

信号与系统A Signals and Systems

第10章 z变换

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2016年6月



本章内容

- 1 z变换
- 2 z变换的收敛域
- 3 z反变换
- 4 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值
- 5 z变换的性质
- 6 常用信号的z变换
- 7 利用z变换分析与表征LTI系统
- 8 系统函数的代数属性与方框图表示
- 9 单边z变换
- 10 本章小结



基本要求

- 1 掌握双边z变换的定义，z变换与离散时间傅里叶变换的关系；
- 2 掌握z变换的收敛域及各类信号收敛域的基本特征；
- 3 掌握z反变换的求法：幂级数展开法和部分分式展开法；
- 4 熟练掌握z变换的性质及常用信号的z变换对；
- 5 掌握系统函数零极点分布对系统时、频域特性的影响；并一般了解一阶与二阶系统的时域和频域特性。
- 6 掌握离散时间LTI系统的z域分析方法；
- 7 掌握单边z变换及利用单边z变换分析增量线性系统的方法。

与连续时间信号与系统的复频域分析类似，本章讨论离散时间信号与系统的复频域分析（也称z域分析或变换域分析）。



z变换的定义

由时域分析法，复指数序列 z^n 通过单位脉冲响应为 $h[n]$ 的LTI系统，输出响应为

$$y[n] = z^n * h[n] = H(z)z^n。$$

因此，复指数序列是一切离散时间LTI系统的特征函数。其中

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

是复变量 $z = re^{j\omega}$ 的函数，称为单位脉冲响应 $h[n]$ 的双边z变换。

与此相对应，信号 $x[n]$ 的双边z变换定义为：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

当 $z = e^{j\omega}$ 时，即为离散时间傅里叶变换（DTFT）。





z变换与离散时间傅里叶变换的关系

z变换的定义式可以写为如下形式：

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\omega n}$$

可见信号 $x[n]$ 的z变换就是对 $x[n]r^{-n}$ 做DTFT。因此z变换是DTFT的推广，它的收敛性更强。

z变换与DTFT一样存在着收敛的问题。

- 并非任何信号的z变换都存在。
- 并非z平面上的任何复数都能使 $X(z)$ 收敛。z平面上那些能使 $X(z)$ 收敛的点的集合，就构成了 $X(z)$ 的收敛域(ROC)。

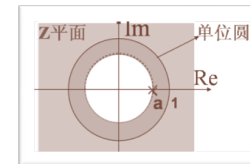
当 $z = e^{j\omega}$ 即 $r = 1$ 时，z变换就成为离散时间傅里叶变换。可见，DTFT就是在z平面中，在半径为1的圆周上的z变换。在z平面上，这个圆称为**单位圆**。单位圆在z变换中所起的作用，类似于s平面中 $j\omega$ 轴在拉氏变换中所起的作用。



双边z变换的示例

例1：右边信号 $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

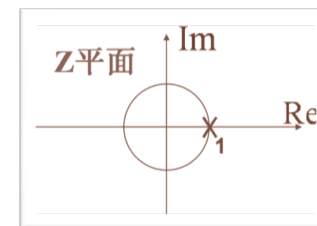


当 $|a| < 1$ 时，ROC包括单位圆， $x[n]$ 的DTFT存在。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad |z| > |a| \quad X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

例2：单位阶跃信号 $x[n] = u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > 1$$



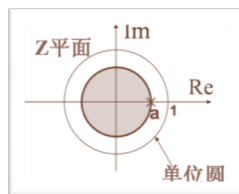
由于ROC不包括单位圆，不能通过将 $z \rightarrow e^{j\omega}$ 从 $X(z)$ 得到 $X(e^{j\omega})$ 。



双边z变换的示例

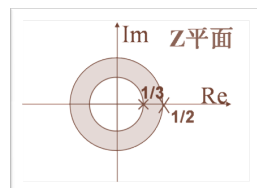
例3：左边信号 $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$\begin{aligned} X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n \\ &= -\frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| < |a| \end{aligned}$$



例4：双边信号 $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] - (\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ \text{ROC: } \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$



一般情况下， $X(z)$ 的ROC是z平面上一个以原点为中心的圆环。



双边z变换的特点

- z变换存在着收敛问题，不是任何信号都存在z变换，也不是任何复数z都能使 $X(z)$ 收敛。(收敛域是z正变换时产生的。)
- 仅仅由 $X(z)$ 的表达式不能唯一地确定一个信号，只有 $X(z)$ 连同相应的ROC一道，才能与信号 $x[n]$ 建立一一对应的关系。
- z变换的ROC，一般是z平面上以原点为中心的环形区域。
- 如果 $x[n] = \sum_i x_i[n]$ ，则其ROC是各个 $x_i[n]$ 的ROC的公共部分。若没有公共区域则表明 $x[n]$ 的z变换不存在。
- 当 $X(z)$ 是有理函数时，其ROC的边界总是由 $X(z)$ 的极点所在的圆周界定的。
- 若 $X(z)$ 的ROC包括单位圆，则有

