



- 1 引言
- 2 连续时间LTI系统的特征函数
- 3 周期信号与连续时间傅里叶级数
- 4 非周期信号与连续时间傅里叶变换
- 5 傅里叶级数与傅里叶变换的收敛
- 6 周期信号的傅里叶变换
- 7 连续时间傅里叶变换的性质
- 8 连续时间LTI系统的频域分析
- 9 连续时间信号的时域抽样
- 10 本章小结

## 信号与系统B Signals and Systems

### 第4章 连续时间信号与系统的频域分析

张建国

西安交通大学  
电子与信息工程学院

2013年 10月



## 基本要求

- 1 掌握复指数信号是一切LTI系统的特征函数的概念，及以特征函数为基底对信号进行分解的基本思想方法；
- 2 掌握周期信号分解为傅里叶级数的方法，傅里叶级数系数的确定，频谱的概念；
- 3 掌握非周期信号的频域描述—连续时间傅里叶变换；
- 4 掌握常用信号的傅里叶变换及傅里叶变换的性质；
- 5 了解傅里叶级数与傅里叶变换的收敛条件；
- 6 掌握连续时间LTI系统的频域分析方法；系统频率响应的概念及信号不失真传输的条件；
- 7 掌握连续时间信号的时域采样；从样本通过内插恢复信号的基本原理与过程。



## 时域和频域分析法

### 时域分析法：

在时域将信号分解成 $\delta(t)$ 或 $\delta(n)$ 的线性组合，利用LTI系统的线性和时不变性，导出卷积和与卷积积分。

### 频域分析法：

基本思想与时域相同，将信号分解成复指数信号单元的线性组合，利用LTI系统的线性和时不变性求其响应。

### 傅里叶最主要的两个贡献：

“周期函数都可以表示为成谐波关系的正弦函数的加权和”

“非周期函数都可以用正弦函数的加权积分表示”



Jean-Baptiste-Joseph Fourier  
约瑟夫·傅里叶  
(1768,3–1830,5)





## LTI系统对复指数信号 $e^{st}$ 的响应

从分解信号的角度出发,基本信号单元应该满足以下两个要求:

- 1 本身简单, LTI系统对它的响应容易求得,且响应也具有十分简单的形式。
- 2 具有普遍性,能够用以构成相当广泛的一类信号。

考虑LTI系统对复指数信号 $e^{st}$ 的响应:

由时域分析方法:

$$e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

这表明: LTI系统对复指数信号的响应仍是复指数信号,系统所起的作用只是改变了复指数信号的幅度。



## 特征函数和特征值

如果系统对一个信号所产生的响应仅仅是将该信号与一个复常数相乘,则称该信号是此系统的特征函数 (Eigenfunction)。而所乘的复常数则称为与此特征函数相对应的特征值 (Eigenvalue)。

复指数信号 $e^{st}$ 是一切连续时间LTI系统的特征函数。尽管某些LTI系统可能还有其它的特征函数,但是复指数信号是唯一能够成为一切LTI系统特征函数的信号。

$$\text{若: } x(t) = \sum_i a_i e^{s_i t}, \text{ 则: } y(t) = \sum_i a_i H(s_i) e^{s_i t}$$

由此可见,只要能把连续时间信号 $x(t)$ 分解成复指数信号的线性组合,并且求出与特征函数对应的各个特征值 $H(s_i)$ ,系统对 $x(t)$ 的响应就迎刃而解了。

本章只研究 $s = j\Omega$ 时的情况。



## 成谐波关系的复指数信号的线性组合

研究成谐波关系的复指数信号集:  $\Phi_k(t) = \{e^{jk\Omega_0 t}\}$ 。

由第2章内容我们知道,  $\Omega_0$ 是该信号集的基波频率,  $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ 是它的基波周期。显然,  $T_0$ 是该信号集中所有信号的公共周期,只是当 $|k| \geq 2$ 时,  $T_0$ 是 $\Phi_k(t)$ 的周期 $T_k = 2\pi/(k\Omega_0)$ 的整数倍。

如果将该信号集中所有的信号线性组合起来,得到一个连续时间信号 $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

将连续时间周期信号表示为成谐波关系的复指数信号的线性组合,这就是连续时间傅里叶级数。



## 连续时间傅里叶级数 (Continuous-time Fourier Series)

傅里叶级数 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$ , 其中 $\dot{A}_k$ 是傅里叶级数的系数。

如果 $x(t)$ 是实信号,则

$$x(t) = x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k^* e^{-jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{-k}^* e^{jk\Omega_0 t}$$

于是  $\boxed{\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}}$ 。

这表明,对实信号来说,傅里叶级数中 $k = N$ 和 $k = -N$ 这两项的系数总是互为共轭的,这两项合并起来才真正代表了信号中实实在在的一个正弦谐波分量。

对级数进行变形,得到:

$$x(t) = \dot{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} + \dot{A}_{-k} e^{-jk\Omega_0 t}] = \dot{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} + \dot{A}_k^* e^{-jk\Omega_0 t}]$$



## 傅里叶级数的三角函数形式

因此:  $x(t) = \dot{A}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re\{\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}\}$

由  $\dot{A}_k = A_k e^{j\theta_k}$ , 可得:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

考虑到  $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$ , 于是有  $A_k = A_{-k}$ ,  $\theta_k = -\theta_{-k}$ . 这表明, 实周期信号的傅里叶级数的系数, 其模是偶函数, 相位是奇函数。

由  $\dot{A}_k = a_k + jb_k$ , 可得另一种三角函数形式:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega_0 t) - b_k \sin(k\Omega_0 t)]$$

同理  $a_k = a_{-k}$ ,  $b_k = -b_{-k}$ . 所以系数的实部是偶函数, 虚部是奇函数。



## 傅里叶级数的系数

以  $T_0$  为周期的信号  $x(t)$  可以表示成傅里叶级数:  $x(t) = \sum_k \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$

如何确定  $\dot{A}_k$ ? 推导:

$$x(t)e^{-jn\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} e^{-jn\Omega_0 t}$$

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\Omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\Omega_0 t} dt$$

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\Omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\Omega_0 t} dt = \dot{A}_n T_0 \quad \dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

通常表示为:  $\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$



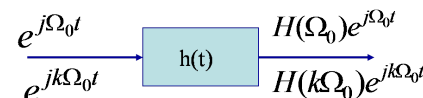
## 周期信号通过线性时不变系统

如果一个LTI系统的单位冲激响应为  $h(t)$ , 系统的输入  $x(t)$  为周期信号, 可以表示成傅里叶级数的形式。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

