信号与系统B
Signals and Systems
第7章　z变换

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2013 年 11月

本章内容

基本要求

1. 掌握双边z变换的定义及收敛域、零极点图的概念;
2. 各类信号z变换收敛域的基本特征;
3. 掌握z变换的性质及常用信号的z变换，z反变换;
4. z反变换的幂级数展开法和部分分式展开法;
5. 掌握离散时间LTI系统的z域分析方法;
6. 掌握单边z变换及利用单边z变换分析增量线性系统的方法。

z变换的定义

由时域分析法，复指数序列z^n通过单位脉冲响应为$h(n)$的LTI系统，输出响应为

$y(n) = z^n * h(n) = H(z)z^n$。

因此，复指数序列是一切离散时间LTI系统的特征函数。其中

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$$

是复变量$z = re^{j\omega}$的函数，称为单位脉冲响应$h(n)$的双边z变换。

与此相对应，信号$x(n)$的双边z变换定义为:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}}$$

当$z = e^{j\omega}$时，即为第五章讨论的离散时间信号与系统的频域分析。

z变换是离散时间傅里叶变换的推广，离散时间傅里叶变换是z变换的特例。z变换与拉普拉斯变换相对应。

z变换与拉普拉斯变换的关系

离散时间信号可以看作是由连续信号通过抽样得到的。

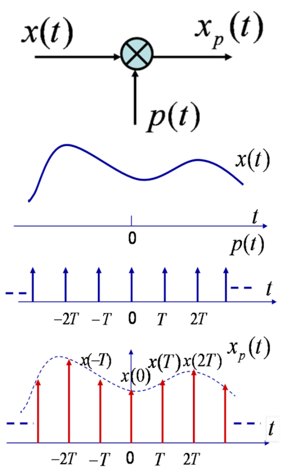
设离散时间信号$x(n)$是对连续时间信号$x_c(t)$理想采样后得到的序列:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(t)\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$x(n) = x_c(nT)$$

那么$x(n)$的z变换可以从$x_p(t)$的拉氏变换式导出。



z变换与拉普拉斯变换的关系

抽样函数$x_p(t)$的拉氏变换为:

$$X_p(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t)\, e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT)\cdot e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-nTs}$$

对$x(n) = x_c(nT)$两边做z变换有:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) z^{-n}$$

二者比较，可得：$X(z) = X_p(s)\,|_{z=e^{Ts}}$。

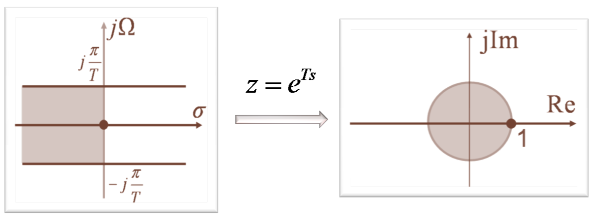
z变换与拉普拉斯变换的关系

这表明，理想抽样函数的拉氏变换与对应抽样序列的z变换之间，本质上是一种映射关系，就是由复变量s平面到复变量z平面的映射，其映射关系是$z = e^{Ts}$。

由$z = e^{Ts} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = re^{j\omega}$，可得$r = e^{\sigma T}$，$\omega = \Omega T$。所以有:

$$\sigma < 0,\ r < 1; \quad \sigma > 0,\ r > 1; \quad \sigma = 0,\ r = 1$$

$$-\frac{\pi}{T} \le \Omega \le \frac{\pi}{T},\ -\pi \le \omega \le \pi \quad \Omega = 0,\ \omega = 0$$



z变换与离散时间傅里叶变换的关系

z变换的定义式可以写为如下形式:

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)r^{-n}] e^{-j\omega n}$$

可见信号$x(n)$的z变换就是对$x(n)r^{-n}$做DTFT。

因此z变换是DTFT的推广，它的收敛性更强。

当$z = e^{j\omega}$即$r = 1$时，z变换就成为离散时间傅里叶变换。可见，DTFT就是在z平面中，在半径为1的圆周上的z变换。在z平面上，这个圆称为单位圆。