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$



$X(z)$ 的几何表示—零极点图

如果 $X(z)$ 是有理函数, 将其分子多项式与分母多项式分别因式分解可以得到:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = M \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_p (z - z_p)}$$

由其全部的零、极点即可确定出 $X(z)$, 最多相差一个常数因子 M 。

因此, 若在 z 平面上表示出 $X(z)$ 的全部零、极点, 即构成 $X(z)$ 的几何表示——零极点图。

如果在零极点图上同时标出ROC, 则由该零极点图可以唯一地确定一个信号。

零极点图对描述LTI系统和分析LTI系统的特性, 具有重要的用途。



z变换的收敛域

与拉氏变换一样, z 变换收敛域的边界也是由极点的位置决定的, ROC与信号 $x[n]$ 的特性有关。所以, z 变换的收敛域与拉氏变换有类似的特征。下面具体讨论:

性质1: ROC是 z 平面上以原点为中心的环形区域。

说明: 由于
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\omega n}$$

可见对于给定的 $x[n]$, $X(z)$ 是否收敛仅与 r 的取值有关, 与 ω 无关。

$|z| = r$ 是 z 平面上以原点为中心, r 为半径的圆, 所以ROC是以原点为中心的同心圆构成的环域。

性质2: ROC内不包含任何极点。

性质3: 有限长序列 z 变换的ROC是整个 z 平面, 但可能不包含 $z = 0$ 或(和) $|z| = \infty$ 。



收敛域的特征

说明: 对于有限长序列, 其 z 变换为一有限项级数, 即

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}, \quad N_2 \geq N_1$$

- ① 当 $N_1 < 0, N_2 > 0$ 时, 和式中既有 z 的正幂项, 又包含 z 的负幂项, 此时ROC不包含 $z = 0$ 或 $|z| = \infty$ 。
- ② 若 N_1 为零或正值, 和式中仅有 z 的负幂项, 此时ROC就包括 $|z| = \infty$, 但不包括 $z = 0$ 。
- ③ 若 N_2 为零或负值, 和式中仅有 z 的正幂项, 此时ROC就包括 $z = 0$, 但不包括 $|z| = \infty$ 。

例: $\delta[n]$ 的 z 变换

$$\delta[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = 1$$

ROC为整个 z 平面, 包括 $z = 0$ 和 $|z| = \infty$ 。



收敛域的特征

性质4: 右边序列的ROC是最外部极点的外部, 但可能不包括 $|z| = \infty$ 。

说明: 右边序列指 $n < N_1$ 时, $x[n] = 0$ 的序列。当 $N_1 < 0$ 时, 由于 $X(z)$ 展开式中有若干个 z 的正幂项, 此时ROC不包含 $|z| = \infty$ 。

性质5: 左边序列的ROC是最内部极点的内部, 但可能不包括 $z = 0$ 。

说明: 左边序列指 $n > N_1$ 时, $x[n] = 0$ 的序列。当 $N_1 > 0$ 时, 由于 $X(z)$ 的展开式中包含有若干 z 的负幂项, 此时 z 不能为零。

性质6: 双边序列的 z 变换如果存在, 则ROC必定是一个环形区域。

性质7: 如果 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的, 那么它的ROC就被极点所界定, 或是延伸到无限远。

性质8: 如果 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的, 且若 $x[n]$ 是右边序列, ROC位于最外层极点的外边。

问题: ROC何时可以包含 $z = 0$ 或 $|z| = \infty$





收敛域的特征

例1: $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z - a)}$$

极点: $z = a, z = 0 (N-1 \text{阶})$; 零点: $z = a e^{j\frac{2\pi}{N}k} (k = 0, 1, \dots, N-1)$

例2: $x[n] = b^{|n|}, b > 0$

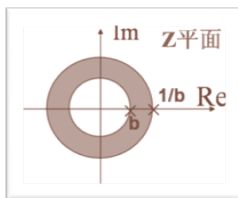
$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - b z^{-1}}, |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - b^{-1} z^{-1}}, |z| < b^{-1}$$

当 $0 < b < 1$ 时, ROC 为 $b < |z| < b^{-1}$ 。

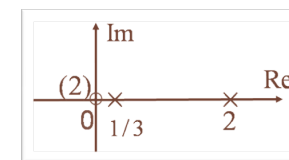
当 $b > 1$ 时, 两部分收敛域无公共部分, 表明此时 $X(z)$ 不存在。



收敛域的特征

例3:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$



极点: $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = 2$ 零点: $z = 0$ (二阶)

若其ROC为:

- $|z| > 2$ 时, 则 $x[n]$ 为右边序列, 且是因果的, 但其DTFT不存在。
- $|z| < 1/3$ 时, 则 $x[n]$ 为左边序列, 且是反因果的, 其DTFT不存在。
- $1/3 < |z| < 2$ 时, 则 $x[n]$ 为双边序列, 其DTFT存在。
- ROC是否包括 $|z| = \infty$, 是 $x[n]$ 是否因果的标志;
- ROC是否包括 $|z| = 0$, 是 $x[n]$ 是否反因果的标志;
- ROC是否包括单位圆, 是 $x[n]$ 的傅里叶变换存在的充要条件。



z反变换的定义

由于 $x[n]$ 的z变换就是对 $x[n]r^{-n}$ 做DTFT, 由DTFT的反变换有:

$$x[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \therefore x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) r^n e^{j\omega n} d\omega$$

