信号与系统A
Signals and Systems
第1章　信号与系统

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2016年 5月 23 日

本章内容与基本要求

1. 连续时间和离散时间信号
2. 自变量的变换
3. 指数信号与正弦信号
4. 单位冲激与单位阶跃函数
5. 连续时间和离散时间系统
6. 基本系统性质
7. 本章小结

基本要求

- 掌握信号与系统的描述方法；
- 掌握信号自变量变换对信号的影响；
- 掌握任意信号的奇偶分解；
- 掌握常用基本信号的特性；
- 掌握离散时间复指数信号与正弦信号的周期性；
- 掌握系统的性质以及增量线性系统的等效方法。

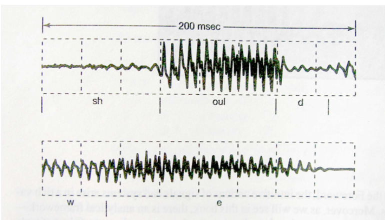
本章目的

绪论提到：信号与系统的概念出现在极为广泛的各种领域中。

我们需要（实际也存在着）一种分析体系，即一种描述信号与系统的语言和一整套分析它们的强有力的方法，这种语言和方法能很好地应用于这些领域中要解决的问题。

本章从引入信号与系统的数学描述及其表示入手来建立这样一种分析体系。在此基础上，本课程将建立和描述信号与系统的一些概念和方法，从而加强对信号与系统问题的理解。

作为信号分析的基础，本课程只研究一维确定性信号。



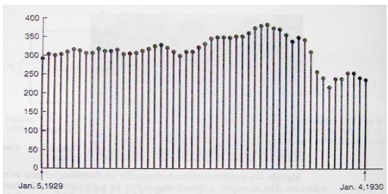


Figure 1.6 An example of a discrete-time signal: The weekly Dow-Jones stock market index from January 5, 1929, to January 4, 1930.

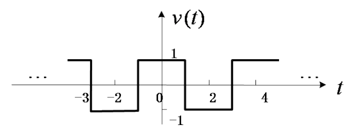
一维确定性信号的共性及其建模

共性：一维确定性信号均可以表示成一个自变量的函数。不失一般性，本课程将以时间为自变量讨论问题。

连续时间信号—自变量连续变化的信号。用t表示连续的时间自变量，连续时间信号模型化为：$x(t)$。

离散时间信号—只在某些离散的时间点上才有定义的信号，本质上是一串有序的数值，也称为序列。用n表示离散的时间自变量，离散时间信号模型化为：$x[n]$。

连续时间信号在离散时刻点上的样本可以构成一个离散时间信号。连续时间信号的值域可以是不连续的。



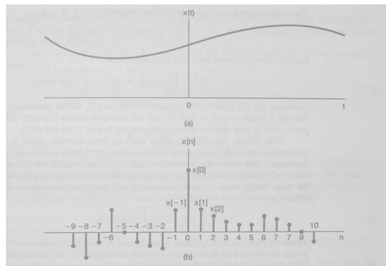


Figure 1.7 Graphical representations of (a) continuous-time and (b) discrete-time signals.

信号能量和功率的抽象化

电路中电阻的**瞬时功率**：$p(t) = v(t) * i(t) = \frac{1}{R}v^2(t)$
则在时间间隔$t_1 \le t \le t_2$内消耗的**总能量**和**平均功率**分别为：

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v^2(t)dt$$

$$\overline{P} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v^2(t)dt$$

类似地，连续时间信号$x(t)$在$t_1 \le t \le t_2$区间的能量定义为：

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt$$

连续时间信号$x(t)$在$t_1 \le t \le t_2$区间的平均功率定义为：

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\, dt$$

无限区间信号的总能量和平均功率

离散时间信号$x[n]$在$n_1 \le n \le n_2$区间的能量和平均功率分别定义为：

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2\, dt \qquad P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1}\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2\, dt$$

在**无限区间**上也可以定义信号的总能量和平均功率：

连续时间情况下：

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

离散时间情况下：

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

三类重要的信号（无限时间域）

按照信号的能量特性可以将信号分为**能量信号**与**功率信号**。

1. 能量信号—信号具有有限的总能量，即：

   $$E_\infty < \infty, \qquad P_\infty = 0$$

   工程中实际存在的信号大多属于此种信号。
2. 功率信号—信号有无限的总能量，但平均功率有限，即：

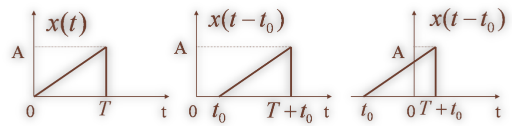
   $$E_\infty = \infty, \qquad 0 < P_\infty < \infty$$

3. 信号的总能量和平均功率都是无限的，即：

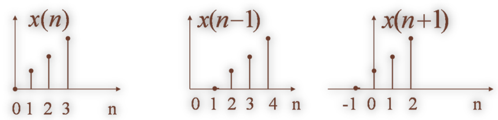
   $$E_\infty = \infty, \qquad P_\infty = \infty$$

