

# 信号与系统B Signals and Systems

## 第5章 离散时间信号与系统的频域分析

张建国

西安交通大学  
电子与信息工程学院

2013年11月



## 本章内容

- 1 引言
- 2 离散时间LTI系统的特征函数
- 3 周期信号与离散时间傅里叶级数
- 4 非周期信号与离散时间傅里叶变换
- 5 周期信号的离散时间傅里叶变换
- 6 离散时间傅里叶变换的性质
- 7 离散傅里叶变换DFT
- 8 离散时间LTI系统的频域分析
- 9 本章小结



## 基本要求

- 1 掌握复指数信号是一切LTI系统的特征函数的概念及以特征函数为基底对信号进行分解的基本思想方法;
- 2 掌握周期序列表示为离散时间傅立叶级数的方法, 周期性矩形脉冲序列频谱的特征;
- 3 掌握非周期信号的频域描述—离散时间傅立叶变换;
- 4 掌握常用信号的傅立叶变换及傅立叶变换的性质;
- 5 周期信号的离散时间傅立叶变换表示;
- 6 离散傅立叶变换(DFT), DFT与DFS的关系, DFT与DTFT的关系, DFT的性质;
- 7 离散时间LTI系统的频域分析方法, 系统频率响应的概念;
- 8 IIR系统与FIR系统的基本特征。



## 引言 (Introduction)

### 离散时间信号与系统

#### 发展

数字电路技术的发展、计算机的普遍使用、快速傅里叶变换算法的提出, 使得离散时间信号与系统的研究日趋完善, 应用领域迅速扩大。

#### 比较

本章采用与上一章相同的研究方法。可以看到, 离散时间的频域分析与连续时间的频域分析既有许多相似的地方, 也存在一些重要区别。

#### 学习

与前一章对比学习, 抓住它们之间的相似之处并掌握其区别, 对于更深地理解频域分析方法具有重要意义。





## 离散时间LTI系统的特征函数

与连续时间的情况一样，离散时间复指数信号，即复指数序列是一切离散时间LTI系统的特征函数。

由时域分析法： $x(n) = z^n$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k}$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} = z^n H(z)$$

$z^n$ 是系统的特征函数； $H(z)$ 是系统与特征函数相对应的特征值。

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

如果： $x(n) = \sum_k a_k z_k^n$ ，则 $y(n) = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$ 。

本章讨论形式为 $e^{j\omega n}$ 的复指数序列。



## 离散时间傅里叶级数的概念

复指数信号 $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 是一个以 $N$ 为周期的信号，把以 $N$ 为周期的所有的离散时间周期性复指数信号组合起来，就可以得到成谐波关系的信号集：

$$\varphi_k(n) = \left\{ e^{j(2\pi/N)kn} \right\} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$N$ 是这个信号集的基波周期，信号集中只有 $N$ 个信号是独立的。

$$\varphi_k(n) = \varphi_{k+rN}(n) \quad \text{与连续信号的不同之处}$$

可见，在频率上相差 $2\pi$ 整数倍的复指数序列都是相同的。

如果将信号集中所有独立的 $N$ 个信号线性组合起来，一定也是以 $N$ 为周期的离散时间信号。这就是接下来要介绍的离散时间傅里叶级数的概念。



## 离散时间傅里叶级数DTFS

若 $x(n)$ 是以 $N$ 为周期的离散时间信号，则

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

称为 $x(n)$ 的离散时间傅里叶级数表达式。

这表明，以 $N$ 为周期的离散时间周期信号可以分解成 $N$ 个独立的复指数谐波分量。

与连续时间傅里叶级数相同

$\dot{A}_k$ 称为傅里叶级数的系数，也称为 $x(n)$ 的频谱系数。

$x(n)$ 是实信号时： $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$   
 $\dot{A}_k$ 的实部、模是偶函数；虚部、相角是奇函数。

与连续时间傅里叶级数不同

- 级数中只有 $N$ 个独立的谐波分量。
- 离散时间傅里叶级数是一个有限项的级数。
- $k$ 只需取相继的 $N$ 个整数，可以从0到 $N-1$ ，也可以从1到 $N$ 。



## 傅里叶级数的系数

给级数表达式两边同时乘以 $e^{-j(2\pi/N)rn}$ ，并将相继的 $N$ 项对 $n$ 求和得到：

$$\begin{aligned} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(2\pi/N)rn} &= \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \end{aligned}$$

$$\text{由于 } \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-e^{j2\pi k}}{1-e^{j(2\pi/N)k}} = 0, & \text{其它 } k \end{cases}$$