单位圆在z变换中所起的作用，类似于s平面中$j\Omega$轴在拉氏变换中所起的作用。

收敛域的概念

由于z变换是一个无穷级数，因此必然存在着级数收敛问题。

当 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)r^{-n}| < \infty$时，信号$x(n)$的z变换一定存在。这意味着：

- 并非任何信号的z变换都存在；
- 并非z平面上的任何复数都能使$X(z)$收敛；
- z平面上能使信号$x(n)$的z变换收敛的z值范围称为z变换的ROC。

接下来，考察几个具体的例子。

例1：单位脉冲序列$x(n)=\delta(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

显然，上述和式对任意z值都收敛，所以收敛域为整个z平面。

收敛域的概念

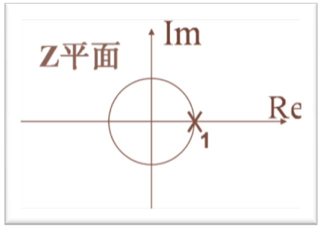
例2：单位阶跃信号$x(n)=u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}\quad \text{ROC:}|z|>1$$

由于ROC不包括单位圆，不能通过将$z\to e^{j\omega}$从$X(z)$得到$X(e^{j\omega})$。

当$X(z)$的ROC包括单位圆时，

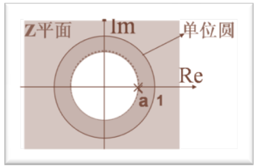
$$X(e^{j\omega})=X(z)\,|_{z=e^{j\omega}}$$



收敛域的概念

例3：右边信号$x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}\ \text{ROC:}|z|>|a|$$

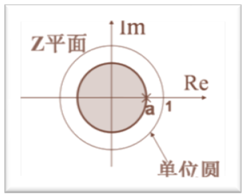


当$|a|<1$时，ROC包括单位圆，$x(n)$的DTFT存在。

例4：左边信号$x(n)=-a^n u(-n-1)$

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^n z^{-n}=-\sum_{n=1}^{+\infty}a^{-n}z^{n}$$

$$=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}\ \text{ROC:}|z|<|a|$$



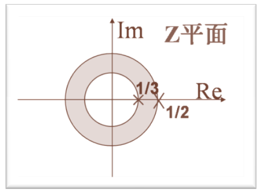
以上两例说明，不同的信号可能具有相同的z变换式，只是ROC不同，因此ROC是至关重要的。只有z变换式连同相应的ROC，才能与信号建立一一对应的关系。

收敛域的概念

例5：双边信号$x(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\text{ROC:}\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$



一般情况下，$X(z)$的ROC是z平面上一个以原点为中心的圆环。

若$x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$，两项收敛域分别为$|z|>\frac{1}{2}$和$|z|<\frac{1}{3}$，二者没有公共区域，这说明该信号的$z$变换不存在。

不能错误地认为：

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

零极点图

- 如果$X(z)$是有理函数，那么与拉氏变换一样，可以用$X(z)$的零点和极点来表征$X(z)$。
- 在z平面上标出$X(z)$的全部零极点，就构成了零极点图。
- 如果在零极点图上同时标出ROC，这就是$X(z)$的几何表示，除了相差一个常数因子外，它与有理z变换完全对应。

与拉氏变换一样，z变换收敛域的边界也是由极点的位置决定的，ROC与信号$x(n)$的特性有关。所以，z变换的收敛域与拉氏变换有类似的特征。下面具体讨论：

特征1：ROC内不包含任何极点。

特征2：ROC是z平面上以原点为中心的环形区域。

说明：由于 $X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n}$

收敛域的特征

可见对于给定的$x(n)$，$X(z)$是否收敛仅与r的取值有关，与ω无关。

$|z|=r$是z平面上以原点为中心，r为半径的圆，所以ROC是以原点为中心的同心圆构成的环域。

特征3：有限长序列z变换的ROC是整个z平面，可能不包含$z=0$或$|z|=\infty$

说明：对于有限长序列，其z变换为一有限项级数，即

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2}x(n)z^{-n},\ N_2\geq N_1$$

