

信号与系统B Signals and Systems

第3章 信号与系统的时域分析

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2013年 10月



本章内容

- 1 引言
- 2 信号的时域分解
- 3 连续时间LTI系统的时域分析
- 4 离散时间LTI系统的时域分析
- 5 线性时不变系统的性质
- 6 LTI系统的微分、差分方程描述
- 7 本章小结



基本要求

- 掌握信号时域分解的基本思想与方法;
- 掌握卷积积分与卷积和的计算方法及性质;
- 掌握LTI系统的性质与单位冲激响应或单位脉冲响应的关系;
- 掌握单位阶跃响应与单位冲激响应或单位脉冲响应的关系;
- 掌握用线性常系数微分或差分方程描述LTI系统的条件;
- 掌握LTI系统的框图结构表示。



时域分析的基本思想

由于LTI系统满足齐次性和可加性,并且具有时不变性的特点,因而为建立信号与系统分析的理论与方法奠定了基础。

基本思想:

如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合,那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应,就可以利用系统的线性特性,将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

问题的实质:

- ① 研究信号的分解:即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元,如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号;
- ② 如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。





基本信号的要求及时域分析方法

作为基本单元的信号应满足以下要求：

- 1 本身尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号；
- 2 LTI系统对这种信号的响应易于求得。

如果解决了信号分解的问题，则有：

$$\text{if } x(t) = \sum_k a_k x_k(t), x_k(t) \rightarrow y_k(t), \text{ then } y(t) = \sum_k a_k y_k(t)$$

分析方法：

将信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。



用 $\delta(t)$ 表示连续时间信号

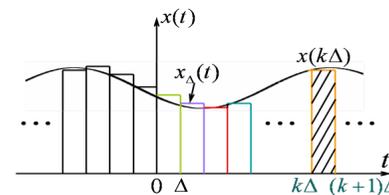
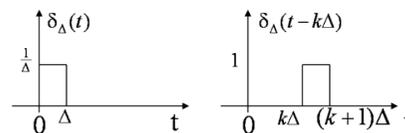
采用数学中讨论积分的思想。

定义：

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

则有：

$$\Delta \delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



第 k 个矩形可以表示为：

$$x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

这些矩形迭加起来就成为阶梯形信号：

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta$$



用 $\delta(t)$ 表示连续时间信号

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时，

$$k\Delta \rightarrow \tau, \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \rightarrow \delta(t - \tau), \Delta \rightarrow d\tau, \sum \rightarrow \int$$

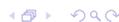
于是

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

这一关系也可以根据 $\delta(t)$ 的性质直接推导得来：

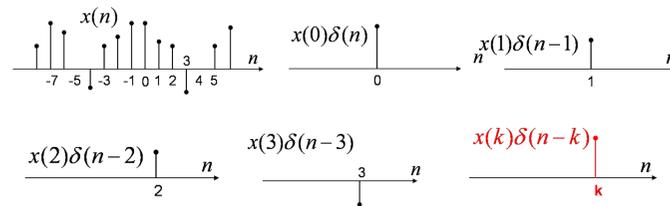
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau \\ &= x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau = x(t) \end{aligned}$$

可见，任何连续时间信号都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的线性组合。



用 $\delta(n)$ 表示离散时间信号

对任何离散时间信号 $x(n)$ ，如果每次从其中取出一个点，就可以将整个信号拆开来。



每次取出的一个点都可以表示成不同加权、不同位置的单位脉冲。

$$\text{于是有: } x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)$$

这表明，任何离散时间信号都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。





卷积积分 (The convolution integral)

如果一个LTI系统的单位冲激响应为 $h(t)$, 则表明当系统的输入为 $\delta(t)$ 时, 系统的输出为 $h(t)$ 。对于LTI系统而言, 如果输入为 $\delta(t - k\Delta)$, 其输出应为 $h(t - k\Delta)$, 而如果输入为 $x(k\Delta)\delta(t - k\Delta)\Delta$, 则输出为 $x(k\Delta)h(t - k\Delta)\Delta$, 即:

$$x(k\Delta)\delta(t - k\Delta)\Delta \Rightarrow x(k\Delta)h(t - k\Delta)\Delta$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta)\Delta \Rightarrow \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t - k\Delta)\Delta$$

