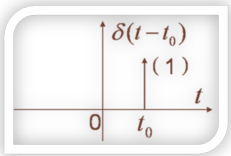


$\delta(t)$可视为一个面积始终为1的矩形，当其宽度趋于零时的极限。矩形的面积称为**冲激强度**。

单位冲激

$\delta(t)$可表示为





$\delta(t)$也具有提取连续时间信号样本的作用:

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)\quad x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

单位冲激与单位阶跃的关系:

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}\quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

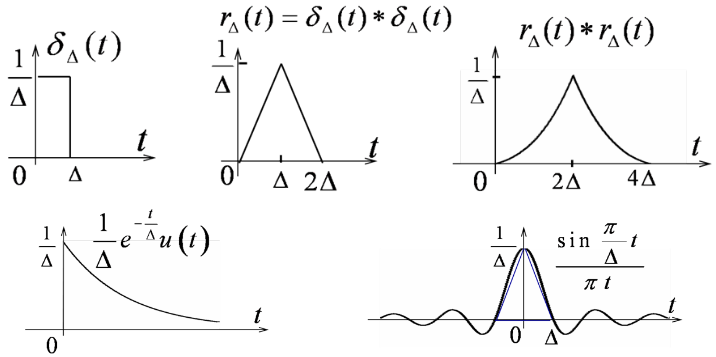
单位冲激信号可用于描述能量有限但作用时间极短的物理现象。

例：求门函数$G(t)=u(t)-u(t-\tau),\tau>0$的导数。

解：$G'(t)=\delta(t)-\delta(t-\tau)$。

奇异函数（singularity functions）

前边在定义$\delta(t)$时，采用了极限的思想，将其看成面积始终为1的矩形在宽度趋于0 时的极限。但这样的定义仍然是不严密的，因为可以发现有很多不同的信号在极限的意义下具有相同的属性，如下图。



δ函数及其性质

这表明$\delta(t)$是一个非常规函数，被称为奇异函数或广义函数。对它的定义通常采用在积分运算下所表现的特性来描述。

定义：$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$，其中$x(t)$是在$t=0$处连续的函数。

性质：

- 令$x(t)=1$，则有$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = 1$
- $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
- 若$x(t)$在$t=0$连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(-t)dt$$

$$x(t)\delta(t) = x(t)\delta(-t) \quad \Rightarrow \quad \delta(t) = \delta(-t)$$

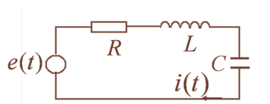
系统的模型（The model of systems）

系统是由一些相互联系，相互依赖的事物组成的具有一定功能的整体。

系统可以看成对输入信号进行某种变换/处理的过程，要分析一个系统，首先要建立系统的模型。

所谓建立系统模型就是要从实际物理问题抽象出描述输入输出关系或物理特性的数学模型。一般有输入输出描述和状态空间描述两种。

例：RLC电路



$$LC\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i(t) = C\frac{de(t)}{dt}$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t)$$

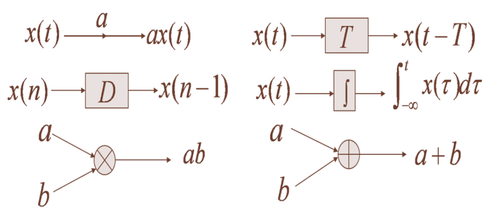
$$q(t) = Cu(t), \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

