

信号与系统B Signals and Systems

第6章 拉普拉斯变换

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2013年11月



本章内容

- 1 双边拉普拉斯变换
- 2 拉普拉斯变换的收敛域
- 3 拉普拉斯变换的性质
- 4 常用信号的拉普拉斯变换
- 5 拉普拉斯反变换
- 6 连续时间LTI系统的复频域分析
- 7 单边拉普拉斯变换
- 8 利用单边拉普拉斯变换分析增量线性系统
- 9 本章小结



基本要求

- 1 掌握双边拉普拉斯变换的定义与收敛域、零极点图的概念，及其与傅里叶变换的关系；
- 2 各类信号拉普拉斯变换收敛域的基本特征；
- 3 掌握拉普拉斯变换的性质；常用信号的拉普拉斯变换，通过部分分式展开和常用变换对求取拉普拉斯反变换的方法；
- 4 掌握LTI系统的复频域分析方法；
- 5 掌握单边拉普拉斯变换及利用单边拉普拉斯变换分析增量线性系统的方法。



双边拉普拉斯变换的定义

将第4章中连续时间LTI系统的特征函数（复正弦函数） $e^{j\Omega t}$ 扩展为复变量 $s(s = \sigma + j\Omega)$ 的复指数函数 e^{st} ，即为拉普拉斯变换，又称复频域分析。

复指数输入信号 e^{st} 是一切连续时间LTI系统的特征函数。当系统的单位冲激响应为 $h(t)$ 时，系统的输出响应为：

$$y(t) = H(s)e^{st}, \text{ 其中 } H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$$

s 为纯虚数时对应 $h(t)$ 的傅里叶变换。

与此对应，信号 $x(t)$ 的**双边拉普拉斯变换**定义为：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{st} dt$$

简称拉氏变换，它是关于自变量 s 的函数。自变量 s 一般而言通常是复数，具有 $s = \sigma + j\Omega$ 的形式。其中 σ 和 Ω 分别是 s 的实部和虚部。





拉氏变换和傅里叶变换之间的关系

对一般的 $s(s = \sigma + j\Omega)$ 来说, 上式可改写为:

$$X(\sigma + j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\Omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\Omega t} dt$$

所以拉氏变换是傅氏变换的推广。 $x(t)$ 的拉氏变换可以看成它乘以一个实指数信号 $e^{-\sigma t}$ 后的傅氏变换。

只要有合适的 σ , 就可以使许多本来傅氏变换不收敛的函数, 在引入 $e^{-\sigma t}$ 后满足收敛条件。所以拉氏变换的收敛性要比傅氏变换的收敛性强, 这也是本章要讨论拉氏变换的主要原因之一。

如果 $X(s)$ 在 $s = j\Omega$ 时收敛, 则有

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad \text{即 } X(s)|_{s=j\Omega} = X(j\Omega)$$

说明傅里叶变换是拉氏变换在 $j\Omega$ 轴上的特例。



拉普拉斯反变换

利用傅里叶变换的反变换, 有:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{(\sigma+j\Omega)t} d\Omega$$

若令 $s = \sigma + j\Omega$, 则 $d\Omega = \frac{1}{j}ds$, 所以有:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

物理意义: 信号 $x(t)$ 可以分解成为无穷多个复振幅为 $\frac{X(s)}{2\pi j}$ 的复指数信号 e^{st} 的线性组合。

拉氏变换对:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$



收敛域(Region of Convergence)的概念

由上节知, 只要 $x(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件, $x(t)$ 的拉普拉斯变换就一定存在。而 $x(t)e^{-\sigma t}$ 是否绝对可积既取决于信号 $x(t)$ 的性质, 也取决于参数 $\sigma = \Re\{s\}$ 的选取。

把使信号 $x(t)$ 的拉氏变换存在的 s 值的范围称为信号 $x(t)$ 拉氏变换的**收敛域**, 简记为ROC, 常用 s 平面的阴影部分表示。

为了说明拉氏变换的收敛域, 考虑一些常见信号的拉氏变换, 并注意信号的时域特性与收敛域的关系。

例1: 考察信号 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 的拉氏变换及收敛域。

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \Big|_0^{+\infty}$$

只有 $\Re\{s\} + 1 > 0$ 时, 积分收敛, 此时

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$



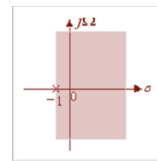
收敛域(Region of Convergence)的概念

例2: 考察信号 $x(t) = -e^{-t}u(-t)$

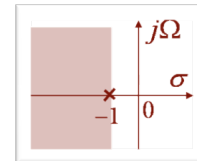
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-t}u(-t)e^{-st} dt = \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \Big|_{-\infty}^0$$