当 $\Delta \rightarrow 0, k\Delta \rightarrow \tau, \Delta \rightarrow d\tau$ 时, 则有

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

上式的运算称为卷积积分, 简称为卷积。它表明, 系统对输入信号 $x(t)$ 的响应就是信号 $x(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积。



卷积积分的解析计算

通常记为: $y(t) = x(t) * h(t)$, 这表明, LTI系统可以完全由它的单位冲激响应 $h(t)$ 来表征。

例: 已知 $x(t) = e^{-at}u(t), a > 0; h(t) = u(t)$, 求 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

解:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)u(t - \tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \int_0^t e^{-a\tau}d\tau & t > 0. \end{cases} \\ &= \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \end{aligned}$$

注意: 通过图形帮助确定积分区间和积分上下限往往是很有用的。



卷积积分的图解计算步骤

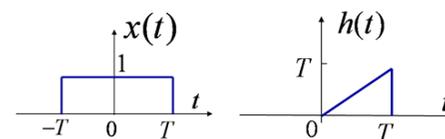
由 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$ 可以看出, $x(t) * h(t)$ 的几何意义就是求 $x(\tau)$ 与 $h(t - \tau)$ 相乘后, 曲线下的面积, 这一面积是参变量 t 的函数。知道了两个参与卷积信号的波形, 可以利用图解法求出卷积结果, 一般步骤为:

- 1 换元: 将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 中的变量 t 换为 τ , 得 $x(\tau)$ 和 $h(\tau)$;
- 2 反转: 将 $h(\tau)$ 以纵轴为对称轴反转得到 $h(-\tau)$;
- 3 平移: 将 $h(-\tau)$ 随参变量 t 平移, 得到 $h(t - \tau)$, 若 $t > 0$ 则将 $h(-\tau)$ 沿 τ 轴向右平移, 若 $t < 0$, 则向左平移;
- 4 相乘: 将 $x(\tau)$ 与 $h(t - \tau)$ 相乘;
- 5 积分: $x(\tau)$ 与 $h(t - \tau)$ 乘积曲线下的面积即为 t 时刻的卷积值。

运算过程的实质: 参与卷积的两个信号中, 一个不动, 另一个反转后随参变量 t 移动。



例: 用图解法计算卷积



- 1 $t < -T, y(t) = 0$
- 2 $-T < t < 0, (t - T < -T)$

$$y(t) = \int_{-T}^t (t - \tau)d\tau = \frac{1}{2}t^2 + tT + \frac{1}{2}T^2$$

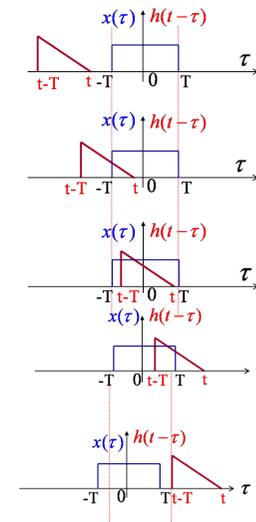
- 3 $0 < t < T, (-T < t - T < 0)$

$$y(t) = \int_{t-T}^t (t - \tau)d\tau = \frac{1}{2}T^2$$

- 4 $T < t < 2T, (0 < t - T < T)$

$$y(t) = \int_{t-T}^T (t - \tau)d\tau = -\frac{1}{2}t^2 + tT$$

- 5 $t > 2T, (t - T > T), y(t) = 0$





卷积的交换律、分配律

交换律:

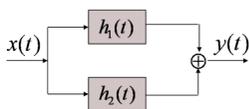
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \xrightarrow{x(t) \rightarrow h(t)} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

表明: 一个单位冲激响应是 $h(t)$ 的LTI系统对输入信号 $x(t)$ 所产生的响应, 与另一个单位冲激响应是 $x(t)$ 的LTI系统对输入信号 $h(t)$ 所产生的响应相同。

分配律:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



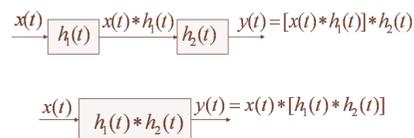
表明: 两个LTI系统并联, 其总的单位冲激响应等于各个子系统的单位冲激响应之和。