1. 当$N_1<0$, $N_2>0$时，和式中既有z的正幂项，又包含z的负幂项，此时ROC不包含$z=0$或$|z|=\infty$。
2. 若N_1为零或正值，和式中仅有z的负幂项，此时ROC就包括$|z|=\infty$，但不包括$z=0$。
3. 若N_2为零或负值，和式中仅有z的正幂项，此时ROC就包括$z=0$，但不包括$|z|=\infty$。

收敛域的特征

特征4：右边序列的ROC是最外部极点的外部，但可能不包括$|z|=\infty$

说明：$X(z)=\sum\limits_{n=N_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$, $N_1\leq n\leq\infty$

设$|z|=r_0\in$ ROC，有 $\sum\limits_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|<\infty$，若$r_1>r_0$，则

$$\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_1^{-n}\right|=\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$
$$\leq\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1}<\infty\ \therefore|z|=r_1\in\text{ROC}$$

当$N_1<0$时，由于$X(z)$展开式中有若干个z的正幂项，此时ROC不包含$|z|=\infty$。

收敛域的特征

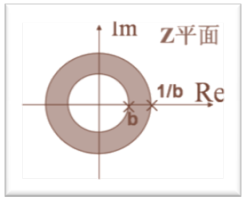
特征5：左边序列的ROC是最内部极点的内部，但可能不包括$z=0$

说明：与特征4类似，左边序列指$n>N_1$时，$x(n)=0$的序列。当$N_1>0$时，$X(z)$的展开式中包含有若干z的负幂项，此时z不能为零。

特征6：双边序列的z变换如果存在，则ROC必定是一个环形区域。

例1：$x(n)=b^{|n|}, b>0$

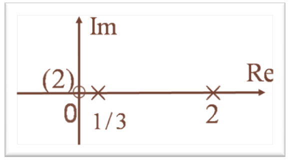
$$x(n)=b^nu(n)+b^{-n}u(-n-1)$$
$$b^nu(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-bz^{-1}},|z|>b$$
$$b^{-n}u(-n-1)\leftrightarrow\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},|z|<b^{-1}$$



当$0<b<1$时，ROC为$b<|z|<b^{-1}$。
当$b>1$时，两部分收敛域无公共部分，表明此时$X(z)$不存在。

收敛域的特征

例2：



$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

极点：$z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = 2$　零点：$z = 0$（二阶）

若其ROC为：

- $|z| > 2$时，则$x(n)$为右边序列，且是因果的，但其DTFT不存在。
- $|z| < 1/3$时，则$x(n)$为左边序列，且是反因果的，其DTFT不存在。
- $1/3 < |z| < 2$时，则$x(n)$为双边序列，其DTFT存在。

- ROC是否包括$|z| = \infty$，是$x(n)$是否因果的标志；
- ROC是否包括$|z| = 0$，是$x(n)$是否反因果的标志；
- ROC是否包括单位圆，是$x(n)$的傅里叶变换存在的充要条件。

z变换的性质(Properties of the Z-Transform)

z变换的性质反映了离散时间信号在时域的特性与在z域的特性间的关系。许多性质与拉氏变换类似，这里着重讨论ROC的变化。

- 线性性质
- 频移性质
- 时域反转性质
- z域微分性质
- 初值定理
- 时移性质
- z域尺度变换性质
- 卷积性质
- 时域求和性质
- 终值定理

z变换的性质—线性和时移

1. 线性性质

if $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$, ROC $= R_1$　$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$, ROC $= R_2$

then $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$, ROC包含$R_1 \cap R_2$