时移变换（Shift of Signals）

对**连续信号**：$x(t) \to x(t - t_0)$
当$t_0 > 0$时，信号向右平移t_0；当$t_0 < 0$时，信号向左平移$|t_0|$。



对**离散信号**：$x[n] \to x[n - n_0]$
当$n_0 > 0$时，信号向右平移n_0；当$n_0 < 0$时，信号向左平移$|n_0|$。



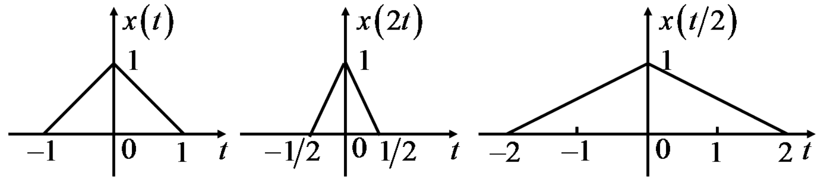
反转变换（Reflection of Signals）

连续：$x(t) \to x(-t)$，信号以$t=0$为轴做镜像对称；
离散：$x[n] \to x[-n]$，信号以$n=0$为轴做镜像对称。

将信号的时移与反转相结合，就可以得到$x(-t \pm t_0)$和$x[-n \pm n_0]$。在画波形时可以先平移再反转，也可以先反转再平移。但要注意的是，反转后自变量变为$-t$或$-n$，所以平移的方向与前述相反。

尺度变换（Scaling）

$x(t) \to x(at)$
当$a>1$时，$x(at)$是将$x(t)$在时间上压缩a倍；
当$0<a<1$时，$x(at)$是将$x(t)$在时间上扩展$1/a$倍。



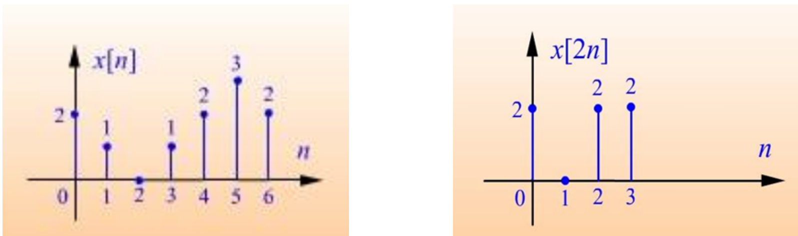
由于离散时间信号的自变量只能取整数值，因而严格来说尺度变换只对连续时间信号而言。

离散时间信号的抽取（decimation）

抽取：$x[n] \to x[2n]$。

显然，$x[2n]$是从$x[n]$中依次抽出自变量取偶数时的各点而构成的。这一过程称为对信号$x[n]$的抽取（decimation）。

对信号抽取的过程是不可逆的。

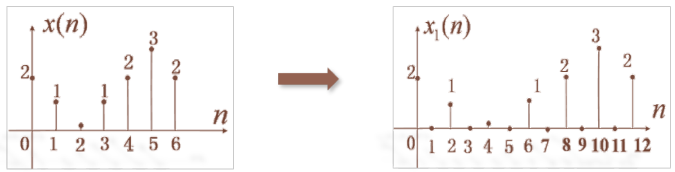


离散时间信号的内插（interpolation）

内插：

$$x[n] \to x_1[n] = \begin{cases} x[n/2] & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$$

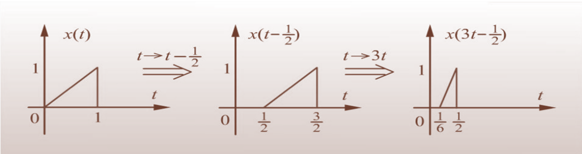
从$x[n]$到$x_1[n]$的过程称为对信号$x[n]$的内插。



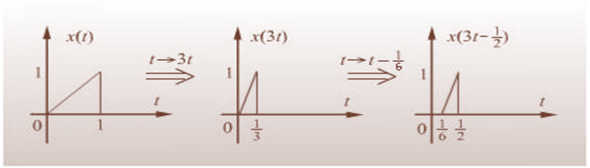
对信号内插的过程是可逆的。

例1-信号的自变量变换：$x(t) \to x\left(3t-\frac{1}{2}\right)$

解一：$x(t) \xrightarrow{t \to t-\frac{1}{2}} x\left(t-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{t \to 3t} x\left(3t-\frac{1}{2}\right)$



解二：$x(t) \xrightarrow{t \to 3t} x(3t) \xrightarrow{t \to t-\frac{1}{6}} x\left(3\left(t-\frac{1}{6}\right)\right) = x\left(3t-\frac{1}{2}\right)$



例2-信号的自变量变换：$x(t) \to x\left(-\frac{t}{3}+2\right)$

解一：

$$x(t) \xrightarrow{t \to -t} x(-t) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x\left(\frac{-t}{3}\right) \xrightarrow{t \to t-6} x\left(\frac{-t}{3}+2\right)$$