令 $z = re^{j\omega}$, 则 $dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega$ 。当 ω 从 $0 \rightarrow 2\pi$ 变化时, z 沿着ROC内半径为 r 的圆周变化一周。

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

其中 C 是ROC中逆时针方向的圆周。

z反变换表明: 信号可以在z域分解为复指数信号的线性组合, 这些复指数分量分布在一个圆周上, 每个复指数分量的幅度为 $\frac{1}{2\pi j} \frac{X(z)}{z}$ 。



z反变换—部分分式展开法

z反变换的部分分式展开法和拉氏反变换的部分分式展开法相同。此时 $X(z)$ 应按照 $\frac{1}{1-az^{-1}}$ 形式展开为部分分式。

具体步骤如下:

- ① 求出 $X(z)$ 的极点, 将 $X(z)$ 展开为部分分式。
- ② 根据 $X(z)$ 的ROC, 确定每一项的ROC。
- ③ 利用常用信号的变换对与拉氏变换的性质, 对每一项进行反变换。

注意: 由于常用变换对都表示为 z^{-1} 的有理分式形式, 因此一定要掌握把 z^{-1} 的有理分式展开成部分分式的方法。

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \\ &= \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-6}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \end{aligned}$$



z反变换—部分分式展开法

例:

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad \text{ROC: } \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

根据总的ROC确定每一部分的ROC。

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

第一项的ROC: $|z| > 1/4$, 第二项的ROC: $|z| < 1/3$ 。

$$\therefore x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$



幂级数展开法 (长除法) 一举例

例: 用长除法计算z反变换。

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \quad \text{ROC: } \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

解: 由ROC易知, 这是一个双边序列, 因此首先将其分成两项

$$X(z) = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{5}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

第一项的收敛域为 $|z| < 1/2$, 应按升幂长除, 而第二项的收敛域为 $|z| > 1/3$, 应按降幂长除。

作为对照, 反变换的结果为:

$$x[n] = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$



z反变换—幂级数展开法 (长除法)

由 $X(z)$ 的定义, 将其展开为幂级数, 有

$$X(z) = \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots + x[n]z^{-n} + \cdots$$

展开式中各项的系数即为 $x[n]$, 当 $X(z)$ 是有理函数时, 可以通过长除的办法将其展开为幂级数。

- 由于右边序列的展开式中应包含无数多个 z 的负幂项, 所以要按降幂长除。
- 由于左边序列的展开式中应包含无数多个 z 的正幂项, 所以要按升幂长除。
- 双边序列则先要将其分成两部分, 分别对应信号的右边和左边部分, 再分别按上述原则长除。

幂级数展开法的缺点是当 $X(z)$ 较复杂 (含多个极点) 时, 难以得到 $x[n]$ 的闭式表达式。优点: 不用因式分解, 适合用计算机求反变换的数值解。幂级数展开法适合用来求解非有理函数形式 $X(z)$ 的反变换。



由零极点图对傅里叶变换几何求值

当ROC包括 $|z| = 1$ 时, z 变换在单位圆上的情况就是 $X(e^{j\omega})$, 因此也可以利用零极点图对其进行几何求值。其方法与拉氏变换时完全类似:

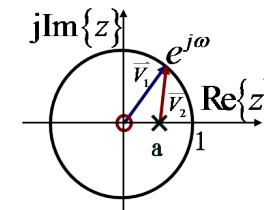
考察动点在单位圆上移动一周时, 各极点矢量和零点矢量的长度与幅角变化的情况, 即可反映系统的频率特性。

例1: 一阶系统 $y[n] - ay[n-1] = x[n]$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a \quad h[n] = a^n u[n]$$

当 $|a| < 1$ 时, ROC包括单位圆。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_2|}$$





由零点极点图对一阶系统几何求值

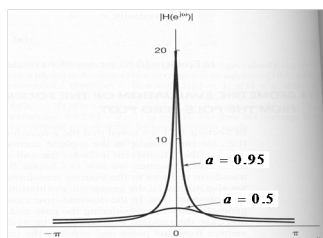
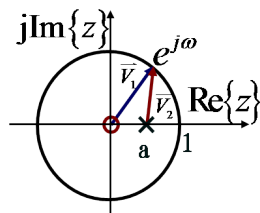
显然 $|v_1| = 1$, $|H(e^{j\omega})|$ 取决于 $|v_2|$ 的变化。

当 $0 < a < 1$ 时,

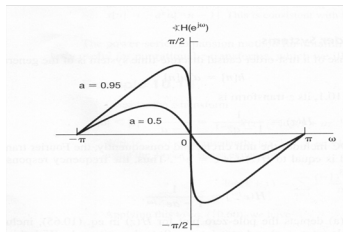
在 $\omega = 0$ 处, $|H(e^{j\omega})|$ 有最大值。