若在线性组合过程中出现零极点相消现象，则ROC可能要比各信号z变换ROC的公共部分大。

2. 时移性质

if $x(n) \leftrightarrow X(z)$,　ROC $= R$

then $x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$,

$ROC = R$，但在原点和无穷远点可能有增删。

由于信号的时移有可能会改变其因果性，故ROC在原点和无穷远点可能有改变。

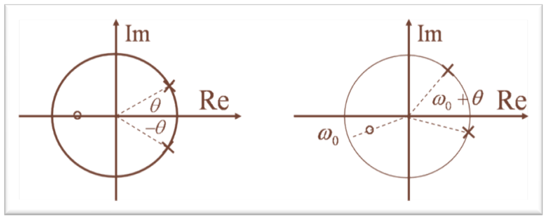
z变换的性质—线性和时移

3. 频移性质

if $x(n) \leftrightarrow X(z)$,　ROC $= R$

then $e^{j\omega_0 n}x(n) \leftrightarrow X\left(e^{-j\omega_0}z\right)$,　ROC $= R$

频移性质指出：信号在时域乘以复指数信号，在z域相当于z平面作一旋转，即全部零极点位置旋转一个角度ω_0。显然，如果$X(z)$的零极点是共轭成对的，一般来讲频移后就不再有这种关系了。



当$\omega_0 = \pm\pi$时，有$x(n)(-1)^n \leftrightarrow X(-z)$，零极点旋转180°。

z变换的性质—z域尺度变换

4. z域尺度变换

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC} = R$$
$$\text{then } z_0^n x(n) \leftrightarrow X\left(z_0^{-1} z\right), \quad \text{ROC} = |z_0| R$$

此性质表明：信号在时域乘以z_0^n，在z域等效进行尺度变换。

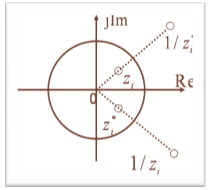
- 若$z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$，z域尺度变换就是零极点位置在z平面内旋转一个角度ω_0，并且在径向位置有一个r_0倍的变化。由于在径向有变化，因此其ROC也有一个尺度上的变化。
- 若$z_0 = r_0$，尺度变换就仅仅是零极点位置在径向有r_0倍的变化，ROC也将随之发生变化。
- 若$z_0 = e^{j\omega_0}$，尺度变换就变成了频移，只对零极点位置进行旋转，此时ROC不发生变化。

z变换的性质—时域反转和卷积性质

5. 时域反转性质

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC} = R$$
$$\text{then } x(-n) \leftrightarrow X\left(z^{-1}\right), \quad \text{ROC边界倒置}$$

例： 若$X(z)$的ROC为$a < |z| < b$
则$X(z^{-1})$的ROC为$\frac{1}{b} < |z| < \frac{1}{a}$
信号在时域的反转，会引起$X(z)$的零极点分布按倒量对称发生改变。如果c是$X(z)$的零/极点，则$1/c$是$X(z^{-1})$的零/极点。



6. 卷积性质

$$\text{if } x_1(n) \leftrightarrow X_1(z),\ \text{ROC} = R_1; \quad x_2(n) \leftrightarrow X_2(z),\ \text{ROC} = R_2$$
$$\text{then } x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z)X_2(z), \text{ROC包含} R_1 \cap R_2$$

若相乘过程中有零极点抵消，则ROC可能扩大。

z变换的性质—z域微分、时域求和

7. z域微分性质

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC} = R$$
$$\text{then } nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{ROC} = R$$

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数$X(z)$的反变换或具有高阶极点的$X(z)$的反变换。

8. 时域求和性质

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC} = R$$
$$\text{then } \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z), \quad \text{ROC包含} R \cap (|z| > 1)$$

$$\because \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = u(n) * x(n) \quad \text{and} \quad u(n) \leftrightarrow \tfrac{1}{1-z^{-1}},\ |z| > 1$$

利用卷积性质可得该性质。

z变换的性质—初值定理

9. 初值定理

若因果序列$x(n)$的z变换为$X(z)$，而且$\lim_{z\to\infty} X(z)$存在，
则$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