所以当 $k=r$ 时有：

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn}$$

于是得到DTFS的两个关系式：



## 傅里叶级数的系数

如果不限制 $k$ 的范围,使其可以取任何整数,则有:  $\dot{A}_k = \dot{A}_{k+rN}$ 。

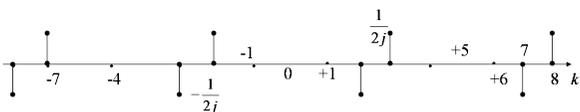
与连续时间信号不同:DTFS的系数以 $N$ 为周期的,也就是离散时间周期信号的频谱是以 $N$ 为周期的, $k$ 从0到 $N-1$ 的周期称为频谱的主值周期。

例:  $x(n) = \sin \omega_0 n$ , 当 $\omega_0/2\pi$ 是有理数时, $x(n)$ 是周期的。设 $\omega_0 = 2\pi m/N$ , 其中 $m=3, N=5$ 。试绘出 $x(n)$ 的频谱图

解:  $x(n)$ 可以用离散时间傅里叶级数表示为:

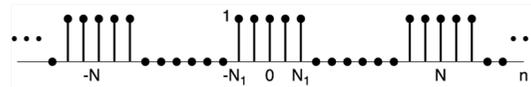
$$x(n) = \frac{1}{2j} \left[ e^{j(2\pi/N)mn} - e^{-j(2\pi/N)mn} \right]$$

$k$ 取0到4时有 $\dot{A}_3 = \frac{1}{2j}$ ;  $\dot{A}_2 = \dot{A}_{-3} = -\frac{1}{2j}$ ; 其余 $\dot{A}_k = 0$ 。



## 离散时间周期性矩形脉冲序列的频谱

考虑如图的离散时间周期性矩形脉冲序列的频谱:





## 由给定条件确定序列

例: 关于某一序列给出如下条件:

- ①  $x(n)$  是周期的, 周期  $N = 6$ ;
- ②  $\sum_{n=0}^5 x(n) = 2$
- ③  $\sum_{n=2}^7 (-1)^n x(n) = 1$
- ④ 在满足上述三个条件的所有信号中,  $x(n)$  在每个周期内的功率最小。

解:

$$\sum_{n=0}^5 x(n) e^{-jk(2\pi/N)n} = N \dot{A}_k$$

$$\text{当 } k = 0, \quad N \dot{A}_0 = \sum_{n=0}^5 x(n) = 2 \therefore \dot{A}_0 = \frac{1}{3}$$



## 由给定条件确定序列

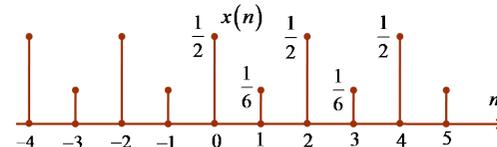
又根据(3):

$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x(n) = \sum_{n=2}^7 e^{j\pi n} x(n) = \sum_{n=2}^7 e^{j\frac{2\pi}{6}n} x(n) = N \dot{A}_3$$

所以:  $\dot{A}_3 = \frac{1}{6}$

由(4),  $P = \sum_{n=0}^5 |\dot{A}_k|^2$  所以:  $\dot{A}_1 = \dot{A}_2 = \dot{A}_4 = \dot{A}_5 = 0$

$$x(n) = \dot{A}_0 + \dot{A}_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$$



## 从傅里叶级数到傅里叶变换

在讨论周期性矩形脉冲信号的频谱时, 已经看到: 当周期信号的周期  $N$  增大时, 频谱的谱线间隔变小。在时域, 当  $N$  趋向于无穷大时, 周期信号将变为非周期信号, 离散频谱将变为连续频谱。

与连续时间信号相同, 任何周期信号都可以看成是一个非周期信号周期延拓的结果; 非周期信号也可以看成是周期信号的周期趋于无穷大时的极限。

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN) \quad x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

将周期信号  $\tilde{x}(n)$  表示为DTFS有:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j(2\pi/N)kn} \quad \dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)kn}$$