卷积的结合律

结合律:

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

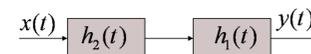


表明: 两个LTI系统级联时, 系统总的单位冲激响应等于各个子系统单位冲激响应的卷积。

由于卷积满足交换律, 因此系统级联的先后次序可以调换。



$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * h_2(t) * h_1(t)$$



卷积的微分与积分

卷积的微分与积分:

$$\text{if } x(t) * h(t) = y(t), \text{ then } x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t) = y'(t)$$

$$\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * h(t) = x(t) * \left[\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right] = \left[\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \right]$$

卷积的其它性质:

- $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- $x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$
- 如果 $x(t) * h(t) = y(t)$, 那么
- $x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$
- $x(t) * \delta'(t) = x'(t) * \delta(t) = x'(t)$
- $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

产生以上结论的前提条件:

- ① 系统必须是LTI系统;
- ② 所有涉及到的卷积运算必须收敛。



卷积和 (The convolution sum)

若LTI系统对 $\delta(n)$ 的响应为 $h(n)$, $h(n)$ 称为系统的单位脉冲响应, 则离散时间LTI系统对输入

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

的响应为:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

上式称为卷积和, 通常记为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

这表明: 一个离散时间LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。



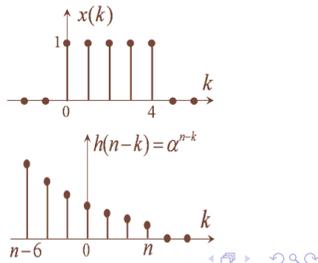
计算卷积和的一般步骤

由定义 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, 可以得出计算卷积和的一般步骤:

- 1 换元: 将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 中的变量 n 换为 k ;
- 2 反转: 将 $h(k)$ 以纵轴为对称轴反转得到 $h(-k)$;
- 3 平移: 将 $h(-k)$ 随参变量 n 平移, 得到 $h(n-k)$,
若 $n > 0$ 则将 $h(-k)$ 沿 k 轴向右平移, 若 $n < 0$, 则向左平移;
- 4 相乘: 将 $x(k)$ 与 $h(n-k)$ 各对应点相乘;
- 5 求和: 将相乘后的各点值相加。

$$\text{例: } x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n, & \alpha > 1, 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



例: 图解法计算卷积和

- 1 $n < 0$ 时, $y(n) = 0$.
- 2 $0 \leq n \leq 4$ 时,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^n \alpha^{-k} \\ &= \alpha^n \cdot \frac{1 - \alpha^{-(n+1)}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

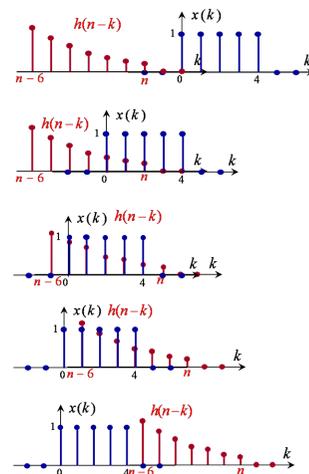
- 3 $4 \leq n \leq 6$ 时,

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

- 4 $6 \leq n \leq 10$ 时,

$$y(n) = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

- 5 $n \geq 10$ 时, $y(n) = 0$.



有限长序列的卷积和计算的矩阵表示

例: $x(n) = [a \ b \ c \ d]$, $h(n) = [e \ f \ g]$.

$$\begin{aligned} x(n) * h(n) &= [e \ f \ g] \begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \end{bmatrix} \\ &= [a \ b \ c \ d] \begin{bmatrix} e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & f & g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \\ d & c & b \\ 0 & d & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ f & e & 0 & 0 \\ g & f & e & 0 \\ 0 & g & f & e \\ 0 & 0 & g & f \\ 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$



有限长序列卷积和的竖式计算

将卷积公式改写为下列形式:

$$\text{由 } x(n) * h(n) = \left(\sum_k x(k)\delta(n-k) \right) * h(n) = \sum_k x(k)h(n-k)$$