系统的表示（Representation of Systems）

系统对输入信号的作用，其本质就是对输入信号进行某种变换或运算处理。

系统对信号的变换功能是通过系统模型中包含的各种数学运算来实现的。

系统模型中的基本运算：

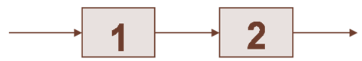


系统表示方法：

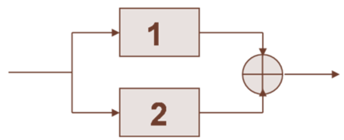
- 用方程表示；
- 用电路图表示；
- 用方框图表示。

系统的互联（interconnection of systems）

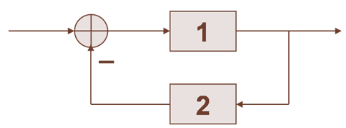
级联（cascade interconnection）



并联（parallel interconnection）



反馈联结（feedback interconnection）



即时系统与动态系统

即时系统（无记忆系统）：

如：$u(t) = Ri(t) = R \times \cos \Omega_0 t$

在任何时刻系统的输出只与该时刻的输入有关，而与该时刻以前或以后的输入无关。纯电阻网络就是一个即时系统。

$$y(t) = kx(t) \quad y(n) = kx(n) \quad y(t) = \sin(x(t)) \quad y(n) = x^2(n)$$

一种特别的即时系统是**恒等系统**，恒等系统的输出恒等于输入。

动态系统（记忆系统）：

它的输出不仅与当前时刻的输入有关，也与其它时刻的输入有关。包含有电容、电感等储能元件的网络就是一种动态系统。

记忆系统的输入输出关系一般是微分方程或差分方程。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \quad y(n) = x(n) - x(n-1)$$

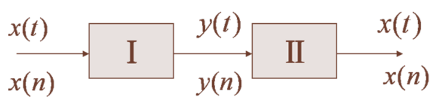
可逆性与逆系统(Invertibility and inverse system)

如果系统对任何不同的输入都能产生不同的输出，即输入与输出**一一对应**，则系统是可逆的。如果系统对两个或两个以上不同的输入产生相同的输出，则系统是不可逆的(noninvertible)。

$$y(t) = x^2(t) \quad y(n) = x^2(n) \quad y(n) = x(2n) \quad y(t) = 0$$

判断系统是否可逆一般是困难的。

如果一个系统与另一个系统级联后构成一个恒等系统，则后者是前者的逆系统(inverse system)。



$$y(t) = ax(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{a}x(t)$$

$$y(n) = x(n-n_0) \quad \Rightarrow \quad y(n) = x(n+n_0)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t) = x'(t)$$

系统的因果性（causality）

如果一个系统在任何时刻的输出都只与当时这个时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是因果的(causal system)。否则就是非因果的(noncausal system)。因果系统没有预测未来输入的能力，因而也称为不可预测系统。

如：$y(n) = x(n) - x(n-1)$和$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$是因果的。

而：$y(n) = x(-n)$、$y(n) = x(n) - x(n+1)$和$y(t) = x(2t)$都是非因果的。

一般说来，非因果系统是物理不可实现的。这体现了因果性对系统实现的重要性。但对非实时处理信号的离散时间系统，或信号的自变量并不具有时间概念的情况，因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决条件。

思考题：$y(t) = x(t)\cos(t+1)$是因果的还是非因果的？

系统的稳定性（stability）

如果一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是**稳定系统**(stable system)。否则，就是不稳定系统(unstable system)。

例：单摆、RC电路、$y(n) = x(n-1)$和$y(t) = e^{x(t)}$都是稳定系统。

而

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \quad 和 \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

表示的系统都是不稳定系统。

工程实际中总希望所设计的系统是稳定的。系统的稳定性在系统分析和系统综合中具有重要意义。

时变与时不变系统

如果一个系统当输入有一个时间上的平移时，输出也产生相同的平移，除此之外无任何其它变化，则系统是时不变的(time-invariant)，否则系统是时变的(time-varying)。

即：若$x(t) \to y(t)$，有$x(t-t_0) \to y(t-t_0)$，则系统是时不变的。

检验一个系统时不变性的步骤：

1. 令输入为$x_1(t)$，根据系统的描述，确定此时的输出$y_1(t)$
2. 将输入信号变为$x_2(t)$，再根据系统的描述确定输出$y_2(t)$
3. 令$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，根据自变量变换，检验$y_1(t-t_0)$是否等于$y_2(t)$

例1：判断系统$y(n)=(n+1)x(n)$是时变的还是时不变的。

$$\begin{aligned} x(n)&=x_1(n) & y_1(n)&=(n+1)x_1(n) \\ x(n)&=x_2(n) & y_2(n)&=(n+1)x_2(n) \\ x_2(n)&=x_1(n-n_0) & y_2(n)&=(n+1)x_1(n-n_0) \end{aligned}$$

$y_1(n-n_0)=(n-n_0+1)x_1(n-n_0) \neq y_2(n)$，所以是时变的。

时变与时不变系统

例2：判断系统$y(n)=x(2n)$的时变性。

解：

$$\begin{aligned} x(n)&=x_1(n) & y_1(n)&=x_1(2n) \\ x(n)&=x_2(n) & y_2(n)&=x_2(2n) \end{aligned}$$

令：$x_2(n)=x_1(n-n_0)$则$y_2(n)=x_1(2n-n_0)$;