那么可以写出系统的输出响应为:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$



$$\text{其中: } H(k\Omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jk\Omega_0 \tau} d\tau$$

显然,  $y(t)$  也是一个傅里叶级数表达式, 其系数为  $\dot{A}_k H(k\Omega_0)$ 。



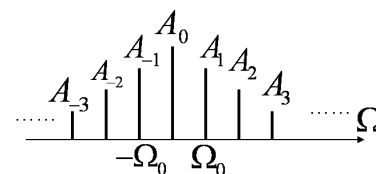
## 频谱 (Spectral) 的概念

在傅里叶级数中, 各个谐波分量间的区别仅仅是频率和复振幅不同。只要知道了一个周期信号所包含的全部复指数分量的频率和相应的复振幅, 这个周期信号也就完全确定了。因此, 有必要研究复振幅随频率变化的关系。

**周期信号所有谐波分量的复振幅随频率的分布就称为信号的频谱。**

可以用一根线段来表示某个分量的幅度, 用线段的位置表示相应的频率, 这样画出的图称为频谱图。由于  $\dot{A}_k$  通常是复数, 频谱图一般分为幅度频谱和相位频谱。

频谱图其实就是  $\dot{A}_k \sim \Omega$  的关系。由于信号的频谱完全代表了信号, 研究它的频谱就等于研究信号本身, 因此, 这种表示信号的方法称为频域表示法。有了信号频谱的概念, 就可以实现从时域到频域的转变。





## 周期性矩形脉冲信号

考察一类重要的信号—周期性矩形脉冲信号。它在一个周期内定义如下：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < |t| < T_0/2 \end{cases}$$

显然该信号的基波周期为 $T_0$ 。

计算 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数：

$k = 0$ 时，有 $\dot{A}_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{\tau}{T_0} \Rightarrow$  直流分量，也即占空比。

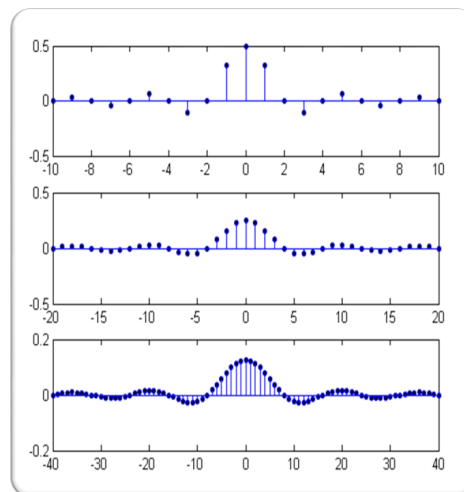
$k \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{2}{k\Omega_0 T_0} \left[ \frac{e^{jk\Omega_0 \tau/2} - e^{-jk\Omega_0 \tau/2}}{2j} \right] \\ &= \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\Omega_0 \tau/2} = \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi} \end{aligned}$$

周期信号的频谱具有如下特点：离散性、谐波性、收敛性。



## $\tau$ 不变，改变 $T_0$ 时周期性矩形脉冲的频谱变化



$$\dot{A}_k = \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi}$$

从上到下， $\tau$ 不变，改变 $T_0$ 。

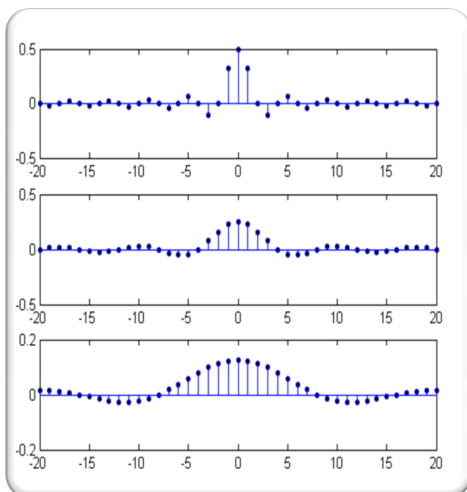
$$T_0 = 2\tau, T_0 = 4\tau, T_0 = 8\tau$$

由图可以看出，随着 $T_0$ 增大：

- 基波频率减小，谱线更加密集；
- 包络线过零点对应的频率不变；
- 幅度减小，但包络并不发生展宽或压缩。



## $T_0$ 不变，改变 $\tau$ 时周期性矩形脉冲的频谱变化



$$\dot{A}_k = \frac{\sin(k\Omega_0 \tau/2)}{k\pi}$$

从上到下， $T_0$ 不变，改变 $\tau$ 。

$$\tau = \frac{T_0}{2}, \tau = \frac{T_0}{4}, \tau = \frac{T_0}{8}$$

由图可以看出，随着 $\tau$ 减小：

- 基波频率不变，谱线的密度（间隔）不变；
- 信号功率减小，频谱幅度减小；
- 包络展宽，信号带宽变大。



## 信号对称性与傅里叶级数的关系

信号具有对称性时，必然在频谱中有所体现。如果 $x(t)$ 是实信号，有 $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$ ，结合傅里叶级数表达式易得如下结论：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}, \quad x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{-jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{-k} e^{jk\Omega_0 t}$$

- 实偶信号： $\dot{A}_k = \dot{A}_{-k}$   $\dot{A}_k = \dot{A}_k^*$   
实偶信号的频谱是实函数，而且是偶函数。
- 实奇信号： $\dot{A}_k = -\dot{A}_{-k}$   $\dot{A}_k = -\dot{A}_k^*$   
实奇信号的频谱是纯虚函数，而且是奇函数。
- 任意实信号： $x_e(t) \leftrightarrow a_k$   $x_o(t) \leftrightarrow jb_k$   
实信号的偶部对应着信号频谱的实部；奇部对应着信号频谱的虚部。



## 非周期信号的频谱表示

在工程应用中有相当多的信号是非周期信号 (Aperiodic signals)，对非周期信号应该如何进行分解，什么是非周期信号的频谱表示，就是这一节要解决的问题。

在上一节已经得出，通过连续时间傅里叶级数可以把周期信号表示成一组谐波关系的复指数信号的线性组合，这种分解信号的思想完全可以推广到非周期信号。

在时域中，如果一个周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号将演变成一个非周期信号；



反过来，如果对任何非周期信号进行周期性延拓，就一定能形成一个周期信号。

我们把非周期信号看成是周期信号在周期  $T_0$  趋于无穷大时的极限，从而考查连续时间傅里叶级数在  $T_0$  趋于无穷时的变化，就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。