可得到如下的有限长序列卷积和的竖式计算方法。

$$\begin{array}{rcccc} & & a & b & c & d \\ * & & e & f & g & \\ \hline & & ga & gb & gc & gd \\ & fa & fb & fc & fd & \\ ea & eb & ec & ed & & \\ \hline ea & fa+eb & A & B & gc+fd & gd \end{array}$$

其中: $A = ga + fb + ec, B = gb + fc + ed$

卷积结果的下限是两个序列的下限之和, 上限是两个序列的上限之和。



卷积和的性质

卷积和与卷积积分一样，也满足交换律、结合律、分配律。

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

同时，也满足时移、差分及求和特性。

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \quad x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

$$x(n - n_1) * \delta(n - n_2) = x(n - n_1 - n_2)$$

$$x(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

if $x(n) * h(n) = y(n)$, then $x(n - n_1) * h(n - n_2) = y(n - n_1 - n_2)$



记忆系统和无记忆系统

LTI系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

记忆性: 根据 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ ，如果系统是无记忆的，则在任何时刻 n ， $y(n)$ 都只能和 n 时刻的输入有关，即和式中只能有 $k = n$ 的一项为非零，因此必须有： $h(n-k) = 0, k \neq n$ ，即 $h(n) = 0, n \neq 0$ 。

因此**无记忆系统**的单位冲激响应为： $h(n) = K\delta(n), h(t) = K\delta(t)$ 。

此时，

$$x(n) * h(n) = Kx(n)$$

$$x(t) * h(t) = Kx(t)$$

当 $K = 1$ 时是恒等系统。

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求，则系统是**记忆的**。



系统的可逆性和因果性

可逆性:

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且该逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。延时器、累加器都是可逆系统。



因此有： $h(t) * g(t) = \delta(t)$ ， $h(n) * g(n) = \delta(n)$

例: $u(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)] = u(n) - u(n-1) = \delta(n)$

因果性:

根据 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ ，如果LTI系统是因果的，则在任何时刻 n ， $y(n)$ 都只能取决于 n 时刻及其以前的输入，和式中所有 $k > n$ 的项都必须为零，因此有： $h(n-k) = 0, k > n$ ，即 $h(n) = 0, n < 0$ 。

LTI系统具有因果性的充分必要条件是：

$$h(n) = 0, n < 0 \quad h(t) = 0, t < 0$$



系统的稳定性

根据稳定性的定义，由 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ ，若 $x(n)$ 有界，则 $|x(n-k)| \leq A$ ，若系统稳定，则 $y(n)$ 必有界。由

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \end{aligned}$$

可知， $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

相应地有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

实际上，该条件是LTI系统稳定的充分必要条件。





系统的单位阶跃响应

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或 $u(n)$ 所产生的响应。即：

$$s(t) = u(t) * h(t); \quad s(n) = u(n) * h(n)$$

单位阶跃响应与单位冲激响应的关系：

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \quad h(n) = s(n) - s(n-1)$$

可见单位阶跃响应也可以完全表征一个LTI系统。



线性常系数微分方程

可以用线性常系数微分方程 (Linear Constant-Coefficient Differential Equation) 描述相当广泛的一类连续时间LTI系统。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程。

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

其中， a_k, b_k 为常数。

求解该微分方程，通常是求出一个特解 $y_p(t)$ 和通解 $y_h(t)$ ，于是

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

特解 $y_p(t)$ ：是与输入 $x(t)$ 同类型的函数。

通解 $y_h(t)$ ：是齐次方程 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$ 的解，因此又称齐次解。



线性常系数微分方程的通解 (齐次解)

欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程： $\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0$ ，求出其特征根。在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k t}$$

其中， C_k 是待定系数。要确定系数，需要有一组条件，称为附加条件。仅从确定待定系数的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

系统在没有输入即 $x(t) = 0$ 时，微分方程就蜕变成齐次方程。由于线性系统具有“零输入-零输出”的性质，因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，即所有的 C_k 都为零。这就要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零。由此可得：零附加条件的LCCDE描述的系统是线性系统。



线性常系数微分方程与系统的性质

如果附加条件在输入接入系统的同一时刻给出，则称这组附加条件为初始条件。

如果线性常系数微分方程具有零初始条件，则LCCDE描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

结论：LCCDE连同全部为零的初始条件可以描述一个LTI因果系统。这组条件是：

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, \dots, y^{N-1}(0) = 0$$

如果一个因果的LTI系统由LCCDE描述 (方程具有零初始条件)，就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。