$$-e^{-t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} < -1$$

可见, 两个不同的信号具有相同的拉氏变换, 仅仅是ROC不同。这表明, 只有拉氏变换式和ROC一起才能与信号一一对应。



: 例1的收敛域



: 例2的收敛域

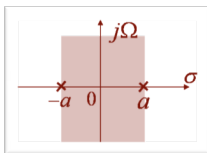


收敛域(Region of Convergence)的概念

例3: 双边信号 $x(t) = e^{-a|t|}$ 的拉氏变换式和收敛域。

$$X(s) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{+\infty}$$



- $a > 0$ 时, 两项具有公共收敛域 $-a < \Re\{s\} < a$ 。此时 $X(s)$ 存在,

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$

- $a < 0$ 时, 两个ROC无公共区域, $X(s)$ 不存在。

结论:

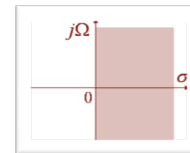
- ① 拉氏变换也存在收敛问题;
- ② ROC通常是一个平行于 $j\Omega$ 轴的带状区域。



收敛域(Region of Convergence)的概念

例4: 单位阶跃信号 $u(t)$ 的拉氏变换。

$$U(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0$$



例5: 单位冲激函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换。

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

ROC为整个 s 平面。



由拉氏变换求傅氏变换

- 当 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 的收敛域包含 $j\Omega$ 轴时, $x(t)$ 的傅氏变换 $X(j\Omega)$ 存在: $X(\Omega) = X(s)|_{s=j\Omega}$
- 若 $X(s)$ 的ROC不含 $j\Omega$ 轴, 那么 $X(j\Omega)$ 有可能存在, 也有可能不存在。

- 一般来说, 若 $X(s)$ 的ROC不含 $j\Omega$ 轴, 而且 $j\Omega$ 轴不是ROC的边界, 则 $x(t)$ 的傅氏变换不存在。如例2中的信号 $x(t) = -e^{-t}u(-t)$ 的傅氏变换就不存在。
- 若ROC不含 $j\Omega$ 轴, 但 $j\Omega$ 轴是 $X(s)$ 的ROC的边界, 那么 $x(t)$ 的傅氏变换可用冲激函数表示。

$$X(\Omega) = X(s)|_{s=j\Omega} + \pi \sum_{k=1}^n a_k \delta(\Omega - \Omega_k)$$

其中: Ω_k 是 $X(s)$ 在 $j\Omega$ 上的极点, a_k 为各极点所对应的留数。

如单位阶跃函数 $u(t)$, $U(s) = 1/s$, $\Re\{s\} > 0$, $j\Omega$ 轴是ROC的边界, $X(s)$ 的极点为 $s = 0$, 极点处的留数为1, 所以: $U(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$



拉氏变换的零极点图

由以上例子可以看到, 一般情况下 $X(s)$ 可以表示为两个多项式之比:

$$X(s) = \frac{E(s)}{D(s)}$$

分子多项式 $E(s)$ 的根称为**零点**; 分母多项式 $D(s)$ 的根称为**极点**。

将 $X(s)$ 的全部零点和极点表示在 s 平面上, 就构成了**零极点图**。

零极点图及其收敛域可以表示一个拉氏变换, 最多存在常数因子的差异。因此, 零极点图是拉氏变换的图示方法。



收敛域的特征

由例子可以看出, 若 $X(s)$ 存在, 则其收敛域边界的位置是由 $X(s)$ 的极点决定的。各种类型的信号, 其拉氏变换的ROC具有一些普遍的特征:

特征1: ROC由 s 平面上平行于 $j\Omega$ 轴的带状区域组成。

说明: 决定 $x(t)e^{-\sigma t}$ 是否可积的只是 s 的实部, 而与 s 的虚部无关。由于ROC只取决于 s 的实部, 因此ROC的边界必然平行于 $j\Omega$ 轴。

特征2: 有理拉氏变换的ROC内不包含任何极点。

说明: 如果在ROC内有一个极点, 则 $X(s)$ 在该点为无穷大, 拉氏变换的积分在该点就不可能收敛。

特征3: 如果信号 $x(t)$ 是时限的, 并且至少存在一个 s 值, 使其拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则其ROC是整个 s 平面。