解二：

$$x(t) \xrightarrow{t \to t+2} x(t+2) \xrightarrow{t \to -t} x(-t+2) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x\left(-\frac{t}{3}+2\right)$$

解三：

$$x(t) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x\left(\frac{t}{3}\right) \xrightarrow{t \to -t} x\left(\frac{-t}{3}\right) \xrightarrow{t \to t-6} x\left(\frac{-t}{3}+2\right)$$

解四：

$$x(t) \xrightarrow{t \to t-6} x(t-6) \xrightarrow{t-6 \to -(t-6)} x(-t+6) \xrightarrow{-(t-6) \to -(t-6)/3} x\left(\frac{-t}{3}+2\right)$$

信号的自变量变换总结

形如$x(t) \to x(\alpha t+\beta)$的自变量变换建议采用如下步骤：

1. 先根据β的值对信号时移得$x(t+\beta)$；
2. 再根据$|\alpha|$的值对第1步的结果以原点为中心做尺度变换得到$x(|\alpha|t+\beta)$；
3. 如果$\alpha<0$，还要对第2步的结果以纵坐标为轴进行反转；
4. 取特殊点进行验证。

如例二：

$$x(t) \xrightarrow{t \to t+2} x(t+2) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x\left(\frac{t}{3}+2\right) \xrightarrow{t \to -t} x\left(-\frac{t}{3}+2\right)$$

周期信号与非周期信号

周期信号的定义：

$$x(t)=x(t+T) \qquad x[n]=x[n+N]$$

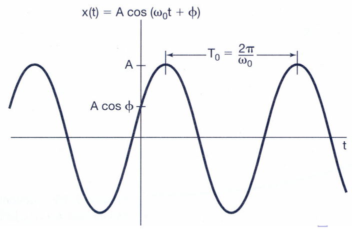
T或N为信号的周期。显然，$2T, 3T, \cdots$或$2N, 3N, \cdots$也是信号的周期。

满足上述关系的正实数（正整数）中最小的一个，称为信号的**基波周期**T_0（N_0）

不具备周期性的信号称为非周期信号。

$x(t)=C$（常数）可视为周期信号，但它的基波周期没有确定的定义。

$x[n]=C$（常数）可以视为周期信号，其基波周期为1。



奇信号、偶信号及信号的奇偶分解

对**实信号**而言：

如果有$x(-t)=x(t)$ 或$x[-n]=x[n]$，则称该信号为**偶信号**。

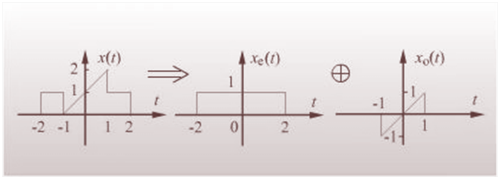
如果有$x(-t)=-x(t)$ 或$x[-n]=-x[n]$，则称该信号为**奇信号**。

任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和。

$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$，其中：　　$x[n]=x_e[n]+x_o[n]$，其中：

$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)] \qquad x_e[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$$

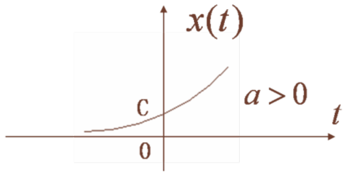
$$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)] \qquad x_o[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[-n]\}$$

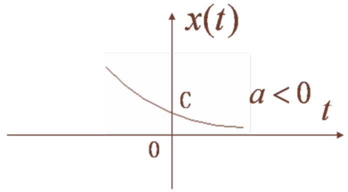


连续时间指数信号（Exponential Signal）

连续时间指数信号的一般形式为：$x(t)=Ce^{at}$，其中，C、a为常数。

实指数信号：当C、a为实数时





周期性复指数信号与正弦信号：当$C=1$、$a=j\omega_0$时

$x(t)=e^{j\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t$。

基波周期$T_0=2\pi/|\omega_0|$。实部、虚部均为正弦信号，显然有：

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right] \qquad \sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right]$$

连续时间指数信号（Exponential Signal）

更一般的连续时间正弦信号为：

$$x\left(t\right)=A\cos\left(\omega_0 t+\phi\right)=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

连续时间正弦信号是周期信号，其基波周期$T_0=2\pi/|\omega_0|$。

$e^{j\omega_0 t}$的无限区间总能量和平均功率:

显然，其总能量是无限的。而平均功率

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|e^{j\omega_0 t}\right|^2 dt=1$$

因此，周期复指数信号是功率信号。

连续时间指数信号（Exponential Signal）

成谐波关系的复指数信号集：

$$\phi_k(t)=\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

此信号集中的每一个信号都是周期的，它们的频率分别为$k\omega_0$，都是ω_0的整数倍，因而称它们是成谐波关系的。

信号集中信号的基波频率为ω_0，基波周期为$T_0=2\pi/|\omega_0|$，各次谐波的周期分别为$T_k=\frac{2\pi}{|k\omega_0|}$，公共周期为$T_0$。