如果LCCDE具有一组非零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是增量线性的。



线性常系数差分方程 (LCCDE)

一般的线性常系数差分方程 (LCCDE) 可表示为:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

与微分方程一样, 它的解法也可以通过求出一个特解 $y_p(n)$ 和通解 (齐次解) $y_h(n)$ 来进行, 其过程与解微分方程一样。

要确定齐次解中的待定常数, 也需要有一组附加条件。同样地, 当LCCDE具有一组全部为零的初始条件时, 所描述的系统是线性、因果、时不变的。

无论微分方程还是差分方程, 由于其特解都与输入信号具有相同的函数形式, 也就是说它是完全由输入决定的, 因而特解所对应的这一部分响应称为**受迫响应**或**强迫响应**。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关, 也称为系统的**自然响应**。



线性常系数差分方程 (LCCDE) 的迭代解法

增量线性系统的响应有零状态响应和零输入响应。零输入响应与输入信号无关, 因此属于自然响应。

零状态响应既与输入信号有关, 也与系统特性有关, 因而它包含了受迫响应, 也包含有一部分自然响应。

线性常系数差分方程还可以采用迭代的方法求解, 将方程改写为:

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

从该差分方程可以看出, 要求出 $y(0)$, 不仅要知道所有的 $x(n)$, 还要知道 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$, 这就是一组初始条件, 由此可以得出 $y(0)$ 。进而, 又可以通过 $y(0), y(-1), \dots, y(-N+1)$, 求得 $y(1), \dots$, 依次类推可以推出所有 $n \geq 0$ 时的解。



线性常系数差分方程的迭代解法

若将方程改写为:

$$y(n-N) = \frac{1}{a_N} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k) \right]$$

则可由 $y(1), y(2), \dots, y(N)$ 求得 $y(0)$, 进而由 $y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ 和 $y(0)$ 求得 $y(-1)$, 依此可推出 $n \leq 0$ 时的解。

由于这种差分方程可以通过递推求解, 因而称为**递归方程** (recursive equation)。



FIR系统和IIR系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- 若 $k \neq 0, a_k = 0$, 则方程变为: $y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$
此时方程无需递推。 $y(n) = x(n) * h(n)$, 其中

$$h(n) = \begin{cases} b_n/a_0, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

显然, $h(n)$ 为有限长序列, 此时方程描述的系统称为**有限长脉冲响应** (Finite Impulse Response, FIR) 系统。

- 若 $k \neq 0$ 时, a_k 不全为零, 则方程为递推型, $h(n)$ 为无限长, 称为**无限长脉冲响应** (Infinite Impulse Response, IIR) 系统。



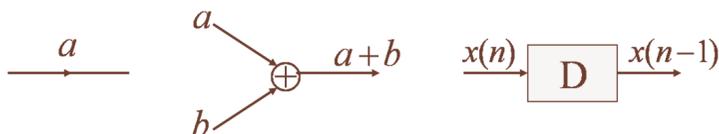


离散时间LTI系统的方框图表示

系统分析的一个重要目的是为了设计并实现满足要求的系统，其实质就是完成系统模型所包括的各种运算。利用基本运算单元来表示系统模型的运算功能，就形成了系统的模拟框图。它有助于系统的分析、模拟仿真、设计与实现。

离散时间LTI系统的方框图表示

由 $y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$ 可以看出，方程中包括三种基本运算：**乘系数、相加、移位**（单位延迟）。这些运算可以用以下符号表示：