## 从傅里叶级数到傅里叶变换

注意到当  $|n| \leq N_1$  时,  $\tilde{x}(n) = x(n)$ , 将求和区间取在该周期内, 则:

$$N \dot{A}_k = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn}$$

当  $N \rightarrow \infty$ ,  $(2\pi/N)k \rightarrow \omega$ ,  $N \dot{A}_k \rightarrow X(e^{j\omega})$ , 又  $|n| \geq N_1$  时,  $x(n) = 0$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$  就定义为信号  $x(n)$  的离散时间傅里叶变换 (DTFT), 也称为  $x(n)$  的频谱密度。对  $\omega$  以  $2\pi$  为周期。

可以看出:

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \Big|_{\omega_0=2\pi/N}$$

- 周期性离散时间信号的DTFS系数就是与其对应的非周期信号的DTFT的样本;
- 非周期序列的DTFT就是与其对应的周期信号DTFS系数的包络。





## 从傅里叶级数到傅里叶变换

可将周期信号的DTFS改写为:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \xrightarrow{\omega_0=2\pi/N} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

当  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0 \rightarrow d\omega$ ,  $k\omega_0 \rightarrow \omega$ , 求和转化为积分:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$k$  在一个周期范围内改变时,  $k\omega_0$  在  $2\pi$  范围内改变, 所以积分区间为  $2\pi$ 。

离散时间傅里叶变换对 (DTFT对):

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

离散时间序列可以分解为频率在  $2\pi$  区间上分布的、幅度为  $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$  的复指数分量的线性组合。



## DTFT的收敛问题

由于  $X(e^{j\omega})$  是一个无穷级数, 因此必然存在收敛问题, 也就是说, 对无限长的非周期信号, 并不一定保证它的DTFT都存在。

与连续时间傅里叶变换类似, 收敛条件有两组:

- 1 绝对可和:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ , 则  $X(e^{j\omega})$  一定存在, 且级数一致收敛于  $X(e^{j\omega})$
- 2 平方可和:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$ , 则  $X(e^{j\omega})$  也一定收敛。

$$\text{由于: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2$$

故两组条件并不等价, 绝对可和的信号一定平方可和, 但反之不成立。

如果信号能量有限, 但不绝对可和, 则级数以均方误差等于零的方式收敛于  $X(e^{j\omega})$ , 此时在间断点处会产生Gibbs现象。



## 常用信号的离散时间傅里叶变换(1)

$$x(n) = a^n u(n), |a| < 1$$

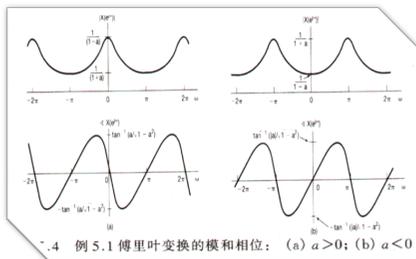
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

复函数, 模和相位:

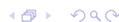
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\arctan \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$

幅度频谱和相位频谱



例 5.1 傅里叶变换的模和相位: (a)  $a > 0$ ; (b)  $a < 0$



## 常用信号的离散时间傅里叶变换(2)

$$x(n) = a^{|n|}, |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^n$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

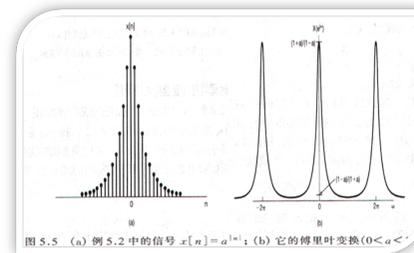


图 5.5 (a) 例 5.2 中的信号  $x[n] = a^{|n|}$ ; (b) 它的傅里叶变换 ( $0 < a < 1$ )

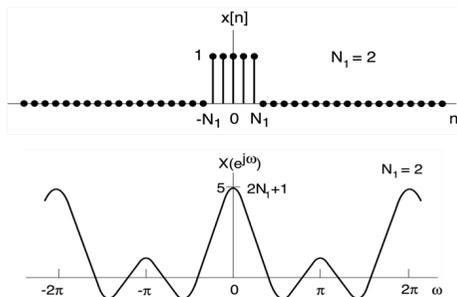




### 常用信号的离散时间傅里叶变换(3)

矩形脉冲信号:  $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin[(N_1 + \frac{1}{2})\omega]}{\sin(\omega/2)}$$