证明： 由于因果信号$x(n)$的z变换可以表示为

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n} + x(0) \quad \therefore x(0) = \lim\nolimits_{z\to\infty} X(z)$$

可以看到，若因果序列$x(n)$的初值有限，则$X(\infty)$也是有限值。若把$X(z)$表示为z的两个多项式之比，其分母多项式的阶数一定大于等于分子多项式的阶数。

推论： $z[X(z) - x(0)] = x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + \cdots$

$$x(1) = \lim_{z\to\infty} z[X(z) - x(0)] \ \cdots \ x(n) = \lim_{z\to\infty} z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k}\right]$$

说明可以直接从$X(z)$递推出$x(n)$的任何一点的值。

z变换的性质—终值定理

10. 终值定理

若因果序列$x(n)$的z变换为$X(z)$，而且$X(z)$在除了$z=1$允许有一阶极点外，其余极点均在单位圆内。则 $\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

证明： 符合假设条件时，$(z-1)X(z)$在单位圆上无极点。

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}\sum_{n=-1}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=-1}^{m}[x(n+1)-x(n)]$$
$$= \lim_{m\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+\cdots+x(m+1)-x(m)] = \lim_{n\to\infty}x(n)$$

这表明： 如果$x(n)$有终值存在，则其终值等于$X(z)$在$z=1$处的留数。

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \mathrm{Res}\,[X(z),1]$$

终值定理对$X(z)$的极点位置的要求，就是为了保证信号确实具有终值。

初值和终值定理提供了一种在z域求时域的初值和终值的方法。

z变换的性质—共轭对称与时域内插

11. 共轭对称性

if $x(n)\leftrightarrow X(z)$, ROC: R then $x^*(n)\leftrightarrow X^*(z^*)$, ROC: R

当$x(n)$是实信号时，$x^*(n)=x(n)$，于是有$X(z)=X^*(z^*)$。这表明：如果$X(z)$有**复数零极点，必共轭成对出现**。

12. 时域内插

若：$x(n)\leftrightarrow X(z)$，ROC: R

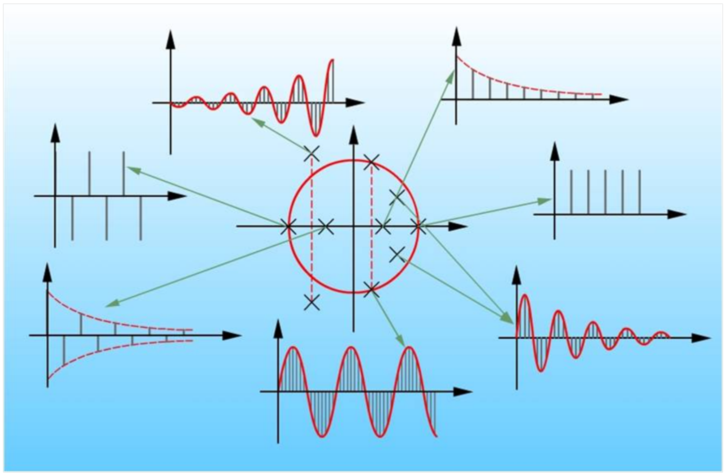
$$x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{k}), & n\text{是}k\text{的整数倍} \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

则：$x_{(k)}(n)\leftrightarrow X(z^k)$，ROC: $R^{1/k}$

$$X_{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}(n)z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)z^{-rk} = X(z^k)$$

极点位置与所对应的信号模式之间的关系

z平面上极点位置与所对应的信号模式之间的关系：



常用信号的z变换

除了由定义计算外，可以利用z变换的性质从简单信号的z变换导出常用信号的z变换对。

$\boxed{x(n)=\delta(n-m)}$

$\because \delta(n)\leftrightarrow 1$，ROC为整个z平面，利用平移性质：

$$\delta(n-m)\leftrightarrow z^{-m}$$

除$z=0\,(m>0)$或$|z|=\infty\,(m<0)$外，ROC为全部z平面。

$\boxed{x(n)=-u(-n-1)}$

$$u(n)\leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}},\ |z|>1$$
$$u(n-1)\leftrightarrow \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}},\ |z|>1$$
$$\because x(-n)\leftrightarrow X(z^{-1})$$
$$\therefore u(-n-1)\leftrightarrow \frac{z}{1-z} = -\frac{1}{1-z^{-1}}\quad |z|<1$$
$$\therefore x(n) = -u(-n-1)\leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}\quad |z|<1$$