说明: 设 $x(t)$ 是 $[t_1, t_2]$ 上的时限信号, $s = s_0$ 是使其拉氏变换存在的 s 值, 则有: $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$, $\sigma_0 = \Re\{s_0\}$



收敛域的特征

对任意的 s 有:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma-\sigma_0)t} dt \quad \sigma = \Re\{s\}$$

在有限持续期 $[t_1, t_2]$ 内,

如果 $\sigma < \sigma_0$, 则

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq e^{-(\sigma-\sigma_0)t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

如果 $\sigma > \sigma_0$, 则

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq e^{-(\sigma-\sigma_0)t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

因此对任意 s 有: $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

即在整个 s 平面上绝对可积, $X(s)$ 在整个 s 平面收敛。



收敛域的特征

特征4: 若 $x(t)$ 是右边信号, 且其拉氏变换存在, 则ROC是其最右边极点的右边。

说明: 右边信号是指 $t < t_0$ 时, $x(t) = 0$ 的信号。若拉氏变换对某一个 s_0 收敛, 则有:

$$\int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty, \quad \sigma_0 = \Re\{s_0\}$$

如果 $\sigma_1 > \sigma_0$, 则有:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t} dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t_0} \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned}$$

所以 $\sigma_1 > \sigma_0$ 的区域在收敛域内。又因为收敛域内不能有极点, 故收敛域一定位于 $X(s)$ 的最右边极点的右边。



收敛域的特征

特征5: 若 $x(t)$ 是左边信号, 且其拉氏变换存在, 那么ROC一定是其最左边极点的左边。

特征6: 若 $x(t)$ 是双边信号且其拉氏变换存在, 那么 $X(s)$ 的收敛域一定是由 s 平面的一条带状区域所组成。

说明: 一个双边信号就是对 $t > 0$ 和 $t < 0$ 都具有无限范围的信号。可以选取任意时间 t_0 , 将它分成一个左边信号和一个右边信号。根据特征4和特征5, 如果 $x(t)$ 的拉氏变换存在, 其ROC一定为这两个单边信号ROC的公共部分, 这个公共部分必定是一个带状区域。如果没有公共部分, 就意味着双边信号 $x(t)$ 的拉氏变换不存在。

当 $X(s)$ 是有理函数时, 其ROC总是由 $X(s)$ 的极点分割的, 必然满足以下规律:

- 右边信号的ROC一定是 $X(s)$ 最右边极点的右边;
- 左边信号的ROC一定是 $X(s)$ 最左边极点的左边;
- 双边信号的ROC可以是任意两相邻极点之间的带状区域。





收敛域的特征—举例

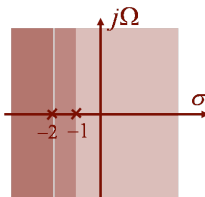
例:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

$X(s)$ 的极点: $s = -1, s = -2$

$X(s)$ 可以形成三种ROC:

- ROC: $\Re\{s\} > -1$, 此时 $x(t)$ 是右边信号;
- ROC: $\Re\{s\} < -2$, 此时 $x(t)$ 是左边信号;
- ROC: $-2 < \Re\{s\} < -1$, 此时 $x(t)$ 是双边信号。

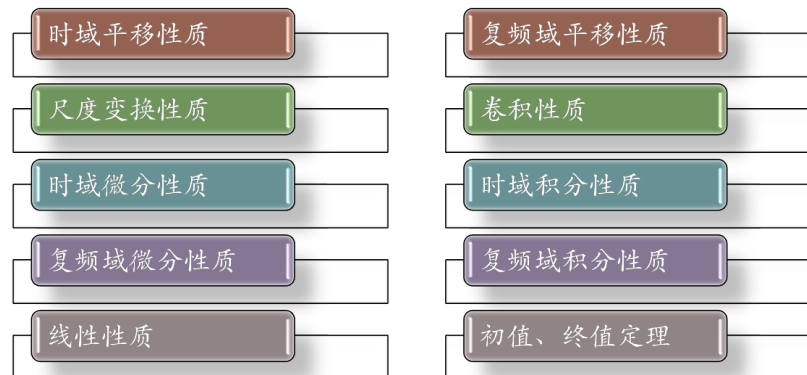


可见, 根据极点分布和ROC的特征, 可以判断信号的种类。



拉普拉斯变换的性质(Properties of the Laplace Transform)