在 $\omega = \pi$ 处, $|H(e^{j\omega})|$ 有最小值。

$|H(e^{j\omega})|$ 随 ω 呈单调变化。



幅频特性

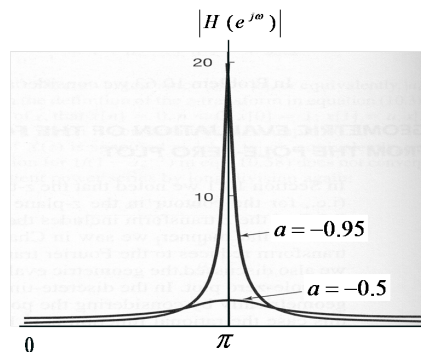
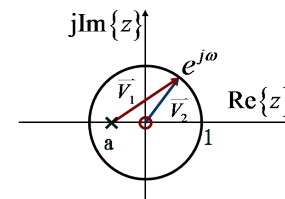


相频特性

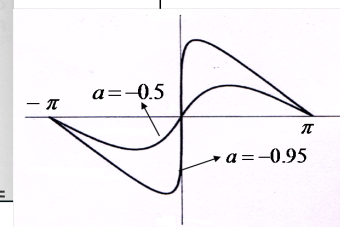


由零点极点图对一阶系统几何求值

当 $-1 < a < 0$ 时



幅频特性



相频特性



由零点极点图对二阶系统几何求值

$|a|$ 越小, 极点靠原点越近, 系统的频率响应越平缓, 系统的带宽越宽;

$|a|$ 越大, 极点靠单位圆越近, 系统频响越尖锐, 频响的极大值越大, 系统带宽越窄, 相位的非线性程度越厉害。

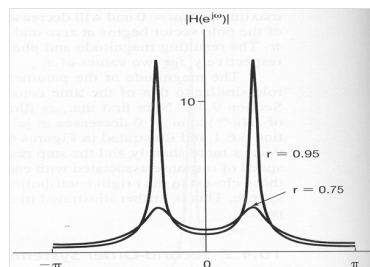
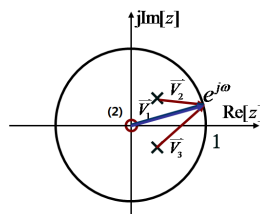
例2: 二阶系统:

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

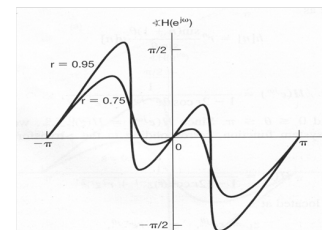
$$h[n] = r^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} u[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

极点: $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$ 。零点: $z = 0$ (2阶)



幅频特性



相频特性

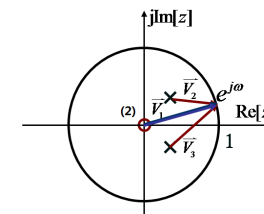


由零点极点图对二阶系统几何求值

考察动点在单位圆上移动一周时, 各极点矢量和零点矢量的长度与幅角的变化情况, 即得到二阶系统的频率特性。

二阶系统的频率特性:

$$0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$





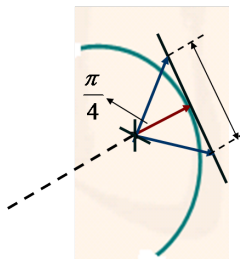
由零极点图对二阶系统几何求值

当 ω 从 $0 \rightarrow \pi$ 时, 在靠近 $\omega = \theta$ 处频率响应会出现极大值。

若 r 越接近于 1 , $|H(e^{j\omega})|$ 的峰值越尖锐。随着 r 减小, 极点逐步靠近原点, 频率响应趋于平坦。

当极点很靠近单位圆时, 也可以从零极点图粗略确定系统的带宽。

更一般的情况, 二阶系统也可能有两个实数极点, 此时系统处于过阻尼状态。其特性相当于两个一阶系统级联的结果。



z变换的性质—线性和时移

z变换的许多性质与DTFT类似, 这里着重讨论ROC的变化。

1. 线性性质

$$\text{if } x_1[n] \leftrightarrow X_1(z), \text{ ROC} = R_1 \quad x_2[n] \leftrightarrow X_2(z), \text{ ROC} = R_2 \\ \text{then } ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z), \text{ ROC 包含 } R_1 \cap R_2$$

若在线性组合过程中出现零极点相消现象, 则ROC可能要比各信号z变换ROC的公共部分大。

2. 时移性质

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow X(z), \text{ ROC} = R \\ \text{then } x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} X(z), \text{ ROC} = R$$

由于信号的时移有可能会改变其因果性, 故ROC在原点和无穷远点可能有增删。



z变换的性质—z域尺度变换

3. z域尺度变换

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow X(z), \text{ ROC} = R \\ \text{then } z_0^n x[n] \leftrightarrow X(z_0^{-1}z), \text{ ROC} = |z_0|R$$

此性质表明: 信号在时域乘以 z_0^n , 在z域等效进行尺度变换。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