常用信号的z变换

$\boxed{x(n)=a^n u(n)}$

直接由z域尺度变换性质有：$a^n u(n) \leftrightarrow U(a^{-1}z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$， $|z|>|a|$

$\boxed{x(n)=na^n u(n)}$

利用上面的结果，再根据z域微分性质，可得：

$$na^n u(n) \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}(\frac{1}{1-az^{-1}})=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\quad |z|>|a|$$

$\boxed{x(n)=[\cos(\omega_0 n)]\,u(n)}$

$$x(n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})u(n)$$

根据频移特性可得：

常用信号的z变换

$$X(z)=\frac{1}{2}[U(ze^{-j\omega_0})+U(ze^{j\omega_0})]$$
$$=\frac{1/2}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1/2}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}=\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}},\ |z|>1$$

$\boxed{x(n)=[r^n\cos(\omega_0 n)]\,u(n)}$

由上例结果，再利用z域尺度变换性质

$$[r^n\cos\omega_0 n]\,u(n) \leftrightarrow \frac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}},\quad |z|>r$$

表7.2中列出了一些常用信号的z变换。

在计算z变换或反变换时，如果能充分利用表7.2中常用信号的z变换和表7.1中z变换的性质，会使计算得到简化。

z反变换的定义

由于$x(n)$的z变换就是对$x(n)r^n$做DTFT，由DTFT的反变换有：

$$x(n)r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\ \therefore\ x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})r^n e^{j\omega n}d\omega$$

令$z=re^{j\omega}$，则$dz=jre^{j\omega}d\omega=jzd\omega$。当$\omega$从$0\to 2\pi$变化时，$z$沿着ROC内半径为$r$的圆周变化一周。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

其中C是ROC中逆时针方向的圆周。

z反变换表明：信号可以在z域分解为复指数信号的线性组合，这些复指数分量分布在一个圆周上，每个复指数分量的幅度为$\frac{1}{2\pi j}\frac{X(z)}{z}$

幂级数展开法（长除法）

由$X(z)$的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z)=\cdots+x(-1)z+x(0)+x(1)z^{-1}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$$

展开式中各项的系数即为$x(n)$，当$X(z)$是有理函数时，可以通过长除的办法将其展开为幂级数。

- 由于右边序列的展开式中应包含无数多个z的负幂项，所以要按降幂长除。
- 由于左边序列的展开式中应包含无数多个z的正幂项，所以要按升幂长除。
- 双边序列则先要将其分成两部分，分别对应信号的右边和左边部分，再分别按上述原则长除。

幂级数展开法（长除法）—举例

例： 用长除法计算z反变换。

$$X(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \quad \text{ROC:}\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

解： 由ROC易知，这是一个双边序列，因此首先将其分成两项

$$X(z) = \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

第一项的收敛域为$|z| < 1/2$，应按升幂长除，而第二项的收敛域为$|z| < 1/3$，应按降幂长除。

作为对照，反变换的结果为：

$$x(n) = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

部分分式展开法

z变换的部分分式展开法和拉氏变换的部分分式展开法相同。此时$X(z)$应按照$\frac{1}{1-az^{-1}}$形式展开为部分分式。

例：

$$X(z) = \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \quad \text{ROC:}\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

根据总的ROC确定每一部分的ROC。

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

第一项的ROC：$|z| > 1/4$，第二项的ROC：$|z| < 1/3$。

$$\therefore x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

z域分析法

离散时间LTI系统的分析方法，有时域分析法、频域分析法还有z域分析法。由z变换的卷积性质有：

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad Y(z) = X(z)H(z) \quad \text{ROC包括}R_1 \cap R_2$$