拉氏变换建立了信号时域和复频域之间的联系。拉氏变换和傅氏变换一样具有很多重要的性质, 这里着重讨论ROC的变化。



拉普拉斯变换的性质—线性

1. 线性性质

$$\text{if } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), ROC = R_1; \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), ROC = R_2$$

$$\text{then } ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s), \quad \text{ROC包含 } R_1 \cap R_2$$

如果两个ROC的交是空集, 则表明信号线性组合的拉氏变换不存在。

当 $aX_1(s) + bX_2(s)$ 过程中发生**零极点相抵消**的情况时, 收敛域就可能不仅仅是两个ROC的交, 而**有可能扩大**。

例: 已知

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0; \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \Re\{s\} > 0$$

则 $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ 的拉氏变换为:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+1)} = \frac{s}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$



拉普拉斯变换的性质—平移

2. 时域平移性质:

如果: $x(t) \leftrightarrow X(s), ROC = R$
 则: $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s), ROC = R$
 复频域乘以指数因子并不改变 $X(s)$ 的极点, 故ROC不变。

3. 复频域平移性质:

如果: $x(t) \leftrightarrow X(s), ROC = R$
 则: $x(t)e^{s_0t} \leftrightarrow X(s-s_0)$
 $ROC: R_1 = R + \Re\{s_0\}$
 收敛域平移一个 $\Re\{s_0\}$

例: 求矩形脉冲信号 $x(t) = u(t+T) - u(t-T)$ 的拉氏变换。

解: 利用时域平移性质, 有

$$u(t+T) \leftrightarrow \frac{1}{s}e^{Ts}, \Re\{s\} > 0; \quad u(t-T) \leftrightarrow \frac{1}{s}e^{-Ts}, \Re\{s\} > 0$$

$$\text{再由线性性质可得: } X(s) = \frac{1}{s}(e^{Ts} - e^{-Ts})$$

ROC为整个 s 平面。(零极点相消, ROC扩大)





拉普拉斯变换的性质—尺度变换

4. 尺度变换性质

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$$

$$\text{then } x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ ROC} : R_1 = aR$$

特例：反转变换 $x(-t) \leftrightarrow X(-s), \text{ ROC} = -R$

例：已知 $x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$ ，求信号 $x(at - b)$ 的拉氏变换。

方法1：先时域平移，得

$$x(t - b) \leftrightarrow X(s)e^{-bs}, \text{ ROC} = R$$

再尺度变换，得

方法2：先尺度变换，得

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ ROC} = aR$$

再时域平移，得

$$x(at - b) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}s}, \text{ ROC} = aR$$



拉普拉斯变换的性质—卷积和时域微分

5. 卷积性质：

$$\text{if } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \text{ ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \text{ ROC} = R_2$$

$$\text{then } x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s), \text{ ROC包含 } R_1 \cap R_2$$

卷积特性是LTI系统复频域分析的理论基础。

6. 时域微分性质：

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$$

$$\text{then } \frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow sX(s), \text{ ROC包含 } R$$

当 $X(s)$ 在 $s = 0$ 有一阶极点，且该极点位于ROC边界上时，由于 s 的引入将消去该极点，从而使ROC扩大。



拉普拉斯变换的性质—时域积分

7. 时域积分性质：

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$$

$$\text{then } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \text{ ROC包含 } R \cap (\Re\{s\} > 0)$$

可由卷积性质来证明：

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0$$

$$x(t) * u(t) \leftrightarrow X(s)U(s) = \frac{1}{s} X(s), \text{ ROC包含 } R \cap (\Re\{s\} > 0)$$

时域微分和积分性质表明信号在时域进行微分或积分，相当于在复频域对它乘以或除以复变量 s 。根据此性质可以将时域的微分或积分运算转变为复频域的代数运算。这在LTI系统分析中十分有用。



拉普拉斯变换的性质—复频域微分

8. 复频域微分性质：

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$$

$$\text{then } -tx(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds} X(s), \text{ ROC} = R$$

这一性质可由拉氏变换式两边同时对 s 微分得到。

例： $x(t) = t^n u(t)$

$$tu(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} U(s) = \frac{1}{s^2}, \Re\{s\} > 0$$

重复使用复频域微分性质，可得

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \Re\{s\} > 0$$



拉普拉斯变换的性质—复频域积分

9. 复频域积分性质:

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{then } t^{-1}x(t) \leftrightarrow \int_s^{+\infty} X(s_1)ds_1, \quad \text{ROC} = R$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \int_s^{+\infty} X(s_1)ds_1 &= \int_s^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-s_1t} dt \right] ds_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\int_s^{+\infty} e^{-s_1t} ds_1 \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{t} e^{-st} dt, \quad \text{ROC} = R \end{aligned}$$

$$\therefore t^{-1}x(t) \leftrightarrow \int_s^{+\infty} X(s_1)ds_1 \quad \text{ROC} = R$$



拉普拉斯变换的性质—初值定理

10. 初值定理:

若因果信号 $x(t)$ 的拉氏变换为 $X(s)$, 而且 $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ 存在, 则

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

证明: 将 $x(t)$ 在 $t = 0^+$ 处展开为泰勒级数 $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n \frac{d^n}{dt^n} x(0^+)$

两边进行拉氏变换, 考虑到因果性, 得

$$X(s) = \frac{1}{s} x(0^+) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{s^{n+1}} \frac{d^n}{dt^n} x(0^+)$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+) + \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{s^n} \frac{d^n}{dt^n} x(0^+)$$

所以 $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$



拉普拉斯变换的性质—终值定理

11. 终值定理:

若因果信号 $x(t)$ 的拉氏变换为 $X(s)$, 而且 $X(s)$ 除了在 $s = 0$ 可以有一阶极点外, 其余极点均在 s 平面的左半平面。则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

证明: 如果 $x(t)$ 的终值存在, 利用 $x(t)$ 的因果性, 有

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + \int_{0^-}^{+\infty} s x(t) e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-)$$

取 $s \rightarrow 0$,

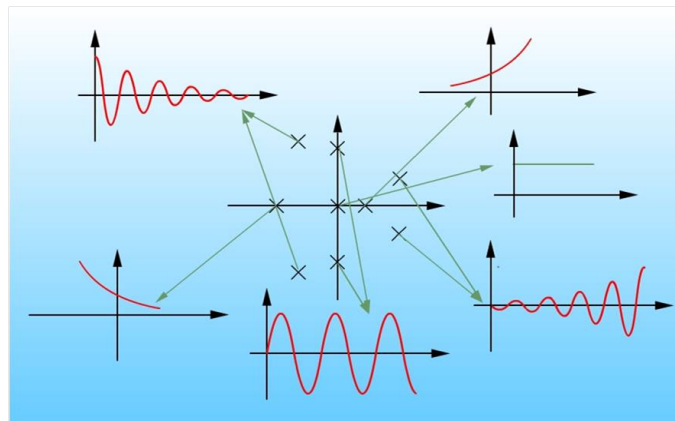
$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-)$$

上式左边积分得: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(0^-) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-)$



极点在 s 平面的分布与终值的关系

应用终值定理求信号在时域中的终值时, 必须保证终值存在。这个条件就体现为在复频域中 $X(s)$ 的极点都必须在 s 平面的左半平面, 原点处只能有一阶极点。





常用信号的拉普拉斯变换

$$x(t) = -u(-t)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0$$

$$X(s) = -U(-s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} < 0$$

尺度变换性质

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = -U(-s-a) = \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} < -a$$

复频域平移、尺度变换

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = U(s+a)$$

$$= \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} > -a$$

复频域平移性质



常用信号的拉普拉斯变换

偶信号 $x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$, $a > 0$, 由上页结果可得:

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2-a^2}, -a < \Re\{s\} < a$$

奇信号 $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$, $a > 0$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2s}{s^2-a^2}, -a < \Re\{s\} < a$$

对拉氏变换有: 偶信号 \Leftrightarrow 偶函数; 奇信号 \Leftrightarrow 奇函数。

$$x(t) = [\cos(\Omega_c t)] u(t)$$

$$\cos(\Omega_c t) = \frac{1}{2}(e^{j\Omega_c t} + e^{-j\Omega_c t})$$

$$X(s) = \frac{1/2}{s-j\Omega_c} + \frac{1/2}{s+j\Omega_c} = \frac{s}{s^2+\Omega_c^2}, \Re\{s\} > 0$$

利用复频域
平移性质和
线性性质。

常用信号的拉普拉斯变换

$$x(t) = [e^{-at} \cos(\Omega_c t)] u(t)$$

$$X(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \Omega_c^2}, \Re\{s\} > -a$$