## 周期性矩形脉冲信号的频谱

随着  $T_0$  增大， $\dot{A}_k$  会逐渐减小并最终趋向于零。考察  $T_0 \dot{A}_k$  的变化，它在  $T_0$  趋于无穷大时应该是有限的。同时横坐标的标尺是连续频率  $\Omega$ 。

$$T_0 \dot{A}_k = \frac{2 \sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0} = \frac{2 \sin(\Omega\tau/2)}{\Omega} \Big|_{\Omega=k\Omega_0}$$

显然， $2 \sin(\Omega\tau/2)/\Omega$  代表了  $T_0 \dot{A}_k$  的包络，而  $T_0 \dot{A}_k$  是对此包络等间隔所取的样本。可见频谱的包络与周期  $T_0$  无关。在  $T_0$  趋向无穷大的极限情况下，周期信号变成了非周期信号， $T_0 \dot{A}_k$  也就趋近于包络函数。

由  $T_0 \dot{A}_k$  则有：

$$T_0 \dot{A}_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

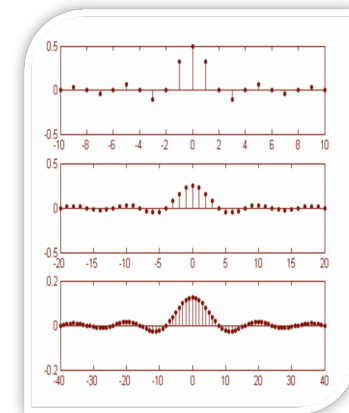
如果  $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 \dot{A}_k \triangleq X(\Omega)$  这就是连续时间傅里叶变换。



## 周期性矩形脉冲信号的频谱

$$\dot{A}_k = \frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\pi}$$

$\tau$  不变，改变  $T_0$ 。从上到下，  
 $T_0 = 2\tau, T_0 = 4\tau, T_0 = 8\tau$



分析：

- $\tau$  不变，增大  $T_0$  时，谱线将越来越密集，频谱幅度将减小。频谱包络不变。
- $T_0$  趋于无穷大时，周期性矩形脉冲信号将演变成非周期的单个矩形脉冲信号。频谱的幅度将变成无穷小量。此时离散的频谱将演变为连续的频谱。

$$T_0 \rightarrow \infty, \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\Omega, k\Omega_0 \rightarrow \Omega$$



## 周期信号与非周期信号的频谱

将频谱与周期信号的傅里叶级数相比较有：  
$$\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} X(k\Omega_0)$$

周期信号的频谱就是与它相对应的非周期信号频谱的样本。

求傅里叶反变换：

因此可得如下变换对：

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} & x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ \tilde{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \Omega_0 & X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

$T_0 \rightarrow \infty$  有  $\sum \rightarrow \int$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

非周期信号可以分解成无数多个频率连续分布的振幅为  $\frac{1}{2\pi} X(\Omega) d\Omega$  的复指数信号之和。



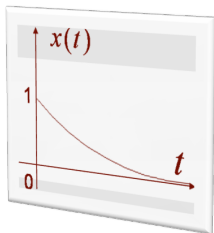




### 常用连续时间信号的傅里叶变换(1)

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

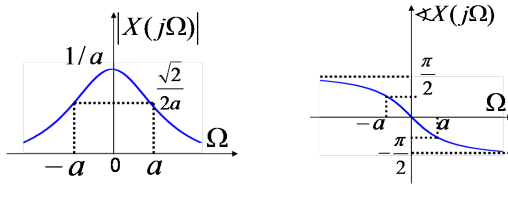
$$X(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt = -\frac{1}{a + j\Omega} e^{-(a+j\Omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\Omega}$$



幅度频谱和相位频谱:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \Omega^2}}$$

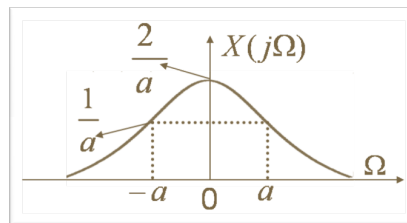
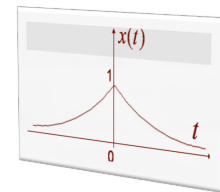
$$\theta(\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$



### 常用连续时间信号的傅里叶变换(2)

$$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{a - j\Omega} + \frac{1}{a + j\Omega} = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2}$$



由于 $x(t)$ 是偶对称的实信号, 它的傅里叶变换是一个实偶函数, 频谱可以只用一幅图来表示。



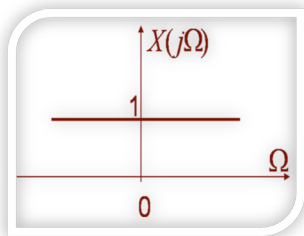
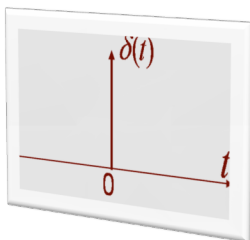
### 常用连续时间信号的傅里叶变换(3)

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$$

这表明单位冲激信号中包含了所有的频率分量, 所有频率分量的幅度都为1, 相位都为0。

因此系统的单位冲激响应 $h(t)$ 才能完全描述一个LTI系统本身的固有特性。单位冲激信号在系统分析中具有重要意义。



### 常用连续时间信号的傅里叶变换(4)

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

如图, 符号函数 $\text{sgn}(t)$ 可视为信号 $x(t)$ 在 $a$ 趋近于0时的极限。

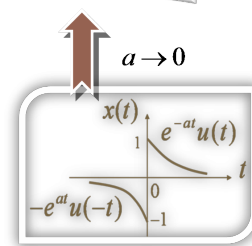
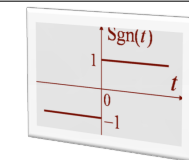
对信号 $x(t)$ , 有:

$$X(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{a + j\Omega} - \frac{1}{a - j\Omega} = \frac{-2j\Omega}{a^2 + \Omega^2}$$

$$a \rightarrow 0 \quad X(\Omega) \rightarrow \frac{2}{j\Omega}$$

于是有:  $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\Omega}$

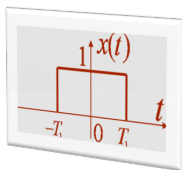
实奇信号的傅里叶变换是纯虚的奇函数。



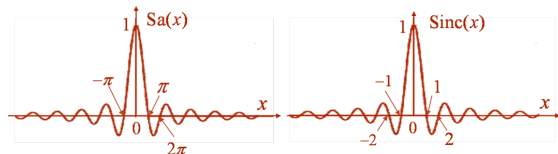
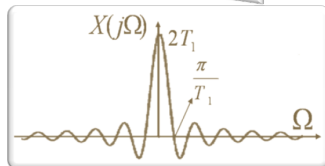