上述成谐波关系的信号做为基本构造单元可以构造各种各样的周期信号。

例：两个复指数信号的和可以化成一个复指数函数和一个正弦函数的乘积。

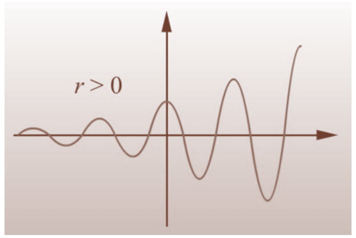
$$x(t)=e^{j2t}+e^{j3t}=e^{j2.5t}\left[e^{-j0.5t}+e^{j0.5t}\right]=2e^{j2.5t}\cos 0.5t$$

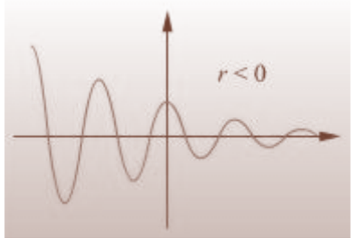
一般连续时间复指数信号

复指数信号： 当$C=|C|e^{j\theta}, a=r+j\omega_0$时，

$$x(t)=Ce^{at}=|C|\,e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$
$$=|C|\,e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)+j\,|C|\,e^{rt}\sin(\omega_0 t+\theta)$$

实部和虚部都是按指数规律变化的正弦振荡。





离散时间指数信号（Exponential Signal）

离散时间指数信号的一般形式为：

$$x[n]=Ca^n$$

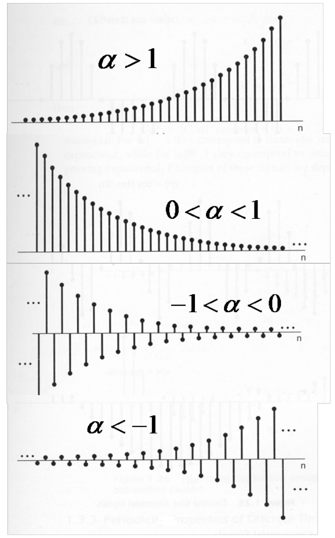
其中，C、a为常数。

若令$a=e^{\beta}$则类似于连续时间的情况，有另外一种表示形式$x[n]=Ce^{\beta n}$

实指数信号： 当C、a为实数时

- $a>1$时呈单调指数增长。
- $0<a<1$时呈单调指数衰减。
- $-1<a<0$时摆动指数衰减。
- $a<-1$时摆动指数增长。

思考题： 与连续时间的情况有何不同？为什么？



离散时间正弦信号

复指数信号与正弦信号：

当$C=1$、$a=e^{j\omega_0}$时，

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}$$
$$=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$$

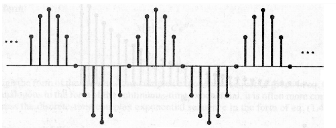
实部与虚部都是正弦信号。

$e^{j\omega_0 n}$具有无限的总能量和有限的平均功率，显然，恒模的复指数信号是功率信号。

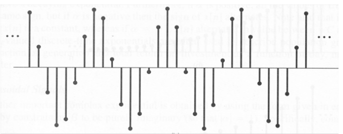
思考题：

证明离散时间正弦信号都是功率信号。

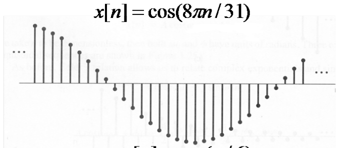
离散时间正弦信号是否都为周期信号？



$x[n]=\cos(2\pi n/12)$



$x[n]=\cos(8\pi n/31)$



$x[n]=\cos(n/6)$

离散时间指数信号（Exponential Signal）

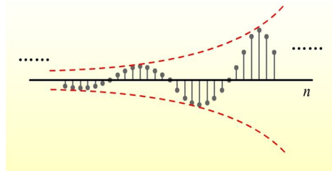
一般的复指数信号：

当$C=|C|e^{j\theta}, a=|a|e^{j\omega_0}$时，

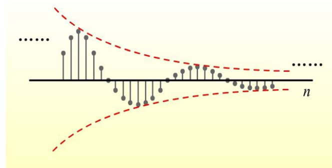
$$x[n]=|C|\,|a|^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$
$$=|C|\,|a|^n\cos(\omega_0 n+\theta)$$
$$+j\,|C|\,|a|^n\sin(\omega_0 n+\theta)$$

实部和虚部都是按指数规律变化的正弦振荡。

- 当$|a|=1$时它的实部与虚部都是正弦序列。
- 当$|a|>1$时，它的实部与虚部都是指数增长的正弦序列。
- 当$|a|<1$时，它的实部与虚部都是指数衰减的正弦序列。



$|a|>1$



$|a|<1$

离散时间复指数序列的周期性

思考题：离散时间正弦信号是否都为周期信号？

离散时间恒模复指数信号为周期信号的充分必要条件：

$$e^{j\omega_0[n+N]} = e^{j\omega_0 n} \Leftrightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow \omega_0 N = 2\pi m \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

表明只有在$\frac{\omega_0}{2\pi}$是一个有理数时，信号才具有周期性。

正弦信号也可以得到类似的结论。

在满足周期性要求的情况下，总能找到无公因子的两个正整数m, N使得：$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$