而：$y_1(n-n_0)=x_1(2(n-n_0))=x_1(2n-2n_0)\neq y_2(n)$，所以是时变的。

课堂练习：判断系统$y(t)=x(-t)$的时变性。

线性与非线性系统

如果一个系统既满足叠加性也满足齐次性就称该系统是线性的（Linear System），否则就是非线性的（Nonlinear System）。

$$\boxed{\text{if } x_1(t)\to y_1(t), x_2(t)\to y_2(t), \text{then } ax_1(t)+bx_2(t)\to ay_1(t)+by_2(t)}$$

满足此关系的系统是线性的。

例1：检验系统$y(t)=4x(t)+3x'(t)$是否有线性特性。

$$\begin{aligned} y_1(t)&=4x_1(t)+3x_1'(t) \\ y_2(t)&=4x_2(t)+3x_2'(t) \\ x_3(t)&=ax_1(t)+bx_2(t) \\ y_3(t)&=4\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)+3\left(ax_1'(t)+bx_2'(t)\right) \\ &=a\left(4x_1(t)+3x_1'(t)\right)+b\left(4x_2(t)+3x_2'(t)\right)=ay_1(t)+by_2(t) \end{aligned}$$

又$ax(t)\to ay(t)$，既满足可加性也满足齐次性，所以系统是线性的。

线性与非线性系统

练习：检验系统$y(t)=\frac{1}{x(t)}\left[x'(t)\right]^2$是否有线性特性。

例2：检验系统$y(n)=2x(n)+3$是否有线性特性。

$$\begin{aligned} &y_1(n)=2x_1(n)+3 \quad y_2(n)=2x_2(n)+3 \\ &y_1(n)+y_2(n)=2x_1(n)+2x_2(n)+6 \\ &x_3(n)=x_1(n)+x_2(n) \\ &y_3(n)=2x_1(n)+2x_2(n)+3\neq y_1(n)+y_2(n) \\ &x(n)=0\to y(n)=3 \end{aligned}$$

既不满足可加性，也不满足齐次性，所以系统不是线性的。

线性系统一定满足零输入零输出的特性。即：线性系统在没有输入信号加入时，一定不能有输出产生。

线性系统

如果一个系统是线性的，当我们能够把输入信号$x(t)$分解成若干个简单信号的线性组合时，只要能得到该系统对每一个简单信号所产生的响应，就可以很方便的根据线性特性，通过线性组合而得到系统对$x(t)$的输出响应。

即：如果

$$x(t)=\sum_k a_k x_k(t)\ ,\quad x_k(t)\to y_k(t)$$

则

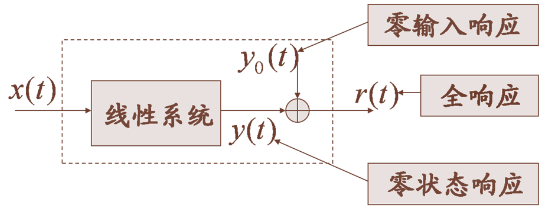
$$y(t)=\sum_k a_k y_k(t)$$

这一思想是信号与系统分析理论和方法建立的基础。

增量线性系统

有一种工程中广泛应用的系统，虽然其输入与输出之间不满足线性关系，但输入的增量与输出的增量呈线性关系，这类系统称为增量线性系统。

任何增量线性系统都可以等效为一个线性系统再加上一部分与输入无关的响应。



可见，增量线性系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。

如果零输入响应为零，则系统是线性的。此时，也称系统最初是松弛的或系统是静止的。

小结

- 建立了信号与系统的数学描述方法。
- 讨论了信号自变量变换对信号的影响。
- 介绍了作为信号分析基础的基本信号：复指数信号,正弦信号，单位冲激与单位阶跃信号。
- 讨论了离散时间正弦信号的周期性问题。
- 定义并讨论了系统的基本特性及互联方式。
  瞬时性、可逆性、因果性、稳定性、时不变性、线性和增量线性。
- 讨论了奇异函数。

因为在工程实际中相当广泛的一类系统其数学建模可以用一个线性时不变（Linear Time - Invariant ）系统来描述。而且基于线性和时不变性，为系统分析建立一套完整的、普遍适用的方法提供了可能。因此线性时不变(LTI)系统将成为本课程所研究的对象。

作业

第一次：2.1(1)(c)(3)(b)　2.3(3)(a),(c)　2.5　2.6

第二次：2.7 (b),(f),(j)　2.12 (a),(i)　2.17　2.18