- 若 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$, z域尺度变换就是零极点位置在z平面内旋转一个角度 ω_0 , 并且在径向位置有一个 r_0 倍的变化。由于在径向有变化, 因此其ROC也有一个尺度上的变化。
- 若 $z_0 = r_0$, 尺度变换就仅仅是零极点位置在径向有 r_0 倍的变化, ROC也将随之发生变化。
- 若 $z_0 = e^{j\omega_0}$, 尺度变换就变成了频移, 只对零极点位置进行旋转, 此时ROC不发生变化。

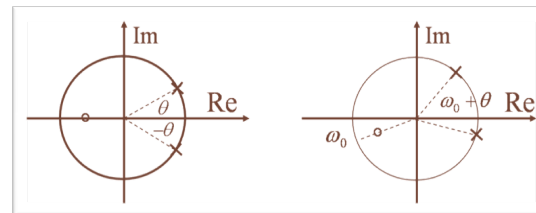


z变换的性质—z域尺度变换

频移性质

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow X(z), \text{ ROC} = R \\ \text{then } e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega_0} z), \text{ ROC} = R$$

频移性质指出: 信号在时域乘以复指数信号, 在z域相当于z平面作一旋转, 即全部零极点位置旋转一个角度 ω_0 。显然, 如果 $X(z)$ 的零极点是共轭成对的, 一般来讲频移后就不再有这种关系了。



当 $\omega_0 = \pm\pi$ 时, 有 $x[n](-1)^n \leftrightarrow X(-z)$, 零极点旋转 180° 。





z变换的性质—时域反转

4. 时域反转性质

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC} = R$$

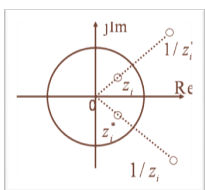
$$\text{then } x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1}), \quad \text{ROC边界倒置}$$

$$\text{设: } X(z) = \frac{z-c}{z-p} \quad \text{则: } X(z^{-1}) = \frac{z^{-1}-c}{z^{-1}-p} = \frac{1-cz}{1-pz}$$

信号在时域反转, 会引起 $X(z)$ 的零极点分布按倒量对称发生改变。若 $c(p)$ 是 $X(z)$ 的零(极)点, 则 $1/c(1/p)$ 是 $X(z^{-1})$ 的零(极)点。

对实信号而言: $X(z)$ 与 $X(z^{-1})$ 的零极点共轭倒量对称。

例: 若 $X(z)$ 的ROC为 $a < |z| < b$
则 $X(z^{-1})$ 的ROC为 $\frac{1}{b} < |z| < \frac{1}{a}$



z变换的性质—时间扩展与共轭对称

5. 时间扩展(时域内插)

$$\text{若: } x[n] \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC: } R$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}], & n \text{ 是 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$\text{则: } x_{(k)}[n] \leftrightarrow X(z^k), \quad \text{ROC: } R^{1/k}$$

$$X_{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]z^{-rk} = X(z^k)$$

6. 共轭对称性

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC: } R \quad \text{then } x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*), \quad \text{ROC: } R$$

当 $x[n]$ 是实信号时, $x^*[n] = x[n]$, 于是有 $X(z) = X^*(z^*)$ 。这表明: 如果 $X(z)$ 有复数零极点, 必共轭成对出现。



z变换的性质—卷积性质和z域微分

7. 卷积性质

$$\text{if } x_1[n] \leftrightarrow X_1(z), \quad \text{ROC} = R_1; \quad x_2[n] \leftrightarrow X_2(z), \quad \text{ROC} = R_2$$

$$\text{then } x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z), \quad \text{ROC包含 } R_1 \cap R_2$$

若相乘过程中有零极点抵消, 则ROC可能扩大。该性质是LTI系统z变换分析法的理论基础。

8. z域微分性质

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow X(z), \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{then } nx[n] \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{ROC} = R$$

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数 $X(z)$ 的反变换或具有高阶极点的 $X(z)$ 的反变换。



用z域微分求解z反变换

$$\text{例1: } X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

$$\therefore \frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}} \quad \therefore -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

$$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \leftrightarrow a(-a)^{n-1}u[n-1] = nx[n]$$

$$x[n] = \frac{a}{n}(-a)^{n-1}u[n-1] = -\frac{1}{n}(-a)^n u[n-1]$$

例2:

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

$$\therefore a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right) = -\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\therefore na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$





z变换的性质—初值定理

9. 初值定理

若因果序列 $x[n]$ 的z变换为 $X(z)$, 而且 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ 存在,

$$\text{则 } x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

证明: 由于因果信号 $x[n]$ 的z变换可以表示为

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x[n]z^{-n} + x[0] \quad \therefore x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