此时$N = \frac{2\pi}{\omega_0}m$即为该信号的周期，也称为基波周期。与连续时间信号的情况一样，**离散时间信号的基波频率定义为**$\omega_B = \frac{2\pi}{N}$。因此该信号的基波频率为$\omega_B = \frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$。

离散时间复指数序列的周期性

对$e^{j\omega_0 t}$，ω_0越大，对应的信号的振荡频率就愈高。

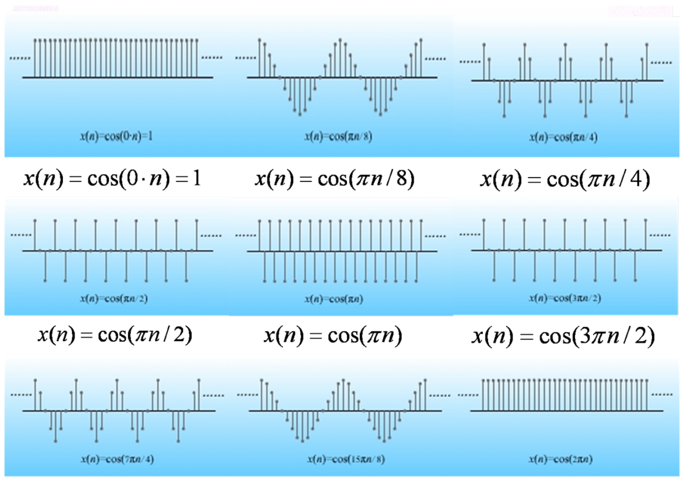
而对$e^{j\omega_0 n}$，由于$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$，上式表明，离散时间复指数信号在频率$\omega_0 + 2\pi$和频率$\omega_0$时是完全一样的。

观察与$e^{j\omega_0 n}$相对应的正弦序列随ω_0变化的情况。可以看出，当ω_0从0增加到π时，信号振荡频率随之增加；当ω_0从π增加到2π时，信号的振荡频率随之下降。高频对应于π的奇数倍附近，低频对应于π的偶数倍附近。

离散时间信号的频率有效范围只有2π。因此，考察这种离散时间复指数信号时，只需在2π范围内选择频率即可。

$$\boxed{e^{j2\pi n} = 1, e^{j\pi n} = \cos(\pi n) = (-1)^n, e^{j\frac{\pi}{2}n} = j^n, e^{j\frac{3\pi}{2}n} = (-j)^n}$$

离散时间正弦序列随频率的变化情况



$x(n) = \cos(0 \cdot n) = 1$　$x(n) = \cos(\pi n/8)$　$x(n) = \cos(\pi n/4)$

$x(n) = \cos(\pi n/2)$　$x(n) = \cos(\pi n)$　$x(n) = \cos(3\pi n/2)$

$x(n) = \cos(7\pi n/4)$　$x(n) = \cos(15\pi n/8)$　$x(n) = \cos(2\pi n)$

信号$e^{j\omega_0 t}$与$e^{j\omega_0 n}$的比较

成谐波关系的复指数信号集： $\phi_k(n) = \left\{ e^{jk2\pi/Nn} \right\} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

基波周期为N，基波频率$2\pi/N$。由于

$$\phi_{k+N}(n) = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k(n)$$

该信号集中的信号并不都是独立的，其中只有N个独立的谐波分量。

上述成谐波关系的信号做为基本单元可以构造各种各样的周期信号。

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0不同，信号不同； 对任何ω_0，信号都是周期的； 基波频率：$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 基波周期：T_0	频率差2π的整数倍时，信号相同； 仅当$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}m$时，才是周期的； 基波频率：$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$ 基波周期：N

例：确定离散时间信号$x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$的基波周期。

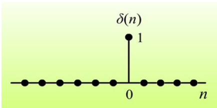
离散时间单位脉冲和单位阶跃序列

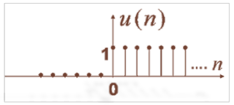
单位脉冲序列：

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

单位阶跃序列：

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$





单位脉冲与单位阶跃序列之间的关系：

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]; \qquad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

单位脉冲函数是构成其它信号的基本元素，且具有采样性质。

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]; \qquad x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

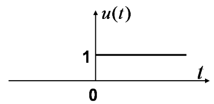
连续时间单位阶跃和单位冲激函数

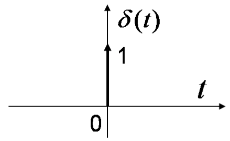
单位阶跃函数：

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

单位冲激函数：

$$\delta(t) \triangleq \begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$





单位冲激与单位阶跃的关系：

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau$$

单位阶跃是单位冲激的积分函数，单位冲激是单位阶跃的一次微分。

单位冲激与阶跃函数的极限分析

定义如图所示的$u_\Delta(t)$，
显然当$\Delta \to 0$时，$u_\Delta(t) \to u(t)$。
定义

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}; \ \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