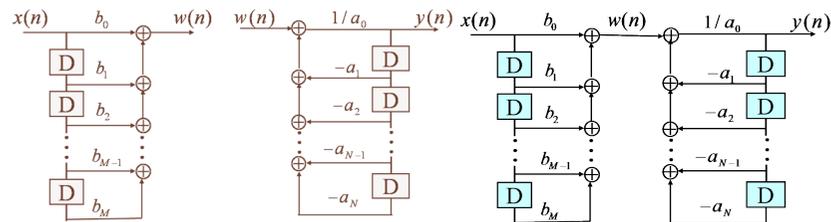


离散时间LTI系统的方框图表示

$$\text{对于式 } y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right],$$

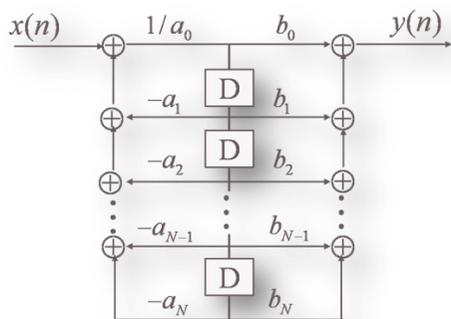
$$\text{如果令 } w(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \text{ 则 } y(n) = \frac{1}{a_0} \left[w(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

这两个系统可以用如下的方框图表示。将它们级联起来，如右边的方框图所示，就成为LCCDE描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。这就是离散时间系统的**直接I型**实现结构。



离散时间LTI系统的方框图表示

显然，作为两个级联的系统，可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，得到离散时间系统的**直接II型**实现结构：



连续时间LTI系统的方框图表示

由 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 可以看出，方程中也包括三种基本运算：**微分、相加、乘系数**。但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，工程上通常使用积分器而不用微分器。

首先作如下约定：

$$\text{零次积分: } y_{(0)}(t) = y(t),$$

$$\text{一次积分: } y_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t y_{(0)}(\tau) d\tau = y(t) * u(t)$$

$$\text{二次积分: } y_{(2)}(t) = \int_{-\infty}^t y_{(1)}(\tau) d\tau = y(t) * u(t) * u(t)$$

$$\text{K次积分: } y_{(K)}(t) = \int_{-\infty}^t y_{(K-1)}(\tau) d\tau = y(t) * \underbrace{u(t) * \dots * u(t)}_{K \text{ 个}}$$

将方程（设 $M = N$ ）两边同时积分 N 次，即可得到一个积分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)$$

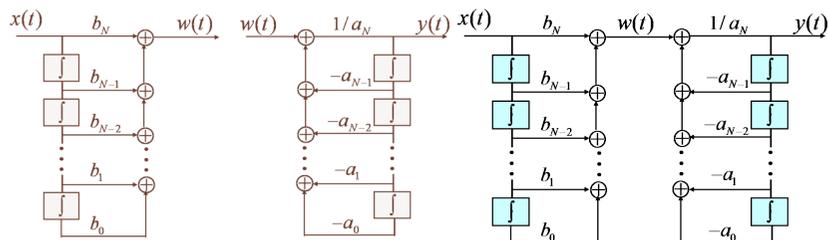


连续时间LTI系统的方框图表示

对此方程完全按照前面差分方程的办法即可得到**直接I型**实现结构。

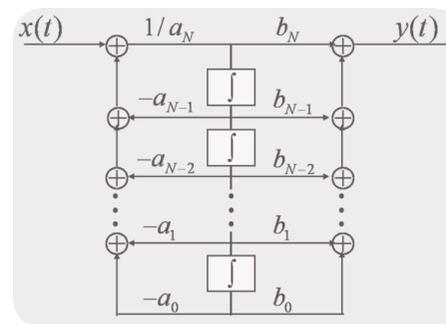
$$w(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left[w(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) \right]$$



连续时间LTI系统的方框图表示

通过交换级联次序，合并积分器可得**直接II型**实现结构。



不同的结构会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如在系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。



本章小结

- 信号的时域分解；
- LTI系统的时域分析卷积积分与卷积和；

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k)$$

- LTI系统的描述方法：
 - ① 用 $h(t)$ 、 $h(n)$ 或者 $s(t)$ 、 $s(n)$ 描述LTI系统；
 - ② 用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统；
 - ③ 用系统方框图描述系统（等同于LCCDE描述）。
- LTI系统的特性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系：
 - ① 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系；
 - ② 系统级联、并联时， $h(t)$ 、 $h(n)$ 与各子系统之间的关系。



作业

- 第一次：3.1(a)(c)(e) 3.2(b)(c)(f) 3.3(a)(b)
 第二次：3.4 3.5 3.7 3.8
 第三次：3.10 3.14 3.15