在前一结果基础上再次利用复频域平移性质。

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} u(t)$$

反复应用频域微分性质:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} > -a$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\Re\{s\} > -a$$

$$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^3}, \Re\{s\} > -a$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \Re\{s\} > -a$$

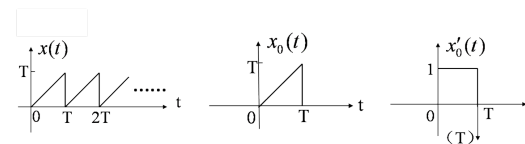
当 $a=0$ 时, 有

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^n}, \Re\{s\} > 0$$



常用信号的拉普拉斯变换—举例

例: 求下图“周期”信号的拉氏变换。



$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0(t-nT), \quad x_0(t) = t[u(t) - u(t-T)]$$

$$x'_0(t) = u(t) - u(t-T) - T\delta(t-T) \leftrightarrow \hat{X}_0(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}) - Te^{-sT}$$

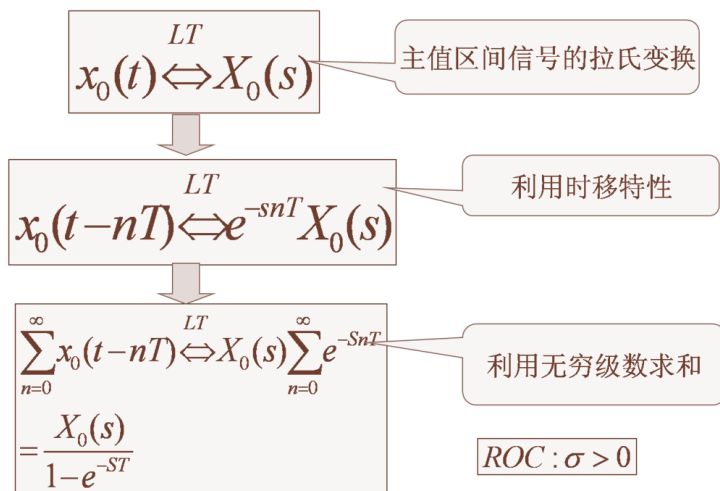
$$X_0(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-sT}) - \frac{T}{s}e^{-sT}, \text{ ROC 为整个 } s \text{ 平面}$$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} X_0(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-Ts}}, \Re\{s\} > 0$$





周期信号的拉普拉斯变换—总结



拉普拉斯反变换(The Inverse Laplace Transform)

当 $X(s)$ 是有理函数时, 通常利用部分分式展开法求拉氏反变换。

若 $X(s) = \frac{E(s)}{D(s)}$, 当 $E(s)$ 的阶数低于 $D(s)$ 时, 称为有理真分式, 可直接将其展开为部分分式; 当 $E(s)$ 的阶数大于或等于 $D(s)$ 时, 先长除, 再将余式展开为部分分式。

各分式均只有一个极点, 其 ROC 不是该极点的右边就是它的左边。确定的原则是各分式 ROC 的公共部分应符合 $X(s)$ 的 ROC 的要求。

部分分式展开法是做拉氏反变换的主要方法。

例: $X(s) = \frac{8s - 16}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}, \Re\{s\} > -1$



拉普拉斯反变换—举例

解: 进行部分分式展开, 有

$$X(s) = \frac{8s - 16}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+5}$$

$$A = X(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{8s-16}{(s+3)(s+5)} \Big|_{s=-1} = -3$$

同理可求得: $B = 10, C = -7$ 。

$$X(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{10}{s+3} + \frac{-7}{s+5}, \Re\{s\} > -1$$

三个分式对应的 ROC 分别为:

$$\Re\{s\} > -1, \Re\{s\} > -3, \Re\{s\} > -5$$

$$x(t) = (-3e^{-t} + 10e^{-3t} - 7e^{-5t})u(t)$$



连续时间LTI系统的复频域分析

Continuous-Time LTI System Analysis in s-Domain

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

$H(s)$ 称为系统函数或转移函数, 定义为:

$$H(s) \triangleq \text{LT}\{h(t)\}, \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

若系统稳定, $H(s)$ 的 ROC 包括 $j\Omega$ 轴, 令 $s = j\Omega$, 即得到频域分析法。

与频域分析法相比, 复频域分析法不仅能分析稳定系统, 而且还能用于许多不稳定系统的分析。



系统函数计算—由LCCDE描述的系统

1. 由线性常系数微分方程所描述的LTI系统:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

两边进行拉氏变换, 有 $\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \Rightarrow \text{是一个关于 } s \text{ 的有理函数}$$