实偶序列 ⇔ 实偶函数

与对应的周期信号比较, 此时的频谱正是周期性矩形脉冲信号频谱的包络。

与对应的连续时间信号比较。



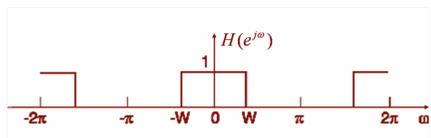
### 常用信号的离散时间傅里叶变换(5)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$\therefore x(n) = 1 \text{ 时, } X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

理想低通滤波器:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



### 常用信号的离散时间傅里叶变换(4)

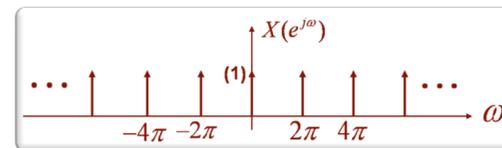
$$x(n) = \delta(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

单位脉冲信号包含了所有频率分量, 且幅度和相位都相同。LTI系统对这样的信号的响应完全反映了系统本身的特性。故可用单位脉冲响应表征LTI系统。

频域均匀冲激串:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$



### 常用信号的离散时间傅里叶变换(6)

符号函数:  $\text{sgn}(n)$

该序列可以看成是如下序列在a趋于1时的极限:

$$a^n u(n) - a^{-n} u(-n), \quad 0 < a < 1$$

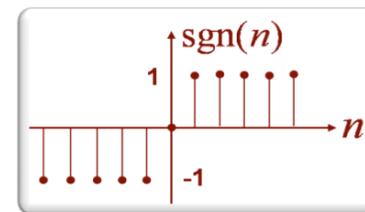
易知此序列的傅里叶变换为:

$$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{-2ja \sin \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

当a趋于1时, 可得到:

$$\text{sgn}(n) \leftrightarrow \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

实奇序列 ⇔ 虚奇频谱





## 常用信号的离散时间傅里叶变换(7)

单位阶跃序列 $u(n)$ 可以表示为:  $u(n) = \frac{1}{2} [1 + \text{sgn}(n) + \delta(n)]$

根据前面讨论过的傅里叶变换对, 可以得出:

$$1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad \delta(n) \leftrightarrow 1 \quad \text{sgn}(n) \leftrightarrow \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

$$\text{于是有: } u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$\text{对连续信号有: } u(t) \leftrightarrow \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

对比可以看出, DTFT中的 $1 - e^{-j\omega}$ 就相当于CTFT中的 $j\Omega$ 。



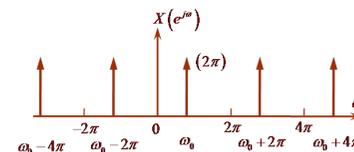
## 周期性的频域冲激串

对连续时间信号, 有 $e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0)$ , 由此推断, 在离散时间信号中也应该有类似的情况, 从而可以用DTFT将离散时间周期信号与非周期信号统一起来。

由于DTFT是以 $2\pi$ 为周期的, 考虑如下周期性的频域冲激串:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$x(n) = \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$



把周期性序列表示为DTFS:  $x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 n}$   $\omega_0 = 2\pi/N$   
则根据上述变换对, 可以得到:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi \dot{A}_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l), \quad \omega_0 = 2\pi/N$$



## 离散时间周期信号的DTFT

将 $k$ 的取值范围选为 $k = 0 \sim N - 1$ , 则上式可展开为:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= 2\pi \dot{A}_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l) + 2\pi \dot{A}_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \dots \\ &\quad + 2\pi \dot{A}_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (N-1)\omega_0 - 2\pi l], \quad \omega_0 = 2\pi/N \end{aligned}$$

考虑到 $\dot{A}_k$ 本身对 $\omega$ 就是以 $2\pi$ 为周期的, 可以将 $k$ 的范围扩大为所有整数:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k) \quad \text{离散时间周期信号的DTFT}$$



## 离散时间周期信号的DTFT—举例

例1: 求 $x(n) = \cos \omega_0 n$ 的DTFT, 当 $\omega_0/2\pi$ 为有理数时 $x(n)$ 是周期的。

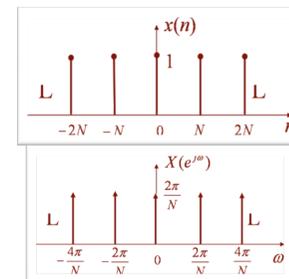
$$x(n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$$

例2: 均匀脉冲串 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn} = 1/N$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$