### 常用连续时间信号的傅里叶变换(5)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\Omega t} dt = \frac{2 \sin \Omega T_1}{\Omega} \\ &= 2T_1 \text{Sa}(\Omega T_1) \\ &= 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\Omega T_1}{\pi}\right) \end{aligned}$$



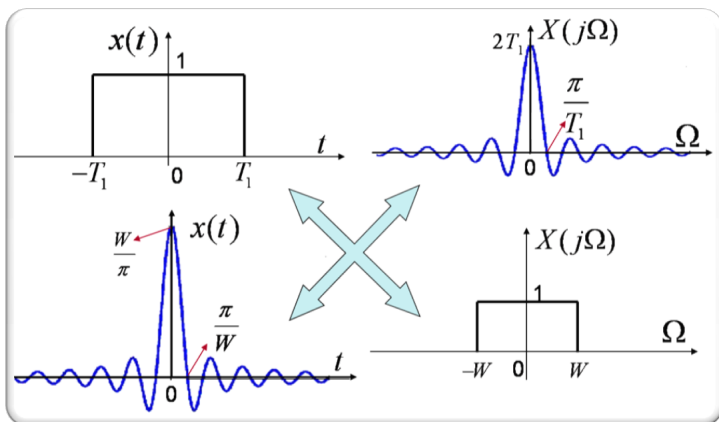
LTI系统中常见的两个函数:

$$\begin{aligned} \text{Sa}(x) &= \sin x / x \\ \text{sinc}(x) &= \sin(\pi x) / \pi x \end{aligned}$$



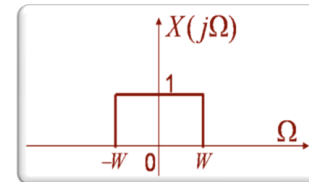
### 时域和频域的对偶关系

上面的对偶关系如图, 可以看到, 信号在时域和频域之间有一种相反的关系, 即信号在时域脉冲越窄, 则其频谱主瓣越宽, 反之亦然。

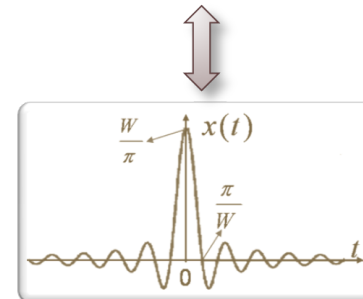


### 常用连续时间信号的傅里叶变换(6)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \\ &= \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) \\ &= \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \end{aligned}$$



同矩形脉冲信号比较可以发现, 在这两种傅里叶变换对中, 都有一个矩形脉冲, 一个是  $\sin x/x$  的形式。这说明: 信号在时域和频域存在着一种对偶关系。



### 常用连续时间信号的傅里叶变换(7)

$$x(t) = 1 \quad X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \quad \therefore x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

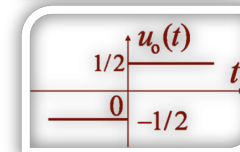
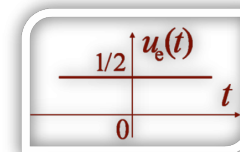
$$x(t) = u(t) \quad u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

$$u_e(t) = \frac{1}{2} [u(t) + u(-t)] = \frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\Omega)$$

$$u_o(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}$$

$$\therefore u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

可以看到, 实信号的偶部与傅里叶变换的实部相对应, 奇部和虚部相对应。





## 信号的带宽

- 信号的带宽，一般它指的是从零频率分量开始到需要考虑的信号最高频率分量之间的频率范围。
- 很多常用信号的频谱都具有收敛性，信号的能量主要包含在它的低频分量中。此外，很多信号的频带严格地说都是无限的。
- 工程中的实际(传输)系统都具有自己的频率特性，不可能也没有必要传输所有的频率分量，只要保证能将占有信号大部分能量的频率分量有效传输即可。或者说，系统必须与所传输的实际信号相匹配。

在工程应用中，定义信号带宽方法主要有以下两种：

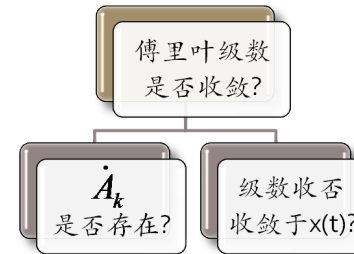
- ①  $X(\Omega)$ 的幅度下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时对应的频率范围。(3dB带宽)
- ② 对频谱或频谱包络是sinc函数形式的信号，定义其主瓣宽度的一半(即频谱第一个零点内的范围)为信号带宽。

以矩形脉冲为例，按带宽的定义可以得出，脉宽乘以带宽等于 $C$ (脉宽带宽积是一个常数)。这清楚地反映了频域和时域的反关系。



## 傅里叶级数的收敛

用复指数信号作为基本信号单元分解信号具有相当广泛的现实性，但这并不意味着对信号本身没有任何约束。本节旨在研究信号分解为复指数信号线性组合时的广泛性问题。



假设周期信号 $x(t)$ 可以表示成傅里叶级数，用有限个谐波分量近似 $x(t)$ 时，有：

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

误差为： $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$ ，误差信号具有与 $x(t)$ 相同的周期。

以均方误差作为衡量误差的准则，其均方误差为：

$$E_N = \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \int_{T_0} e_N(t) e_N^*(t) dt$$



## 傅里叶级数收敛的条件—平方可积

在均方误差最小的准则下，可以证明，此时有限项级数的系数 $\dot{A}_k$ 应满足：

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

这表明：在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。

**平方可积条件：**

如果周期信号满足 $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$ ，则其傅里叶级数表达式一定存在。