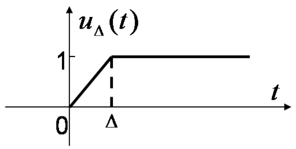
$\delta(t)$可视为一个面积始终为1的矩形，当其宽度趋于零时的极限。矩形的面积称为冲激强度。

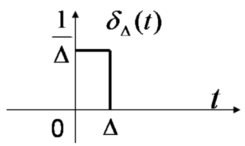
$\delta(t)$具有提取连续时间信号样本的作用。

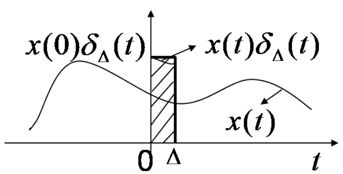
$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

$$\Delta \to 0, \ x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$







连续时间与离散时间系统

系统：是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理，将其转换为所需要的输出信号。

连续时间系统：

输入信号与输出响应都是连续时间信号的系统。$x(t) \to y(t)$

离散时间系统：

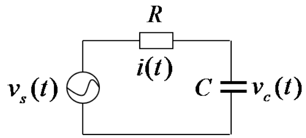
输入信号与输出响应都是离散时间信号的系统。$x[n] \to y[n]$

鉴于系统是围绕输入输出而定义的，系统的建模应该从输入输出信号的关系入手。

所谓建立系统模型就是要从实际物理问题抽象出描述输入—输出关系或物理特性的数学模型。一般有输入—输出描述和状态空间描述两种。

连续时间系统的建模

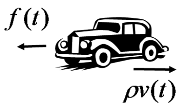
例：右图的RC电路，$v_s(t)$为输入，$v_c(t)$为输出，确定输入输出的关系。



$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t), \quad i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

例：动力$f(t)$为输入，速度$v(t)$为输出，汽车质量为m，$\rho v(t)$为摩擦力，确定输入输出的关系。



$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}[f(t) - \rho v(t)] \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

可以统一为同一个微分方程：$dy(t)/dt + ay(t) = bx(t)$

离散时间系统的建模

例：银行工资户头资金流量建模

令$x[n]$为第n个月末的净存款。$y[n]$为第n月末的节余。假设月息为1%。系统可以建模为：

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n] \Rightarrow y[n] - 1.01y[n-1] = x[n]$$

例：我国人口模型

令$x[n]$为第n个年末的净人口流入。$y[n]$为第n个年末的总人口。k_d为人口死亡率，k_b为出生率。系统可以建模为：

$$y[n] = (1+k_b-k_d)y[n-1]+x[n] \Rightarrow y[n]-(1+k_b-k_d)y[n-1] = x[n]$$

可以统一为同一个差分方程：

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

系统的建模

结论：工程应用中的很多连续时间系统可以由线性微分方程描述，而离散时间系统可以由线性差分方程描述。

本课程所研究的对象: LTI（Linear Time-Invariant Systems）系统就是这样的一类系统。

注意：由于实际工程系统的复杂性和一些不理想因素的存在，系统的建模往往要进行一些假设，在这些假设成立条件下，所建理论模型才能逼近实际系统。因此在工程应用中必须时刻注意这些假设的适用范围，以及所建模型与实际系统的差距。

系统的互联（interconnection of systems）

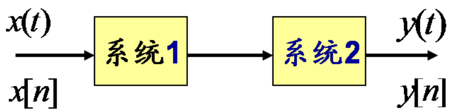
研究系统互联的必要性：

现实中的系统是各式各样的，其复杂程度也大相径庭。但许多系统都可以分解为若干个简单系统的组合。

可以通过对简单系统（子系统）的分析并通过子系统互联而达到分析复杂系统的目的。

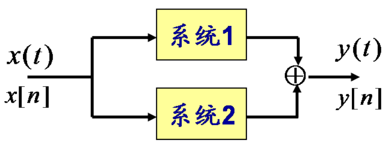
也可以通过将若干个简单子系统互联起来而实现一个相对复杂的系统。这一思想对系统分析和系统综合都是十分重要的。

级联（cascade interconnection）

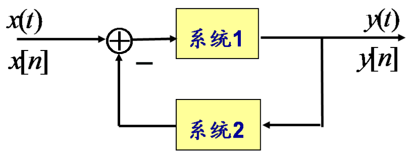


系统的互联（interconnection of systems）

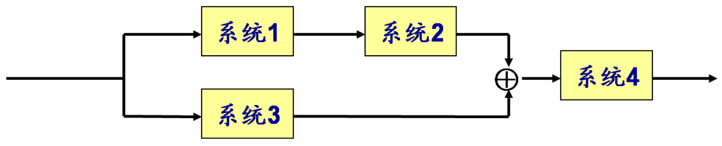
并联



反馈联结



混联



记忆系统和无记忆系统

无记忆系统（即时系统）：

在任何时刻系统的输出只与该时刻的输入有关，而与该时刻以外的输入无关。纯电阻网络就是一个即时系统。

$$y(t)=kx(t)\quad y[n]=kx[n]\quad y(t)=\sin\left(x(t)\right)\quad y[n]=x^2[n]$$

一种特别的即时系统是**恒等系统**，恒等系统的输出恒等于输入。

记忆系统（动态系统）：

它的输出不仅与当前时刻的输入有关，也与其它时刻的输入有关。记忆系统的输入输出关系一般是微分方程或差分方程。

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\quad y[n]=x[n]-x[n-1]$$

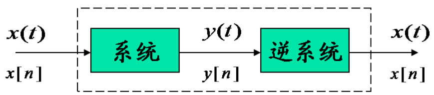
在许多实际系统中，记忆是直接与能量的存贮相联系的；在离散时间系统中，记忆直接与保留前面时刻的信号值的存储器相联系。