时域均匀脉冲序列的频谱在频域也是一个均匀冲激串。而且还可以看到, 在离散时间的情况下, 时域与频域之间也存在着相反的关系。



## 离散时间傅里叶变换的性质

通过对DTFT性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。



DTFT有很多与CTFT类似的性质，当然也有某些明显的差别。

### 1. 周期性 (periodic)

DTFT对于 $\omega$ 总是以 $2\pi$ 为周期的，这是与CTFT的重大区别。

### 2. 线性 (linearity)

$$\text{若 } x_1(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}); \quad x_2(n) \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

$$\text{则有 } ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 5. 时域差分与求和 (differencing and summation)

时域差分与CTFT的时域微分特性相对应:

$$\text{若 } x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \text{则有 } x(n) - x(n-1) \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

时域求和与CTFT的时域积分相对应:

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

又一次看到，DTFT中的 $1 - e^{-j\omega}$ 就相当于CTFT中的 $j\Omega$ 。

时域求和性质可以用后面的卷积性质证明。



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 3. 共轭对称性 (conjugate and symmetry)

与CTFT相同，有以下结论:

$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
实信号	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ 实部是偶函数，虚部是奇函数 模是偶函数，相角是奇函数
实偶函数	实偶函数
实奇函数	纯虚、奇函数
偶部+奇部	对应实部+虚部

### 4. 时移特性 (shifting)

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \text{then } x(n - n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

信号在时域的平移不会改变其幅频特性，只会给相频特性附加一个线性的相移。



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 6. 时域和频域的尺度变换 (decimation & interpolation)

由于离散时间信号的自变量只能取整数值，因此不能像连续时间信号那样进行尺度变换。这里的尺度变换只是对序列的长度变化而言的，其实是信号的抽取和内插。

$$\text{定义信号: } x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{k}), & n \text{ 是 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(kr) e^{-j\omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) e^{-j\omega rk} = X(e^{jk\omega}) \end{aligned}$$

即 $x_{(k)}(n) \leftrightarrow X(e^{jk\omega})$ 。当 $k = -1$ 时，有 $x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$ 。





## 离散时间傅里叶变换的性质

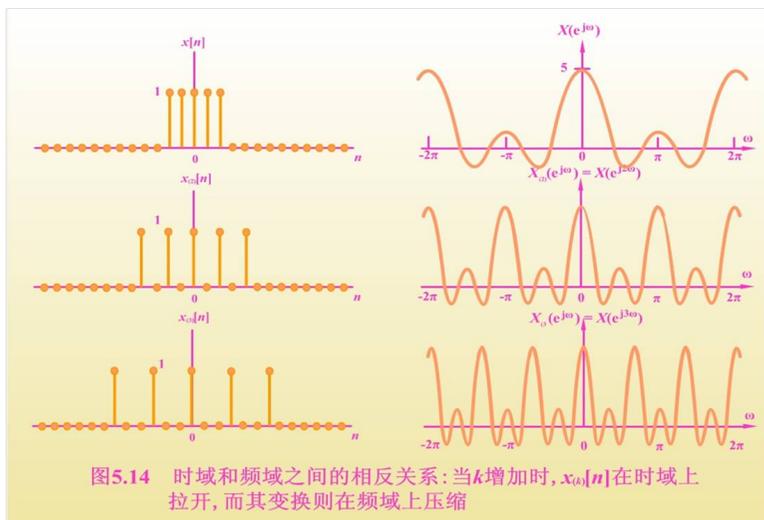


图5.14 时域和频域之间的相反关系:当 $k$ 增加时,  $x_k[n]$ 在时域上拉开, 而其变换则在频域上压缩



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 7. 频域微分特性

如果  $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ , 两边同时对  $\omega$  微分有:

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} jnx(n)e^{-j\omega n}, \quad nx(n) \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

### 8. 卷积特性 (convolution)

与CTFT的卷积特性完全相同, 有:

$$\begin{aligned} \text{if } x(n) &\leftrightarrow X(e^{j\omega}), \quad h(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) \\ \text{then } x(n) * h(n) &\leftrightarrow X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

卷积特性是对LTI系统进行频域分析的理论基础。

时域求和特性可用卷积特性证明。  $\sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * u(n)$



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 9. 调制特性

$$\begin{aligned} \text{if } x(n) &\leftrightarrow X(e^{j\omega}), \quad y(n) \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) \\ \text{then } x(n)y(n) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \end{aligned}$$