将傅里叶级数表达式代入上式再结合复指数信号单元的正交性可得

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\dot{A}_k|^2$$

因此平方可积时， $\dot{A}_k$ 必为有限值。



## 傅里叶级数收敛的条件—狄里赫利条件

**狄里赫利 (Dirichlet) 条件**

- ① 信号在任何周期绝对可积，即 $\int_{T_0} |x(t)| < \infty$ ，保证了级数的所有系数为有限值。
- ② 信号在任何周期内只有有限个极值点，且极值为有限值。
- ③ 信号在任何有限区间内只有有限个间断点，且在那些点处信号为有限值。

**这两组条件并不完全等价。它们都是傅里叶级数收敛的充分条件。**

相当广泛的信号都能满足这两组条件中的一组，因而用傅里叶级数表示周期信号具有相当广泛的适用性。

教材97页图4.18给出了三种不满足Dirichlet条件的信号。





## 傅里叶变换的收敛

根据傅里叶变换与傅里叶级数的关系，可以想到，傅里叶变换的收敛条件应该和傅里叶级数的收敛条件相类似。也有相应的两组条件：

### 1. 平方可积条件：

若  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ ，则  $X(\Omega)$  存在。这表明，所有能量有限的信号，其傅里叶变换一定存在。

### 2. 狄里赫利条件

- ①  $x(t)$  绝对可积；
- ②  $x(t)$  在任何有限区间内只有有限个极值点，且极值是有限值；
- ③  $x(t)$  在任何有限区间内只有有限个间断点，这些间断点都必须是有有限值。

这两组条件并不完全等价。它们都是傅里叶变换收敛的充分条件。



## 吉布斯 (Gibbs) 现象

问题的提出：满足Dirichlet条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于  $x(t)$  的？特别当  $x(t)$  具有间断点时，在间断点附近如何收敛？

1898年Michelson在用谐波分析仪研究周期信号时，发现了意想不到的情况：对方波信号，用各个谐波叠加时，在信号的间断点处始终存在振荡和超量，并不随所取谐波分量的增加而有所减小。

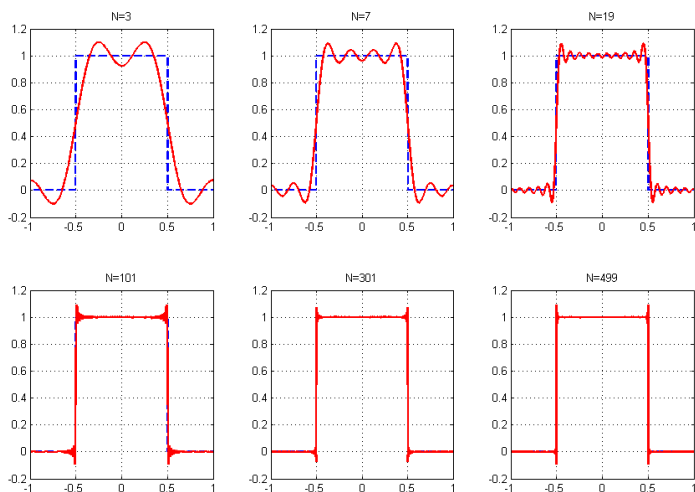
1899年，Gibbs解释了这一现象，因此被称为吉布斯现象。

吉布斯现象表明：傅里叶级数在信号的连续点处收敛于信号本身，在间断点处收敛于间断点左右极限的平均值。用有限项傅氏级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随项数的增加而减少。只是随着项数的增多，振荡频率变高，向间断点处压缩，从而使它所占有的能量逐步减少。

这正是由于傅里叶级数是在均方误差最小的准则下对信号的最佳近似所导致的必然结果。



## 吉布斯 (Gibbs) 现象



## 周期信号的傅里叶变换

到此为止，周期信号用傅里叶级数表示，非周期信号用傅里叶变换表示。如果能够把它们统一起来，无疑会给LTI系统的分析带来方便。

由于周期信号不满足Dirichlet条件，因而不能直接从定义出发建立其傅里叶变换表示。但Dirichlet条件仅仅是傅里叶变换存在的充分条件，因此建立周期信号的傅里叶变换表示是可能的。

我们已经知道  $x(t) = 1$  的傅里叶变换是  $X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$ 。下面考查一下  $X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$  应该对应于时域中的什么信号。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) e^{j\Omega t} d\Omega = e^{j\Omega_0 t}$$

即  $e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$ ，这表明周期性复指数信号的频谱是一个冲激。

将上述关系加以推广，于是当周期信号表示为傅里叶级数时：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} \leftrightarrow X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$



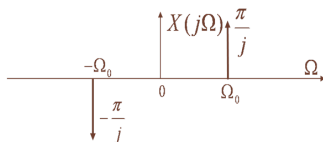
## 周期信号的傅里叶变换

这表明，周期信号可以用傅里叶变换来表示，它由一系列等间隔的冲激函数线性组合而成，每个冲激分别位于信号各次谐波的频率处，其强度是傅里叶级数系数的 $2\pi$ 倍。

例1:

$$x(t) = \sin \Omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t})$$

$$X(\Omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)]$$



例2:

$$x(t) = \cos \Omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t})$$

$$X(\Omega) = \pi [\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$



## 周期信号的傅里叶变换

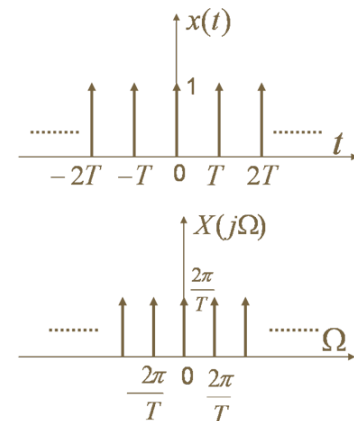
例3: 均匀冲激串

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_0 t}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{T})$$



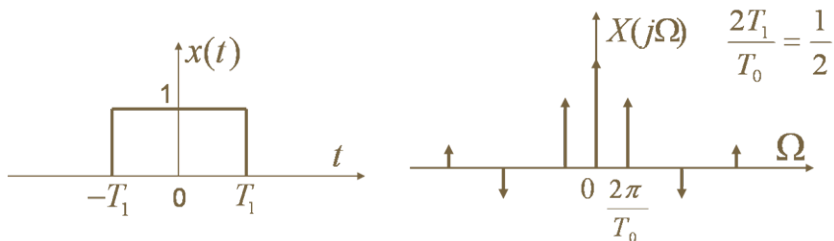
## 周期信号的傅里叶变换

例4: 周期性矩形脉冲信号

其傅里叶级数系数为:

$$A_k = \frac{\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\Omega_0 T_1)}{k} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$