可以看到, 若因果序列 $x[n]$ 的初值有限, 则 $X(\infty)$ 也是有限值。若把 $X(z)$ 表示为 z 的两个多项式之比, 其分母多项式的阶数一定大于等于分子多项式的阶数。

$$\text{推论: } z\{X(z) - x[0]\} = x[1] + x[2]z^{-1} + x[3]z^{-2} + \dots$$

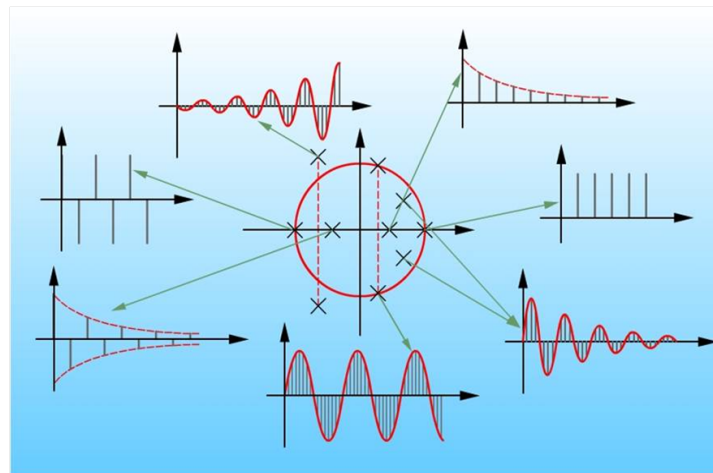
$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z[X(z) - x[0]] \cdots x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k} \right]$$

说明可以直接从 $X(z)$ 递推出 $x[n]$ 的任何一点的值。



极点位置与所对应的信号模式之间的关系

z平面上极点位置与所对应的信号模式之间的关系:



常用信号的z变换

除了由定义计算外, 可以利用z变换的性质从简单信号的z变换导出常用信号的z变换对。

$$x[n] = \delta[n - m]$$

$\therefore \delta[n] \leftrightarrow 1$, ROC为整个z平面, 利用平移性质:

$$\delta[n - m] \leftrightarrow z^{-m}$$

除 $z = 0 (m > 0)$ 或 $|z| = \infty (m < 0)$ 外, ROC为全部z平面。

$$x[n] = -u[-n - 1]$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

$$u[n - 1] \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

$$\therefore x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$\therefore u[-n - 1] \leftrightarrow \frac{z}{1 - z} = -\frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| < 1$$

$$\therefore x[n] = -u[-n - 1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| < 1$$

不建议用此方法做, 定义更简单。



常用信号的z变换

$$x[n] = a^n u[n]$$

直接由z域尺度变换性质有: $a^n u[n] \leftrightarrow U(a^{-1}z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$

$$x[n] = na^n u[n]$$

利用上面的结果, 再根据z域微分性质, 可得:

$$na^n u[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, |z| > |a|$$

$$x[n] = [\cos \omega_0 n] u[n]$$

$$x[n] = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) u[n]$$

根据频移特性可得:



常用信号的z变换

$$X(z) = \frac{1}{2}[U(ze^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})]$$

$$= \frac{1/2}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}} = \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}, |z| > 1$$

$$x[n] = [r^n \cos \omega_0 n] u[n]$$

由上例结果，再利用z域尺度变换性质

$$[r^n \cos \omega_0 n] u[n] \leftrightarrow \frac{1 - (r \cos \omega_0)z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, |z| > r$$

表10.1给出了z变换的常用性质。

表10.2中列出了一些常用信号的z变换。



系统的因果性、稳定性与H(z)的关系

离散时间LTI系统的分析方法，有时域分析法、频域分析法还有z域分析法。由z变换的卷积性质有：

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad Y(z) = X(z)H(z) \quad \text{ROC包括 } R_1 \cap R_2$$

对Y(z)做反变换即可得到输出响应y[n]。H(z)称为系统的**系统函数**或**转移函数**，它和ROC一起，可以唯一地表征一个系统。

- 因果性：如果LTI系统是因果的，即当 $n < 0$ 时 $h[n] = 0$ ，所以H(z)的ROC是最外部极点的外部，并且包括 $|z| = \infty$ 。
- 稳定性：若LTI系统稳定，则 $\sum_n |h[n]| < \infty$ ，即h[n]的DTFT存在，表明单位圆在H(z)的ROC内。即H(z)的ROC必包括单位圆。

综合以上分析可以得出：一个因果稳定的离散时间LTI系统的系统函数，其全部极点**一定**位于z平面的单位圆内。反之亦然吗？当H(z)是关于z的有理函数时，因果性要求H(z)的分子阶数不能高于分母阶数。



LTI系统z域分析法步骤及举例

LTI系统z域分析法步骤：

1. 求X(z)及其ROC；
2. 由系统描述求H(z)及其ROC；
3. 由Y(z) = X(z)H(z)求Y(z)并确定ROC；
4. 求z反变换得到y[n]。

例：已知 $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$ ， $h[n] = [\frac{6}{5}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{5}(-\frac{1}{3})^n] u[n]$ ，求y[n]。

解：

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{\frac{6}{5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$\text{进行z反变换，得： } y[n] = \left[\frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$



系统函数的计算—差分方程描述的系统

相当广泛的离散时间LTI系统，都可以用一个具有零初始条件的N阶线性常系数差分方程来表征：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

对方程两边进行z变换，则有

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad \therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