由于  $X(e^{j\omega})$ 、 $Y(e^{j\omega})$  都是以  $2\pi$  为周期的, 因此上述卷积称为**周期卷积**。

周期卷积与普通卷积的区别仅在于积分区间是一个周期, 卷积的结果也是周期性的。

考察  $x(n)e^{j\omega_0 n}$  的DTFT, 利用调制特性可以得到:

$$X(e^{j\omega}) \otimes \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) = \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) \delta(\omega - \theta - \omega_0) d\theta = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

$$\text{移频特性: } x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 10. 帕斯瓦尔定理 (Parseval)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

对于周期信号则相应为:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |A_k|^2$$

与连续时间信号的Parseval定理类似, 推导也完全类似。

$|X(e^{j\omega})|^2 \rightarrow$  称为  $x(n)$  的能量谱密度。

$|A_k|^2 \rightarrow$  称为周期信号的功率谱。



## 离散时间傅里叶变换的性质

### 11. 对偶性

#### 1) 离散时间傅里叶级数的对偶

将周期信号  $x(n)$  的傅里叶级数系数表示为:

$$a(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn}$$

对换  $k$  和  $n$ , 有

$$a(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x(k) e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x(-k) e^{j(2\pi/N)kn}$$

上式表明,  $\frac{1}{N}x(-k)$  正是以  $N$  为周期的序列  $a(n)$  的离散时间傅里叶级数的系数, 于是得到对偶关系

$$\begin{aligned} x(n) &\stackrel{\text{DTFS}}{\longleftrightarrow} a(k) = \dot{A}_k \\ a(n) &\stackrel{\text{DTFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x(-k) \end{aligned}$$



## 离散时间傅里叶变换的性质

利用对偶性可以很方便地将DTFS在时域得到的性质对偶到频域, 得到频域相应的性质。

#### 例1: 从时移到频移

利用时移特性有:

$$a(n - n_0) \leftrightarrow \frac{1}{N}x(-k) e^{-j(2\pi/N)kn_0}$$

由对偶性有:

$$\frac{1}{N}x(-n) e^{-j(2\pi/N)Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N}a(-k - M)$$

$$\therefore x(-n) \leftrightarrow a(-k)$$

$$\therefore x(n) e^{j(2\pi/N)Mn} \leftrightarrow a(k - M)$$

$$x(n) \stackrel{\text{DTFS}}{\longleftrightarrow} a(k) = \dot{A}_k$$

$$a(n) \stackrel{\text{DTFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x(-k)$$



## 离散时间傅里叶变换的性质

#### 例2: 由卷积特性到相乘特性

DTFS的时域卷积特性为:

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow N \dot{A}_k \dot{B}_k$$

令  $\dot{A}_n = a(n)$ ,  $\dot{B}_n = b(n)$ .

有  $a(n) \leftrightarrow \frac{1}{N}x_1(-k)$   $b(n) \leftrightarrow \frac{1}{N}x_2(-k)$

由时域卷积特性有:

$$a(n) \otimes b(n) \leftrightarrow \frac{1}{N}x_1(-k) \cdot \frac{1}{N}x_2(-k) \cdot N = \frac{1}{N}x_1(-k) \cdot x_2(-k)$$

由对偶性:

$$\frac{1}{N}x_1(-n)x_2(-n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} a(m)b(-k-m)$$

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \sum_{m=\langle N \rangle} a(m)b(k-m) = a(k) \otimes b(k)$$



## 离散时间傅里叶变换的性质

#### 2) DTFT与CTFS间的对偶:

由DTFT有:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

由于  $X(e^{j\omega})$  对于  $\omega$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 当其被视为一个时域的周期信号时, 可以将它展开为连续时间傅里叶级数。此时信号的周期为  $2\pi$ , 基波频率为 1, 于是有:

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) e^{jkt} \quad a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jt}) e^{-jkt} dt$$

比较  $x(n)$  和  $a(k)$  的表达式, 有:  $x(k) = a(-k)$  或  $a(k) = x(-k)$

于是得到对偶关系对:  $x(n) \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \quad X(e^{jt}) \stackrel{\text{CTFS}}{\longleftrightarrow} x(-k)$