## 连续时间傅里叶变换的性质(1)

本节讨论连续时间傅里叶变换的性质，旨在通过这些性质揭示信号时域特性与频域特性之间的关系。同时掌握和运用这些性质可以简化傅里叶变换对的求取。

### 1. 线性 (Linearity)

若:  $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$ ,  $y(t) \leftrightarrow Y(j\Omega)$

则有:  $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\Omega) + bY(j\Omega)$

### 2. 时移 (Time Shifting)

若:  $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$

则有:  $x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\Omega)e^{-j\Omega t_0}$

这表明: 信号的时移只影响它的相频特性, 其相频特性会增加一个线性相移。





## 连续时间傅里叶变换的性质(2)

### 3. 共轭对称性 (Conjugate and Symmetry)

若:  $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$  则有  $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \\ X^*(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\Omega t} dt \\ X^*(-j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

若  $x(t)$  是实信号, 则  $x(t) = x^*(t)$ ,  
于是有:  $X(j\Omega) = X^*(-j\Omega)$ .  
 $\Re[X(j\Omega)] = \Re[X^*(-j\Omega)]$   
 $\Im[X(j\Omega)] = -\Im[X^*(-j\Omega)]$

$x(t)$	$X(j\Omega)$
实信号	$X^*(j\Omega) = X(-j\Omega)$ 实部是偶函数, 虚部是奇函数 模是偶函数, 相角是奇函数
实偶函数	实偶函数
实奇函数	纯虚、奇函数
偶部+奇部	对应实部+虚部



## 连续时间傅里叶变换的性质(3)

### 4. 时域微分和积分 (Differential and Integral)

若:  $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$ , 则:  $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$ .

证明: 傅里叶反变换公式的两边对时间变量  $t$  微分, 可得

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\Omega X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad \square$$

该性质说明傅里叶变换可将时域的微分运算转变为频域的代数运算。

对信号在时域积分则相应为:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$$

由  $\delta(t) \leftrightarrow 1$  及时域积分性质, 可得  $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$ .



## 连续时间傅里叶变换的性质(4)

### 5. 尺度变换 (Scaling)

若:  $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$

则有

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

这表明: 信号如果在时域扩展  $a$  倍, 则其带宽相应压缩  $a$  倍, 反之亦然。这从理论上证明了时域与频域的相反关系, 也证明了信号的脉宽带宽积等于常数的结论。

作为特例:

若  $a = -1$ , 则有  $x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)$ .



## 连续时间傅里叶变换的性质(5)

### 6. 对偶性 (Duality)

若  $x(t) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 则  $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$

由对偶性可以方便地将时域的某些特性对偶到频域。

例: 求  $x(t)$  的傅里叶变换。 利用对偶性, 由时域特性推出频域特性。  
移频特性:

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \quad x(t)e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\Omega - \Omega_0)]$$

解: 由

频域微分特性:

$$e^{-a|t|}, a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \Omega^2} \quad -jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\Omega} X(j\Omega)$$

令  $a = 1$  并利用对偶性, 可得

频域积分特性:

$$X(\Omega) = 2\pi e^{-|\Omega|} \quad \frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\Omega} X(j\tau) d\tau$$



## 连续时间傅里叶变换的性质(6)

### 7. Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

这表明：信号的能量既可以在时域求得，也可以在频域求得。由于 $|X(\Omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布，因而称其为能量谱密度函数。

对周期信号也有相应的Parseval定理：

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |A_k|^2$$

$|A_k|^2$ 称为周期信号的功率谱。



## 连续时间傅里叶变换的性质(8)

### 9. 调制特性 (Modulation Property)

利用傅里叶变换的对偶性，可以从卷积特性推出与之对偶的调制特性。

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$$

又称**频域卷积特性**。

熟练掌握傅里叶变换的性质以及常用的基本傅里叶变换对，参见：

- 表4.1-傅里叶变换的性质；
- 表4.2-傅里叶级数的性质；
- 表4.3-常用傅里叶变换对。



## 连续时间傅里叶变换的性质(7)

### 8. 卷积特性

若： $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\Omega), x_2(t) \leftrightarrow X_2(\Omega)$

则： $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$

令 $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ ，对 $x(t)$ 直接作傅里叶变换，有

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\Omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)X_2(\Omega)e^{-j\Omega\tau} d\tau = X_1(\Omega)X_2(\Omega) \end{aligned}$$

卷积特性为在频域分析LTI系统提供了理论依据。



## LTI系统的频域分析

由时域分析法： $y(t) = x(t) * h(t)$

根据卷积特性，在频域有： $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$

频域分析的步骤：



之所以对LTI系统可以在频域上进行分析的本质原因是因为复指数信号是一切LTI系统的特征函数。





## 例1: 傅里叶变换时域积分特性的证明

因为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} = U(\Omega)$$

由卷积特性得

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= X(\Omega)U(\Omega) = X(\Omega) \left[ \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \right] \\ &= \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega) \end{aligned}$$

$$\text{所以有: } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$$



## 例2: 信号通过LTI系统

如果某LTI系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ , 系统的输入为 $x(t) = e^{-bt}u(t)$ ,  $b > 0$ , 求输出 $y(t)$ 。

$$X(\Omega) = \frac{1}{b + j\Omega}, \quad H(\Omega) = \frac{1}{a + j\Omega},$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(a + j\Omega)(b + j\Omega)}$$

将 $Y(\Omega)$ 展开成部分分式有  $a \neq b$ 时, 输出响应为

$$Y(\Omega) = \frac{A}{a + j\Omega} + \frac{B}{b + j\Omega} \quad y(t) = \frac{1}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt})u(t)$$

可求得:  $\begin{cases} A = 1/(b - a) \\ B = 1/(a - b) \end{cases}$   $a = b$ 时,  $y(t) = te^{-at}u(t)$   
技巧: 展开成部分分式, 然后可以利用常用的变换对和傅里叶变换的性质。



## 系统的频率响应

由于系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(\Omega)$ 在本质上反映了频率为 $\Omega$ 的复指数信号通过LTI系统时, 系统对信号所产生的影响, 所以称为系统的**频率特性**或**频率响应**。

鉴于 $h(t)$ 与 $H(\Omega)$ 是一一对应的, 因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。并非任何系统的 $H(\Omega)$ 都存在, 因此用频率响应表征系统时, 一般都限于对**稳定系统**。