由方程系数可以方便地求出H(z)。

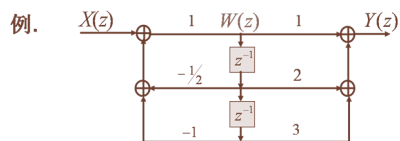




系统函数的计算—方框图

差分方程本身并没有包含ROC的信息。因此，在用差分方程表征系统时，**必须指出系统的因果性、稳定性等特征**，只有这样差分方程才能完整地描述一个系统。

与连续时间LTI系统相类似，还可以用**方框图、零极点图**等方式来描述一个离散时间LTI系统。



$$W(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}W(z) - z^{-2}W(z)$$

$$Y(z) = W(z) + 2z^{-1}W(z) + 3z^{-2}W(z)$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

可进一步写出差分方程。

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + 3x[n-2]$$

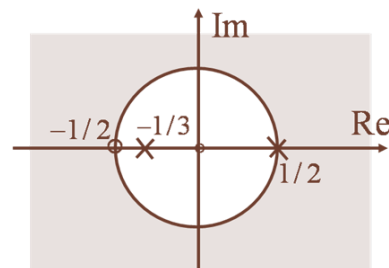


系统函数的计算—零极点图

根据零极点图及ROC可写出一个有理函数的 $H(z)$ ，最多和实际的 $H(z)$ 相差一个常数。

例:

解: 由零极点图可以写出



注意原点处的零点。

再根据其它条件确定 H_0

$$\begin{aligned} H(z) &= H_0 \frac{z(z + \frac{1}{2})}{(z + \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})} \\ &= H_0 \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} \\ \text{ROC: } &|z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$



LTI系统的z域分析—举例

例: 由下列差分方程做出网络结构, 并求其系统函数 $H(z)$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 。

$$y[n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = x[n]$$

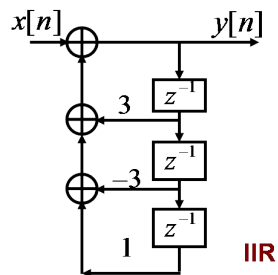
解: 由方程可得

$$(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3})Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^3}$$

利用z变换的性质可得

$$h[n] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u[n]$$



系统互联的系统函数

1. 级联:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

ROC包括 $R_1 \cap R_2$

2. 并联:

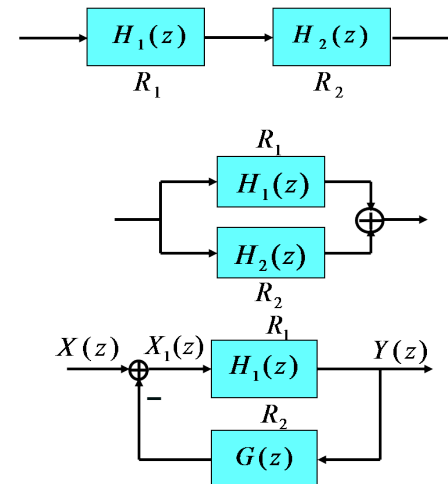
$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

ROC包括 $R_1 \cap R_2$

3. 反馈联结:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)G(z)}$$

ROC包括 $R_1 \cap R_2$



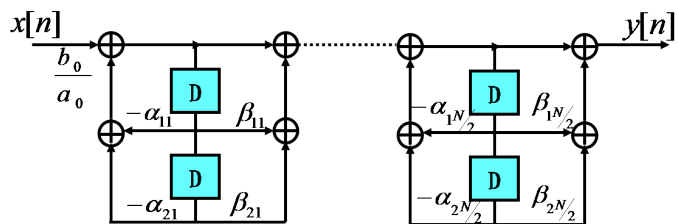


LTI系统的级联型结构

将 $H(z)$ 因式分解，在无重阶零极点时（ N 为偶数时）可得

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^N \frac{1 + \mu_k z^{-1}}{1 + \eta_k z^{-1}}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} = \frac{b_0}{a_0} \prod_{k=1}^{N/2} H_k(z)$$



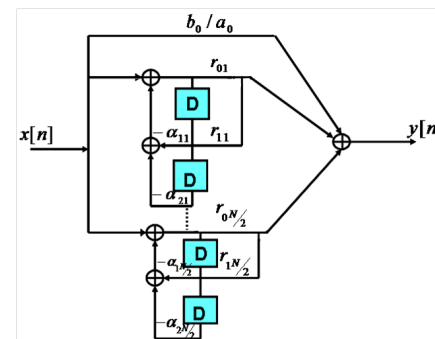
LTI系统的并联型结构

将 $H(z)$ 展开为部分分式，在无重阶极点且 N 为偶数时有

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 + \eta_k z^{-1}}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{N/2} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{N/2} H_k(z)$$



单边z变换的定义

信号 $x[n]$ 的单边z变换定义为：

$$\mathfrak{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

与单边拉氏变换一样，信号 $x[n]$ 的单边z变换就是信号 $x[n]u[n]$ 的双边z变换，因此有

$$x[n]u[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \mathfrak{X}(z) z^{n-1} dz$$