## 离散时间傅里叶变换的性质

利用这一对偶关系，可以将DTFT的若干特性对偶到CTFS中去，或者反之。

例：从CTFS的时域微分到DTFT的频域微分

CTFS的时域微分特性：

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{CTFS}} j\frac{2\pi}{T}k\dot{A}_k$$

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\text{CTFS}} x(-k)$$

$$\frac{d}{dt}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\text{CTFS}} j\frac{2\pi}{T}kx(-k) = jkx(-k), \quad (T = 2\pi)$$

由对偶关系有：

$$-jnx(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) \rightarrow \text{DTFT的频域微分特性}$$



## 离散时间傅里叶变换的性质

综合讨论连续时间和离散时间的周期和非周期信号，以及连续时间和离散时间的傅里叶级数和傅里叶变换，注意以下对称关系：

一切离散信号的频谱都是周期的，这是因为时域抽样必然伴随着频谱的周期性延拓；

一切周期信号的频谱都是离散的，这是因为频域抽样同时伴随着时域信号的周期性延拓；

非周期信号的频谱是连续的（频域取包络），连续信号的频谱都是非周期的（对偶性）。

DTFS、DTFT的性质及常用基本变换对见表5.1 ~ 5.3。



## 离散傅里叶变换DFT(Discrete Fourier Transform)

- 离散时间傅里叶变换（DTFT）在频域是连续函数。为了在频域进行数字处理，就需要将其离散化，即需要一种时域离散、频域也离散的关系。而离散时间周期信号及其DTFS基本满足这一要求。
- DTFS（或者以后的DFS）的本质是将时域 $N$ 个独立的点变换为频域 $N$ 个独立的点，将一个周期序列取主周期，即得 $N$ 点有限长序列，对其DTFS（或者以后的DFS）系数取其主周期也是 $N$ 个独立的点。

可以认为时域 $N$ 点有限长序列与频域 $N$ 点有限长序列之间有一种变换关系，这种关系就称为离散傅里叶变换，简称DFT。要注意区分离散傅里叶变换（DFT）和离散时间傅里叶变换（DTFT）。

定义矩形窗序列：

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



## 离散傅里叶变换DFT(Discrete Fourier Transform)

$x(n)$ 是一个长为 $N$ 的有限长序列，将其以 $N$ 为周期延拓成周期序列：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-rN) \xrightarrow{\text{记为}} \tilde{x}(n) = x((n))_N$$

$$\text{则有 } \tilde{x}(n) = x((n))_N \quad x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

按DTFS的定义表示周期信号： 变为离散傅里叶级数DFS表示

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{A}_k e^{j(2\pi/N)kn} \quad \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \quad \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

其中： $N\dot{A}_k \rightarrow \tilde{X}(k)$ ,  $e^{-j(2\pi/N)kn} \rightarrow W_N$ 。





## 离散傅里叶变换DFT (Discrete Fourier Transform)

这样变形的目的是使其与DTFT的形式相类似。

将 $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{X}(k)$ 都取其主值周期，求和范围均为区间 $0 \sim N-1$ ，可得：

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

这就是有限长序列的DFT对。这表明：时域的 $N$ 点有限长序列 $x(n)$ 可以变换成频域的 $N$ 点有限长序列 $X(k)$ 。

很显然，DFT与DFS之间存在着以下关系：

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N, \quad X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$



## DFT与频域抽样的关系

对有限长序列 $x(n)$ 做DTFT，有 对比DFT：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

可以看出：

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

这表明，有限长序列的DFT正是对该序列的DTFT在一个周期内等间隔抽 $N$ 个点所得到的样本。

应该强调指出：DFT并不是有限长序列的 $x(n)$ 的频谱，只是其频谱的采样。DFT在一定程度上反映了 $x(n)$ 的频谱。只有在满足频域采样的要求时，DFT才可以完全代表信号的频谱。



## 频域抽样理论

回忆均匀脉冲串的DTFT：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN) \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

- ① 频域采样对应着时域周期性延拓，要求 $x(n)$ 时限。若 $x(n)$ 有 $M$ 点，对其频谱在一个周期内采样 $N$ 点，那么 $x(n)$ 将以 $N$ 为周期延拓。只有当 $N \geq M$ 时，这种延拓才不会发生混叠，即在一个周期内至少要采样 $M$ 点才能恢复原信号。
- ② 若 $x(n)$ 非时限，则不论在频谱的一个周期采样多少点，都无法从周期延拓的信号中恢复原信号。这就是为什么DFT只能对有限长序列而言的根本原因。