对$Y(z)$做反变换即可得到输出响应$y(n)$。

- $H(z)$称为系统的系统函数或转移函数，它和ROC一起，可以唯一地表征一个系统。
- $H(z)$在z域分析中起着非常重要的作用，借助于它在z平面的零极点分布和ROC的研究，可以确定系统的因果性和稳定性。
- 因果离散时间LTI系统，其系统函数的ROC在最外部极点的外部，并且包括$|z| = \infty$
- 反因果离散时间LTI系统，其系统函数的ROC在最内部极点的内部，并且包括$z = 0$
- 稳定系统，其系统函数的ROC一定包含单位圆，反之亦然。

z域分析法—举例

综合以上分析可以得出：**一个因果稳定的离散时间LTI系统的系统函数，其全部极点一定位于z平面的单位圆内。**

例： 已知$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，$h(n) = [1+(-2)^n]\,u(n)$，求$y(n)$。

解：

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \ |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+2z^{-1}} = \frac{2+z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}, \ |z| > 2$$

$$Y(z) = \frac{2}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{2/3}{1-z^{-1}} + \frac{4/3}{1+2z^{-1}}, \ |z| > 2$$

进行z反变换，得

$$y(n) = \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3}(-2)^n\right] u(n)$$

系统函数的计算—差分方程描述的系统

相当广泛的离散时间LTI系统，都可以用一个具有零初始条件的N阶线性常系数差分方程来表征：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

对方程两边进行z变换，则有

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \quad \therefore\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

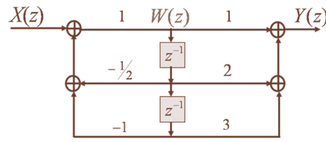
由方程系数可以方便地求出$H(z)$。

系统函数的计算—方框图

差分方程本身并没有包含ROC的信息。因此，在用差分方程表征系统时，必须指出系统的因果性、稳定性等特征，只有这样差分方程才能完整地描述一个系统。

与连续时间LTI系统相类似，还可以用方框图、零极点图等方式来描述一个离散时间LTI系统。

例.



$$W(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}W(z) - z^{-2}W(z)$$

$$Y(z) = W(z) + 2z^{-1}W(z) + 3z^{-2}W(z)$$

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

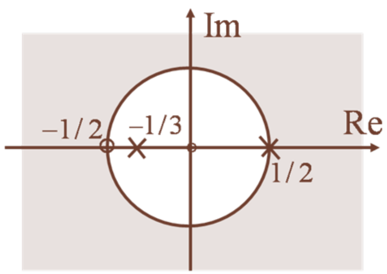
可进一步写出差分方程。

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) + y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$

系统函数的计算—零极点图

根据零极点图及ROC可写出一个有理函数的$H(z)$，最多和实际的$H(z)$相差一个常数。

例：



注意原点处的零点。

解： 由零极点图可以写出

$$H(z) = H_0 \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

再根据其它条件确定H_0

单边z变换的定义

信号$x(n)$的单边z变换定义为：

$$\mathfrak{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

与单边拉氏变换一样，信号$x(n)$的单边z变换就是信号$x(n)u(n)$的双边z变换，因此有

$$x(n)u(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \mathfrak{X}(z) z^{n-1} dz$$

由于单边z变换的定义式中只包括z的负幂项，不含有z的正幂项，因而单边z变换的ROC与因果信号双边z变换的ROC特性相同。即一定是最外部极点的外部并且包括$|z| = \infty$，不可能有其它情况。故对单边z变换不再强调ROC。

单边z变换—举例

当信号$x(n)$是一个因果序列时，其单边z变换与双边z变换相同，否则单边z变换与双边z变换是有区别的。

例1：$x(n) = a^n u(n)$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}},\ |z|>|a| \quad \mathfrak{X}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}},\ |z|>|a|$$