对于线性常系数微分方程描述的LTI系统, 可以很简单地直接从方程求出频率响应 $H(\Omega)$ :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

对上式两边取傅里叶变换, 并利用时域微分特性可得到:

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\Omega)^k Y(\Omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\Omega)^k X(\Omega)$$



## 系统的频率响应—举例

因此, 系统的频率响应为:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\Omega)^k} \quad \rightarrow \text{是一个关于 } j\Omega \text{ 的有理函数。}$$

例: 某LTI系统由下列微分方程描述, 系统最初是松弛的。

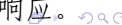
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

解: 根据上式可直接写出该系统的频率响应为:

$$H(\Omega) = \frac{j\Omega + 3}{(j\Omega)^2 + 3(j\Omega) + 2} = \frac{2}{j\Omega + 1} - \frac{1}{j\Omega + 2} \quad \rightarrow \text{部分分式分解}$$

作反变换可求得:  $h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ 。

可见对微分方程描述的LTI系统, 可以很方便地求出其单位冲激响应。







## 信号通过系统—举例

例1: 已知 $h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$ , 求 $x_1(t), x_2(t)$ 通过系统后的响应。

$$x_1(t) = \cos \frac{\pi}{2}t, \quad x_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \cos \frac{2\pi}{3}t + \cos \frac{4\pi}{3}t + \cos 3\pi t \right)$$

解: 系统的频率响应是门函数

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < 2\pi \\ 0, & |\Omega| > 2\pi \end{cases}$$

因此输入信号中低于 $2\pi$ 的频率分量不失真的通过, 而高于 $2\pi$ 的频率分量被完全衰减了。

所以:

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \cos \frac{2\pi}{3}t + \cos \frac{4\pi}{3}t \right)$$



## 信号通过系统—举例

例2: 求信号 $x(t) = \cos \Omega_0 t$ 通过系统 $h(t)$ 的响应。

解:  $x(t) \leftrightarrow \pi [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$ , 设 $h(t) \leftrightarrow H(j\Omega)$ , 则有

$$\begin{aligned} Y(j\Omega) &= X(j\Omega)H(j\Omega) \\ &= \pi [H(-j\Omega_0)\delta(\Omega + \Omega_0) + H(j\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0)] \end{aligned}$$

又 $H(-j\Omega) = H^*(j\Omega)$ , 设 $H(j\Omega_0) = Ae^{j\theta}$ , 则 $H(-j\Omega_0) = Ae^{-j\theta}$

$$Y(j\Omega) = A\pi [e^{-j\theta}\delta(\Omega + \Omega_0) + e^{j\theta}\delta(\Omega - \Omega_0)]$$

取傅里叶反变换可得:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\Omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\Omega_0 t} \\ &= \frac{A}{2} [e^{j(\Omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\Omega_0 t + \theta)}] = A \cos(\Omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$



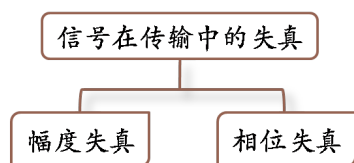
## 信号的不失真传输条件

结合第三章内容可知, 两个LTI系统级联后总的频率响应等于每个系统频率响应的乘积, 交换次序不影响总的频率响应; 并联后总的频率响应等于每个系统频率响应之和。

### 信号的不失真传输条件

信号的频谱 $X(\Omega)$ 通常是复函数, 可以表示为:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)}$$



- 在不同的应用场合, 对幅度失真和相位失真有不同的要求, 表现出不同的敏感程度。
- 在声音传输中, 主要关注幅度失真; 在图象、图形传输中主要关注相位失真。



## 信号的不失真传输条件

如果信号 $x(t)$ 经过系统传输后产生的输出为:

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

其中, $K$ 和 $t_0$ 均为常数。即信号经过传输后只发生幅度的比例变化和固定的时延, 则认为信号在传输过程中没有发生失真。此时有:

$$Y(\Omega) = KX(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$

$$H(\Omega) = Ke^{-j\Omega t_0}$$

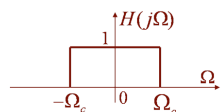
信号的不失真传输条件: 幅频特性为常数、相频特性呈线性。

对于物理可实现系统, 失真不可避免, 工程上力求在信号带宽范围内将失真控制在允许的指标内。因果系统的幅频特性和相频特性是互相制约的, 需要视应用场合的不同在二者中做出合理折衷。





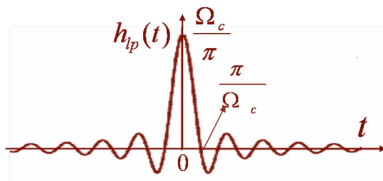
## 理想低通滤波器



$\Omega_c$ : 滤波器的截止频率  
 $0 < \Omega < \Omega_c$ : 滤波器的通带  
 $\Omega > \Omega_c$ : 滤波器的阻带

作傅里叶反变换可得理想滤波器的单位冲激响应:

$$h_{LP}(t) = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)$$



理想低通滤波器也可以具有线性相位特性, 此时在通带内有:

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$$

其中 $t_0$ 称为群时延。此时时域响应延时 $t_0$ 。

理想低通滤波器是非因果系统, 是物理不可实现的。



## 连续时间信号与离散时间信号

在实际生活中, 常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电影胶片等, 这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着内在的联系。在一定条件下, 连续时间信号可以用它的离散时间样本来表示而并不丢失原来信号所包含的信息。

随着数字技术和计算机技术的发展, 离散时间信号的处理由于更加灵活、快速、方便, 因而往往比处理连续时间信号更加可取。这就需要把连续时间信号转变成离散时间信号。

本节研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系, 主要包括:

- 在什么条件下, 一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
- 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。

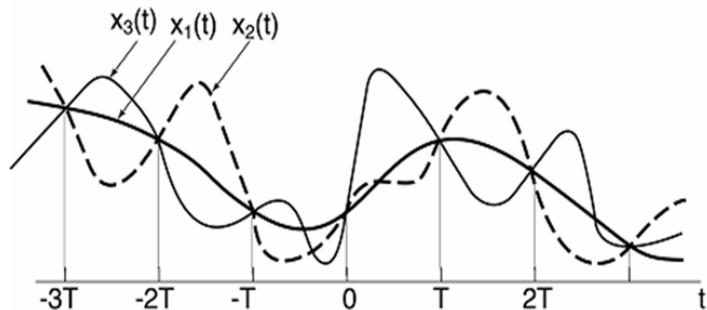


## 采(抽)样

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为采(抽)样。

在没有任何约束条件的情况下, 一个连续时间信号的一组离散时间样本是不能唯一地表征这个连续时间信号的。

对同一个连续时间信号, 当采样间隔不同时也会得到不同的样本序列。



## 抽样的数学模型

在时域:  $x_p(t) = x(t)p(t)$

在频域:

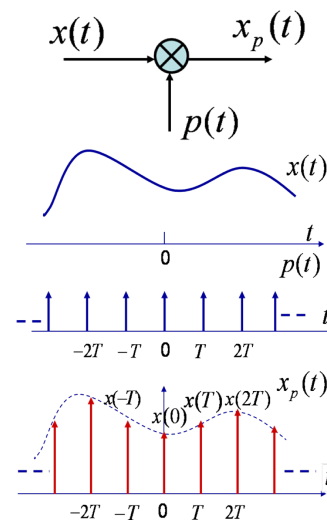
$$X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega)$$

当 $p(t)$ 为均匀冲激串时, 称为理想抽样。

在时域:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

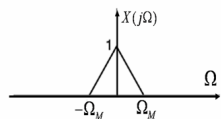




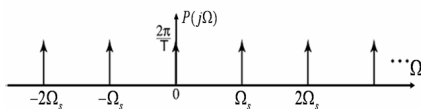
## 抽样的数学模型

在频域:

$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



$$X_p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} P(\Omega) * X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$$



可见, 在时域对连续时间信号进行理想抽样, 就相当于在频域将信号的频谱以抽样频率 $\Omega_s$ 为周期进行延拓。



## 奈奎斯特 (Nyquist) 抽样定理

定理 (奈奎斯特 (Nyquist) 抽样定理)

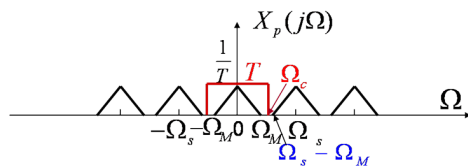
对带限于最高频率 $\Omega_M$ 的连续时间信号, 如果以 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_M$ 的频率进行理想采样, 则 $x(t)$  可以唯一地由其等间隔的样本 $x(nT)$ 所确定。

其中 $\Omega_s$ 称为奈奎斯特频率,  $2\Omega_M$ 称为奈奎斯特率, 是满足抽样定理要求的最低抽样频率。

在工程实际应用中, 理想滤波器是不可实现的。而非理想滤波器一定有过渡带, 因此实际采样时,  $\Omega_s$ 必须大于 $2\Omega_M$ 。

低通滤波器的截止频率必须满足:

$$\Omega_M < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_M)$$



并具有 $T$ 倍的通带增益。

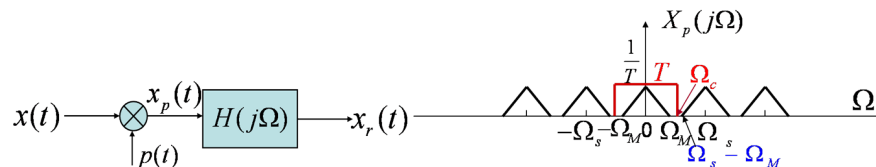


## 抽样的恢复

可见, 要想不失真地恢复信号, 必须保证在 $X_p(\Omega)$ 中不发生频谱的混叠。为此须满足:

- ①  $x(t)$ 必须带限于最高频率 $\Omega_M$ 。
- ② 抽样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_M$ 。

此时可由以下系统实现信号的恢复:



## 采样练习

已知信号 $x_1(t)$ 带限于100Hz, 而 $x_2(t)$ 带限于400Hz。现欲对下列信号进行采样, 求满足抽样定理的最低抽样频率。

- ①  $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t/2)$ ;
- ②  $y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ ;
- ③  $y_3(t) = x_1(2t) - x_2(t)$ ;
- ④  $y_4(t) = x_1(t) * x_2(t)$ 。

解: 只要求出上述各信号的最高频率即可。

- ① 时域展宽, 频域压缩, 因此 $x_2(t/2)$ 带限于200Hz, 所以 $y_1(t)$ 的最高频率为200Hz, 相应地最低采样频率为400Hz;
- ② 时域乘积, 频域卷积, 所以 $y_2(t)$ 的最高频率为500Hz, 相应地最低采样频率为1000Hz;
- ③ 时域压缩, 频域展宽, 所以 $x_1(2t)$ 的上限频率为200Hz,  $y_3(t)$ 的最高频率为400Hz, 相应地最低采样频率为800Hz;
- ④ 时域卷积, 频域乘积, 所以 $y_4(t)$ 的最高频率为100Hz, 相应地最低采样频率为200Hz。





## 从时域的角度研究重建信号的过程

若理想低通滤波器的单位冲激响应为 $h(t)$ ，则其输出为：

$$\hat{x}(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT)$$

可见，内插时以理想低通滤波器的单位冲激响应为内插函数。

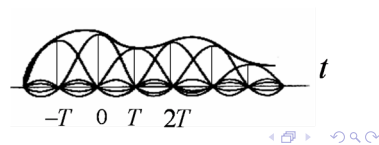
$$h(t) = \frac{\Omega_c T}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right) = \frac{\Omega_c T \sin \Omega_c t}{\pi \Omega_c t}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\Omega_c T}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c(t - nT)}{\pi}\right]$$

当取 $\Omega_c = \Omega_s/2$ 时，

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left[\frac{1}{T}(t - nT)\right]$$

这种内插称为时域中的带限内插。



## 本章小结

本章主要讨论了以下问题：

- 建立了连续时间周期信号的频域描述方法—傅里叶级数。
- 建立了连续时间非周期信号的频域描述方法—傅里叶变换。
- 通过傅立叶变换性质的讨论，研究了信号时域特性与频域特性的关系。
- 对连续时间LTI系统建立了频域分析的方法。
- 作为连续时间与离散时间信号的桥梁，讨论了信号的时域抽样。



## 作业

第一次：4.2(a)(c)(e) 4.4(a) 4.6(a)(c)(e)

第二次：4.8(a)(c)(e) 4.10 4.11(a)(b)(d)

第三次：4.14 4.16 4.3(a)(b) 4.18(1)

第四次：4.23 4.25(a)(b) 4.37 4.38