可逆性与逆系统(Invertibility and inverse system)

如果系统对任何不同的输入都能产生不同的输出，即输入与输出**一一对应**，则系统是可逆的。否则系统是不可逆的(noninvertible)。

$$y(t)=x^2(t)\quad y[n]=x^2[n]\quad y[n]=x[2n]\quad y(t)=0$$

如果一个系统可逆，则存在逆系统(inverse system)，两个系统级联后构成一个恒等系统。



$$y(t)=ax(t)\quad\Rightarrow\quad y(t)=\frac{1}{a}x(t)$$

$$y[n]=x[n-n_0]\quad\Rightarrow\quad y[n]=x[n+n_0]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\quad\Rightarrow\quad y(t)=x'(t)$$

通信中编码器是典型的可逆系统，解码器是它的逆系统。判断系统是否可逆一般是困难的，无有效简单的办法判定系统是否可逆。

系统的因果性（causality）

如果一个系统在任何时刻的输出都只与当时这个时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是因果的(causal system)。否则就是非因果的(noncausal system)。因果系统没有预测未来输入的能力，因而也称为不可预测系统。

例如：$y[n]=x[n]-x[n-1]$和$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$是因果的。

而：$y[n]=x[-n]$、$y[n]=x[n]-x[n+1]$和$y(t)=x(2t)$都是非因果的。

一切无记忆（即时）系统都是因果的。

一般说来，非因果系统是物理不可实现的。这体现了因果性对系统实现的重要性。但对非实时处理信号的离散时间系统，或信号的自变量并不具有时间概念的情况，因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决条件。

思考题：$y(t)=x(t)\cos(t+1)$是因果的还是非因果的？

系统的稳定性（stability）

如果一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是**稳定系统**(stable system)。否则，就是不稳定系统(unstable system)。

例： 单摆、RC电路、$y[n]=x[n-1]$和$y(t)=e^{x(t)}$都是稳定系统。

而如下方程表示的系统都是不稳定的：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \quad 和 \quad y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

自然界中存在的系统一般都是稳定系统，系统的稳定性一般都是存在能量损耗的原因。工程实际中总希望所设计的系统是稳定的。系统的稳定性在系统分析和系统综合中具有重要意义。

例： 检验系统$y(t)=tx(t)$和$y(t)=e^{x(t)}$的稳定性。

时变与时不变系统

如果一个系统当输入有一个时间上的平移时，输出也产生相同的平移，除此之外无任何其它变化，则系统是时不变的(time-invariant)，否则系统是时变的(time-varying)。

即：若$x(t)\to y(t)$，有$x(t-t_0)\to y(t-t_0)$，则系统是时不变的。

检验一个系统时不变性的步骤：

1. 令输入为$x_1(t)$，根据系统的描述，确定此时的输出$y_1(t)$
2. 将输入信号变为$x_2(t)$，再根据系统的描述确定输出$y_2(t)$
3. 令$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，根据自变量变换，检验$y_1(t-t_0)$是否等于$y_2(t)$

例1： 判断系统$y[n]=(n+1)x[n]$是时变的还是时不变的。

$$x[n]=x_1[n] \qquad y_1[n]=(n+1)x_1[n]$$
$$x[n]=x_2[n] \qquad y_2[n]=(n+1)x_2[n]$$
$$x_2[n]=x_1[n-n_0] \qquad y_2[n]=(n+1)x_1[n-n_0]$$