由方程给定的 $H(s)$, 并没有对ROC加以约束, 微分方程本身不是系统的完整描述。如果同时指出系统的因果性或稳定性, 那就可以完全描述一个系统。



系统函数计算—由零极点图描述的系统

- 如果系统是稳定的, 则 $H(j\Omega)$ 存在, $H(s)$ 的ROC必定包含 $j\Omega$ 轴;
- 如果系统是因果的, 则 $h(t)$ 是右边信号, $H(s)$ 的ROC必为最右边极点的右边;
- 对系统函数是有理函数的因果、稳定系统, 其 $H(s)$ 的全部极点一定位于 s 平面的左半平面。

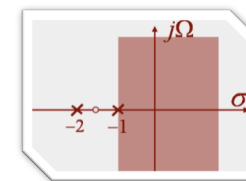
2. 由零极点图所描述的系统:

已知一个有理系统函数的零极点图和收敛域, 可由零极点分布写出 $H(s)$, 最多差一个常数因子。若 $H(0)$ 已知, 则该常数可以确定。

例: 某连续时间LTI因果系统的零极点图如图所示, 由图可写出

$$H(s) = H_0 \frac{s + 3/2}{(s + 1)(s + 2)}$$

若已知 $H(0) = 1$, 可得 $H_0 = 4/3$



系统函数计算—由方框图描述的系统

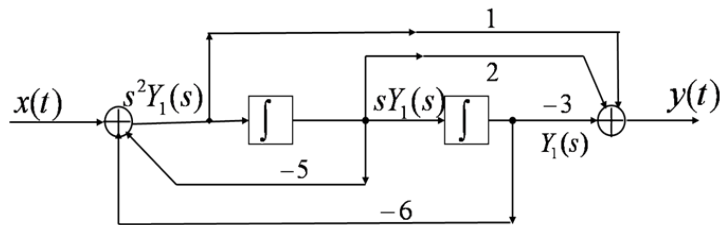
于是:

$$H(s) = \frac{\frac{4}{3}s + 2}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{\frac{2}{3}}{s + 1} + \frac{\frac{2}{3}}{s + 2} \quad \text{ROC: } \Re\{s\} > -1$$

3. 由方框图描述的系统:

方框图与常系数微分方程是可以互相转换的, 也可以直接由方框图写出 $H(s)$, 然后根据系统的因果、稳定性确定ROC。

例: 已知图示系统是因果的, 求系统函数。



系统函数计算—由方框图描述的系统

解: 由图可以列出如下方程组:

$$\begin{aligned} Y(s) &= -3Y_1(s) + 2sY_1(s) + s^2Y_1(s) \\ s^2Y_1(s) &= X(s) - 5sY_1(s) - 6Y_1(s) \end{aligned}$$

消去 $Y_1(s)$ 解得系统函数为:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 5s + 6} \quad \Re\{s\} > -2$$

因果系统的ROC是最右边极点的右边。

对于由方框图描述的系统, 通常总是分别对加法器的输出端列写方程。然后设法消去所设的中间变量, 得到一个输入输出方程, 进而可得出系统函数。





单边拉普拉斯变换(The Unilateral Laplace Transform)

在涉及拉氏变换的大多数实际问题中, 信号往往是有始信号, 设起始时刻为时间坐标的原点。这样拉氏变换可写为:

$$\mathfrak{X}(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

上式即为信号的**单边拉氏变换**, 其积分下限可以取 0^+ 或 0^- , 当遇到在 $t = 0$ 处有冲激函数及其导数的情况时, 取为 0^- , 其它情况不必区分。

实际上信号 $x(t)$ 的单边拉氏变换就是信号 $x(t)u(t)$ 的双边拉氏变换, 所以有:

$$x(t)u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \mathfrak{X}(s)e^{st} ds$$

单边拉氏变换与双边拉氏变换的区别仅在于积分下限。



单边拉普拉斯变换的性质

- ① 单边拉氏变换是双边拉氏变换的特例, 即: 因果信号的双边拉氏变换。
- ② 若两个信号在 $t > 0$ 时相同, 在 $t < 0$ 时不同, 就会有相同的单边拉氏变换和不同的双边拉氏变换。
- ③ ROC: 由于单边拉氏变换就是因果信号的双边拉氏变换, 所以ROC一定是 s 平面中最右边极点的右边, 可以不必特殊强调。