显然，因果序列的单、双边z变换相同。

例2：$x(n) = a^{n+1}u(n+1)$

$$X(z) = \frac{z}{1-az^{-1}},\quad |a|<|z|<\infty$$

$$\mathfrak{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n} = \frac{a}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$$

显然，非因果序列的单、双边z 变换不同。

单边z变换的移位性质

当信号的因果性不改变时，双边z变换的性质就是单边z变换的性质。移位特性例外，因为时域的移位可能会改变信号的因果性。

if $x(n) \leftrightarrow \mathfrak{X}(z)$

then $x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0}\mathfrak{X}(z) - z^{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} x(n)z^{-n},\ n_0>0$

证明：
$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty} x(m+n_0)z^{-m} &= \sum_{n=+n_0}^{+\infty} x(n)z^{-(n-n_0)}\\ &= z^{n_0}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} - z^{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} x(n)z^{-n}\\ &= z^{n_0}\mathfrak{X}(z) - z^{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} x(n)z^{-n}\end{aligned}$$

单边z变换的移位性质

同理可得右移性质。

$$x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0}\mathfrak{X}(z) + z^{-n_0}\sum_{n=-n_0}^{-1} x(n)z^{-n},\ n_0>0$$

单边z变换在将线性常系数差分方程变换为代数方程时，可以自动将方程的初始条件引入，因而在解决增量线性系统问题时特别有用。

用单边z变换分析增量线性系统—举例

与单边拉氏变换相类似，用单边z变换可以方便地分析增量线性系统。

例：系统方程：$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$
初始条件：$y(-2) = 1/2,\ y(-1) = 1$，输入$x(n) = u(n)$，求$y(n)$。

对方程两边做单边z变换，则有

$$\mathfrak{Y}(z) - 3[z^{-1}\mathfrak{Y}(z) + y(-1)] + 2[z^{-2}\mathfrak{Y}(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = \mathfrak{X}(z)$$

整理后有

$$\mathfrak{Y}(z) = \frac{3y(-1) - 2z^{-1}y(-1) - 2y(-2)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} + \frac{\mathfrak{X}(z)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

其中第一项为零输入响应，第二项为零状态响应。代入初始条件及

$$\mathfrak{X}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

用单边z变换分析增量线性系统—举例

$$\mathfrak{Y}(z) = \frac{2-2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} + \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$
$$= \frac{2}{1-2z^{-1}} + \frac{-3}{1-z^{-1}} + \frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{4}{1-2z^{-1}}$$

进行反变换后，得到系统响应为

$$y(n) = [2(2)^n]u(n) + [-3-n+4(2)^n]u(n)$$

综上，用单边z变换分析增量线性系统的步骤是:

1. 对差分方程两边进行单边z变换，并代入初始条件;
2. 解出单边z变换$\mathfrak{Y}(z)$;
3. 对$\mathfrak{Y}(z)$进行反变换，即得时域响应$y(n)$。

本章小结

- 离散时间信号的双边z变换表示，及其与DTFT的关系，与拉氏变换的关系，与DFT的关系。
- 双边z变换的收敛域及其特征，收敛域和信号种类的关系。
  - ROC是否包括$|z|=\infty$，是$x(n)$是否因果的标志;
  - ROC是否包括$z=0$，是$x(n)$是否反因果的标志;
  - ROC是否包括单位圆，是$x(n)$的傅里叶变换存在的充要条件。
- 双边z变换的性质，常用信号的z变换；z反变换。
- 离散时间LTI系统的z域分析。系统特性与系统函数收敛域的关系。
- 单边z变换，利用单边z变换求解增量线性系统。

作业:

第1次：7.2，7.3(c)(e)(g)(n)，7.4(c)(e)(g)

第2次：7.7(b)(d)，7.10(b)(c)(f)(h)，7.11

第3次：7.14，7.16，7.18，7.20，7.22，7.26(b)(d)，7.27