$y_1[n-n_0]=(n-n_0+1)x_1[n-n_0]\neq y_2[n]$，所以是时变的。

时变与时不变系统

例2： 判断系统$y[n]=x[2n]$的时变性。

解：

$$x[n]=x_1[n] \qquad y_1[n]=x_1[2n]$$
$$x[n]=x_2[n] \qquad y_2[n]=x_2[2n]$$

令：$x_2[n]=x_1[n-n_0]$则$y_2[n]=x_1[2n-n_0]$；

而：$y_1[n-n_0]=x_1[2(n-n_0)]=x_1[2n-2n_0]\neq y_2[n]$，所以是时变的。

课堂练习： 判断系统$y(t)=x(-t)$，$y(t)=\sin[x(t)]$的时变性。

线性系统

如果一个系统既满足叠加性也满足齐次性就称该系统是线性的（Linear System），否则就是非线性的（Nonlinear System）。

定义： $x_1(t)\to y_1(t) \qquad x_2(t)\to y_2(t)$

可加性： $x_1(t)+x_2(t)\to y_1(t)+y_2(t)$

输入的和产生输出的和。

比例性或齐次性： $ax_1(t)\to ay_1(t)$

零输入产生零输出。

线性： $\boxed{ax_1(t)+bx_2(t)\to ay_1(t)+by_2(t)}$

累加性：

$$\sum_{k=1}^{K}a_kx_k(t)\to\sum_{k=1}^{K}a_ky_k(t)$$

线性与非线性系统

例1：检验系统$y(t)=tx(t)$是否是线性的。

$$\begin{aligned} &x_1(t)\to y_1(t)=tx_1(t)\\ &x_2(t)\to y_2(t)=tx_2(t)\\ &x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\\ &y_3(t)=tx_3(t)=atx_1(t)+btx_2(t)=ay_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

例2：检验系统$y(t)=4x(t)+3x'(t)$是否有线性特性。

$$\begin{aligned} y_1(t)&=4x_1(t)+3x_1'(t)\\ y_2(t)&=4x_2(t)+3x_2'(t)\\ x_3(t)&=ax_1(t)+bx_2(t)\\ y_3(t)&=4\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)+3\left(ax_1'(t)+bx_2'(t)\right)\\ &=a\left(4x_1(t)+3x_1'(t)\right)+b\left(4x_2(t)+3x_2'(t)\right)=ay_1(t)+by_2(t)\end{aligned}$$

又$ax(t)\to ay(t)$，既满足可加性也满足齐次性，所以系统是线性的。

线性与非线性系统

练习：检验系统$y(t)=\frac{1}{x(t)}\left[x'(t)\right]^2$是否有线性特性。

例3：检验系统$y[n]=2x[n]+3$是否有线性特性。

$$\begin{aligned} &y_1[n]=2x_1[n]+3\quad y_2[n]=2x_2[n]+3\\ &y_1[n]+y_2[n]=2x_1[n]+2x_2[n]+6\\ &x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]\\ &y_3[n]=2x_1[n]+2x_2[n]+3\neq y_1[n]+y_2[n]\\ &x[n]=0\to y[n]=3\end{aligned}$$

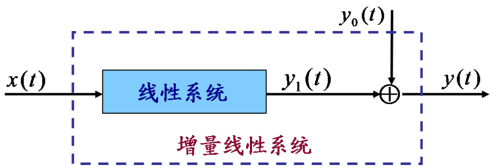
既不满足可加性，也不满足齐次性，所以系统不是线性的。

线性系统一定满足零输入—零输出的特性。即：线性系统在没有输入信号加入时，一定不能有输出产生。

增量线性系统

有一种工程中广泛应用的系统，虽然其输入与输出之间不满足线性关系，但输入的增量与输出的增量呈线性关系，这类系统称为增量线性系统。

任何增量线性系统都可以等效为一个线性系统再加上一部分与输入无关的响应。



当$y_0(t)=0$时，$y(t)=y_1(t)$，增量线性系统的输出响应完全由$y_1(t)$决定。此时系统处于零初始状态，故称$y_1(t)$为系统的**零状态响应**。

当$x(t)=0$时，有$y_1(t)=0, y(t)=y_0(t)$，因此将$y_0(t)$称为系统的**零输入响应**。增量线性系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。

线性系统

如果一个系统是线性的，当我们能够把输入信号$x(t)$分解成若干个简单信号的线性组合时，只要能得到该系统对每一个简单信号所产生的响应，就可以很方便的根据线性特性，通过线性组合而得到系统对$x(t)$的输出响应。

即：如果

$$x(t)=\sum_k a_kx_k(t)\ ,\quad x_k(t)\to y_k(t)$$

则

$$y(t)=\sum_k a_ky_k(t)$$

这一思想是信号与系统分析理论和方法建立的基础。

小结

- 讨论了信号与系统的数学建模和表述方法。
- 讨论了信号自变量变换对信号的影响；序列的抽取与内插。
- 分连续和离散两种情况介绍了作为信号分析基础的基本信号：复指数信号、正弦信号、单位冲激与单位阶跃信号。
- 讨论了离散时间正弦信号的周期性问题。
- 定义并讨论了系统的基本特性及互联方式。
  记忆性、可逆性、因果性、稳定性、时不变性、线性和增量线性。
- 讨论了增量线性系统及其等效方法。

由于在工程实际中，相当广泛的一类系统其数学建模可以用一个线性时不变（Linear Time-Invariant）系统来描述（**普遍性**）。而且基于线性和时不变性，为系统分析建立一套完整的、普遍适用的方法提供了可能（**可操作性**）。因此线性时不变(LTI)系统将成为本课程所研究的对象。

作业

CH1-1：1.3, 1.4, 1.5, 1.12, 1.21cde

CH1-2：1.15, 1.22bdgh, 1.23b, 1.26, 1.46

CH1-3：1.16, 1.28aceg, 1.31, 1.47c