## 离散时间LTI系统的频域分析

频域分析的**理论基础**：复指数信号是一切LTI系统的特征函数；傅立叶变换的卷积特性。

设某离散时间LTI系统的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，输入为 $x(n)$ ，则

时域： $y(n) = x(n) * h(n)$

频域： $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

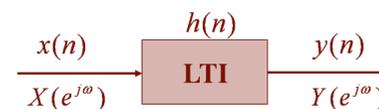
$H(e^{j\omega})$ 是 $h(n)$ 的DTFT，称为系统的频率响应。

若 $x(n)$ 是以 $N$ 为周期的信号，有DTFS：

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

则系统的响应 $y(n)$ 也以 $N$ 为周期的：

$$y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k H(e^{j(2\pi/N)k}) e^{j(2\pi/N)kn}$$





## 系统的频率响应

若 $x(n)$ 是一个有限长序列，且系统的 $h(n)$ 也是一个有限长序列时，则在满足由圆周卷积求线性卷积的条件下，它们的DFT满足：

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

可通过DFT利用FFT算法求系统响应。

- ① 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 刻画了LTI系统的频率特性，它是系统单位脉冲响应的傅里叶变换，可以完全表征LTI系统。
- ② 与连续时间的情况相类似，系统单位脉冲响应绝对可和，它的频率响应存在。说明稳定系统可以用频率响应来表征。
- ③ 级联系统的频率响应等于各子系统频率响应的乘积；并联系统的频率响应等于各子系统频率响应之和。



## 由线性常系数差分方程表征的系统

如果已知系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ，则可由DTFT求出频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。离散时间LTI系统往往由线性常系数差分方程描述，其一般形式为：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

两边同时进行DTFT，并应用时移特性，整理后可以得到：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

这表明：由LCCDE描述的离散时间LTI系统的频率响应是一个关于 $e^{-j\omega}$ 的有理函数。分子多项式的系数对应于差分方程右边各项的系数，而分母多项式的系数对应于差分方程左边各项的系数。



## 求离散时间LTI系统的频率响应—举例

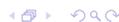
- 与连续时间LTI系统的情况相同，由差分方程可以写出系统的频率响应，作反变换即可得到相应的单位脉冲响应。
- 频率响应是有理函数，在频域分析时，能够正确地进行部分分式展开并熟练掌握一些常用的变换对和性质是至关重要的。

例：求 $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = 2x(n)$ 的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \\ &= \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

$$h(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

通过频率响应求出系统的单位脉冲响应，是实际应用中获得 $h(n)$ 的主要方法。



## IIR系统与FIR系统

若除 $a_0$ 外，其余的 $a_k$ 均为零，则：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}$$

在此情况下，系统的单位脉冲响应为：

$$h(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$

显然， $h(n)$ 是一个长为 $M+1$ 的有限长序列。因此将此类系统称为有限长单位脉冲响应系统，简称为FIR (Finite Impulse Response) 系统。

此时描述系统的差分方程变为：

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$





## IIR系统与FIR系统

求解这类差分方程无需迭代运算，称为非递归方程。这种方程所描述的系统称为非递归系统。

若除 $a_0$ 外，还有其它的 $a_k$ 不为零，则相应的 $h(n)$ 将是无限长序列。因此称这种系统为无限长单位脉冲响应系统，简称为IIR (Infinite Impulse Response) 系统。

此时差分方程表示为：

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

求解此差分方程需要进行迭代运算，因此称为递归方程，它所描述的系统也称为递归系统。

IIR系统和FIR系统是非常重要的两大类离散时间LTI系统。它们的特性、结构以及设计方法都有很大区别。



## 本章小结

- 建立了离散时间周期信号频域描述方法—离散时间傅里叶级数DTFS (DFS)。
- 建立了离散时间非周期信号的频域描述方法—离散时间傅里叶变换DTFT。
- 常用信号的DTFT、DTFT的性质及周期信号的DTFT。
- 介绍了离散傅立叶变换的概念、定义及其与有限长序列频谱的关系。
- 对离散时间LTI系统建立了频域分析的方法。

作业：

第1次：5.1(a)(c)(e)，5.4，5.6(a)(c)(g)(j)

第2次：5.8，5.9，5.10，5.11

第3次：5.34(a)(b)(d)，5.35(a)(c)，5.36(b)(d)(f)