除了时域微分、时域积分和时延性质略有不同外, 其它性质均与双边拉氏变换相同。其中时域微分和积分性质对分析具有非零初始条件的系统(即增量线性系统)是十分重要的。



时域微分性质

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow \mathfrak{X}(s)$$

$$\text{then } \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$$

说明: 由于

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$$

所以 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$ 。同理可得:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 \mathfrak{X}(s) - sx(0^-) - \frac{dx(0^-)}{dt}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n \mathfrak{X}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} \frac{d^k x(0^-)}{dt^k}$$



时域积分性质

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow \mathfrak{X}(s)$$

$$\text{then } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} \mathfrak{X}(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$$

说明: 由于

$$\int_{0^-}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

因为上式中的 $\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$ 为常数, 右端第一项相当于阶跃函数的拉氏变换, 结果为 $\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$, 第二项用分部积分法, 有

$$-\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \Big|_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathfrak{X}(s)$$



时域平移（时延）性质

if $x(t) \leftrightarrow \mathfrak{X}(s)$

then $x(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}\mathfrak{X}(s), t_0 > 0$

证明:

$$\int_0^{+\infty} [x(t - t_0)u(t - t_0)]e^{-st} dt = \int_{t_0}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt$$

令 $\tau = t - t_0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-st_0} \int_0^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0}\mathfrak{X}(s) \end{aligned}$$

注意这里单边拉氏变换的时移信号是指信号 $x(t)u(t)$ 的时延。



单边拉普拉斯变换分析增量线性系统

对于由一个线性常系数微分方程描述的系统:

- 当初始条件全部为零时, 系统是线性时不变的;
- 若初始条件不全为零, 则是一个增量线性系统。

我们前面讨论的时域分析法、频域分析法和复频域分析法, 都是针对线性系统进行的, 这些方法只能用来分析增量线性系统中的零状态响应。

单边拉普拉斯变换可以用来分析由初始条件引起的零输入响应, 适用于增量线性系统。



单边拉氏变换分析增量线性系统—举例

例: 描述系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2} y(t) = x(t)$$

初始条件为 $y(0^-) = 0, y'(0^-) = 1$, 系统的输入 $x(t) = u(t)$, 求 $y(t)$ 。

解: 方程两边同时做单边拉氏变换, 有

$$s^2 \mathfrak{Y}(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + \frac{3}{2} s \mathfrak{Y}(s) - \frac{3}{2} y(0^-) + \frac{1}{2} \mathfrak{Y}(s) = \mathfrak{X}(s)$$

整理得:

$$\mathfrak{Y}(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + \frac{3}{2}y(0^-)}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}} + \frac{\mathfrak{X}(s)}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$

第一项仅与初始条件和系统特性有关, 因此对应于零输入响应。第二项只与输入量和系统特性有关, 因此对应于零状态响应。



单边拉氏变换分析增量线性系统—举例

代入初始条件和 $\mathfrak{X}(s) = 1/s$ 后, 有:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}(s) &= \frac{1}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}} + \frac{1}{s(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2})} \\ &= \left(\frac{2}{s + \frac{1}{2}} - \frac{2}{s + 1} \right) + \left(\frac{2}{s} - \frac{4}{s + \frac{1}{2}} + \frac{2}{s + 1} \right) \end{aligned}$$

进行拉氏反变换, 得:

$$y(t) = (2e^{-\frac{1}{2}t} - 2e^{-t})u(t) + (2 - 4e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-t})u(t)$$

对于电路描述的系统, 可以根据电路的结构和激励, 建立电路的微分方程, 然后用单边拉氏变换求解。



本章小结

- 拉氏变换是傅氏变换的推广，它可以将微分方程变换为代数方程，在LTI系统分析中非常有用。
- ROC是双边拉氏变换中十分重要的概念。
- 零极点图是拉氏变换的几何表示，广泛应用于工程实际中。
- 单边拉氏变换是双边拉氏变换的特例，被广泛用于分析增量线性系统。

作业：

第1次：6.1(b)(c)(f)(h)，6.2(b)(e)(f)，6.3，6.4

第2次：6.7(d)(e)，6.8(b)(d)(f)，6.10(a)，6.12图(a)(c)

第3次：6.15，6.17，6.19(b)(d)，6.22