由于单边z变换的定义式中只包括z的负幂项，不含有z的正幂项，因而单边z变换的ROC与因果信号双边z变换的ROC特性相同。即一定是最外部极点的外部并且包括 $|z| = \infty$ ，不可能有其它情况。故对单边z变换不再强调ROC。



单边z变换—举例

当信号 $x[n]$ 是一个因果序列时，其单边z变换与双边z变换相同，否则单边z变换与双边z变换是有区别的。

例1: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad \mathfrak{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

显然，因果序列的单、双边z变换相同。

例2: $x[n] = a^{n+1} u[n+1]$

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, |a| < |z| < \infty$$

显然，非因果序列的单、双边z变换不同。

$$\mathfrak{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$



单边z变换的移位性质

当信号的因果性不改变时，双边z变换的性质就是单边z变换的性质。移位特性例外，因为时域的移位可能会改变信号的因果性。

$$\text{if } x[n] \leftrightarrow \mathfrak{X}(z)$$

$$\text{then } x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0} \mathfrak{X}(z) + z^{-n_0} \sum_{n=-n_0}^{-1} x[n]z^{-n}, n_0 > 0$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \sum_{m=0}^{+\infty} x[m - n_0]z^{-m} &= \sum_{n=-n_0}^{+\infty} x[n]z^{-(n+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} \\ &+ z^{-n_0} \sum_{n=-n_0}^{-1} x[n]z^{-n} = z^{-n_0} \mathfrak{X}(z) + z^{-n_0} \sum_{n=-n_0}^{-1} x[n]z^{-n} \end{aligned}$$

$$\text{同理可得: } x[n + n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \mathfrak{X}(z) - z^{n_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} x[n]z^{-n}, n_0 > 0$$



用单边z变换分析增量线性系统—举例

与单边拉氏变换相类似，用单边z变换可以方便地分析增量线性系统。

例: 系统方程: $y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$

初始条件: $y[-2] = 1/2, y[-1] = 1$, 输入 $x[n] = u[n]$, 求 $y[n]$ 。

对方程两边做单边z变换, 则有

$$\mathfrak{Y}(z) - 3\{z^{-1}\mathfrak{Y}(z) + y[-1]\} + 2\{z^{-2}\mathfrak{Y}(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\} = \mathfrak{X}(z)$$

整理后有

$$\mathfrak{Y}(z) = \frac{3y[-1] - 2z^{-1}y[-1] - 2y[-2]}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} + \frac{\mathfrak{X}(z)}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

其中第一项为零输入响应, 第二项为零状态响应。代入初始条件及

$$\mathfrak{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



用单边z变换分析增量线性系统—举例

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}(z) &= \frac{2 - 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} + \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \\ &= \frac{2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{-3}{1 - z^{-1}} + \frac{-z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{4}{1 - 2z^{-1}} \end{aligned}$$

进行反变换后, 得到系统响应为

$$y[n] = [2(2)^n]u[n] + [-3 - n + 4(2)^n]u[n]$$

综上, 用单边z变换分析增量线性系统的步骤是:

- ① 对差分方程两边进行单边z变换, 并代入初始条件;
- ② 解出单边z变换 $\mathfrak{Y}(z)$;
- ③ 对 $\mathfrak{Y}(z)$ 进行反变换, 即得时域响应 $y[n]$ 。



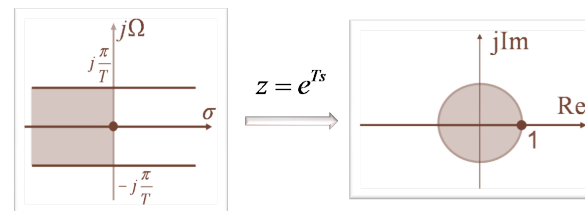
z变换与拉氏变换

与拉氏变换的情况对照, 可以发现s平面与z平面之间存在着一种映射关系, $z = e^{sT}$ 就是这种映射关系。

由 $z = e^{Ts} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = r e^{j\Omega}$, 可得 $r = e^{\sigma T}$, $\Omega = \omega T$ 。所以有:

$$\sigma < 0, r < 1; \quad \sigma > 0, r > 1; \quad \sigma = 0, r = 1$$

$$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}, \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \quad \omega = 0, \Omega = 0$$





本章小结

- 离散时间信号的双边 z 变换表示，及其与DTFT的关系。
- 双边 z 变换的收敛域及其特征，收敛域和信号种类的关系。
 - ROC是否包括 $|z| = \infty$ ，是 $x[n]$ 是否因果的标志；
 - ROC是否包括 $z = 0$ ，是 $x[n]$ 是否反因果的标志；
 - ROC是否包括单位圆，是 $x[n]$ 的傅里叶变换存在的充要条件。
- 双边 z 变换的性质，常用信号的 z 变换； z 反变换。
- 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值。
- 离散时间LTI系统的 z 域分析。系统特性与系统函数收敛域的关系。
- 单边 z 变换，利用单边 z 变换求解增量线性系统。



作业

- CH10-1: 10.6, 10.8, 10.12, 10.15
- CH10-2: 10.17, 10.22, 10.27, 10.29, 10.31
- CH10-3: 10.20, 10.34, 10.46, 10.48