信号与系统A
Signals and Systems

第2章　线性时不变系统

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2016年 5月

本章内容

基本要求

- 掌握信号时域分解的基本思想与方法；
- 掌握卷积积分与卷积和的计算方法及性质；
- 掌握LTI系统的性质与单位冲激响应或单位脉冲响应的关系；
- 掌握单位阶跃响应与单位冲激响应或单位脉冲响应的关系；
- 掌握用线性常系数微分或差分方程描述LTI系统的条件；
- 掌握LTI系统的框图结构表示。

时域分析的基本思想

上一章提到：LTI系统广泛存在，我们需要并且可以建立一套分析体系。

- **单位脉冲的筛选性质**：$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$。
- **信号的时移变换**：$x[n]\rightarrow x[n-n_0]$。
- **系统的线性性质**：
  $ax_1[n]+bx_2[n]\rightarrow ay_1[n]+by_2[n]$。
- **系统的时不变性**：
  即若$y[n]$是系统在$x[n]$输入下的输出，当输入变为$x[n-n_0]$时，输出为$y[n-n_0]$。

基本思想：

如果能把任意输入信号分解成基本信号（及其时移）的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性和时不变特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

基本信号的要求及时域分析方法

作为基本单元的信号应满足以下要求：

1. 本身尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号；分解也要易于进行。
2. LTI系统对这种信号的响应易于求得。

如果解决了信号分解的问题，则有：

$$\boxed{\text{if } x(t)=\sum_k a_k x_k(t),\ x_k(t)\rightarrow y_k(t), \text{then } y(t)=\sum_k a_k y_k(t)}$$

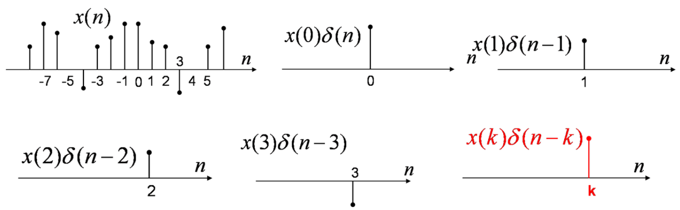
分析方法：

将信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。

本章讨论时域分析法。单位脉冲序列是离散时间信号分解的基本单元，而单位冲激函数是连续时间信号分解的基本单元。基于此，可以用单位冲激（脉冲）响应来完全表征任一个LTI系统的特性。LTI系统的响应可以用卷积和（卷积积分）来表示，为分析LTI系统提供了极大的方便。

离散时间信号的时域分解

对任何离散时间信号$x[n]$，如果每次从其中取出一个点，就可以将整个信号拆开来。

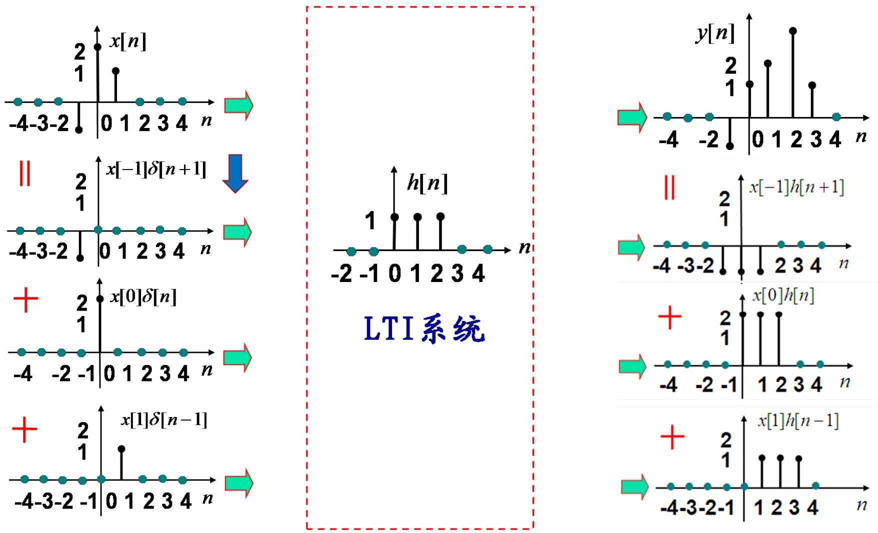


每次取出的一个点都可以表示成不同加权、不同位置的单位脉冲。

于是有：$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

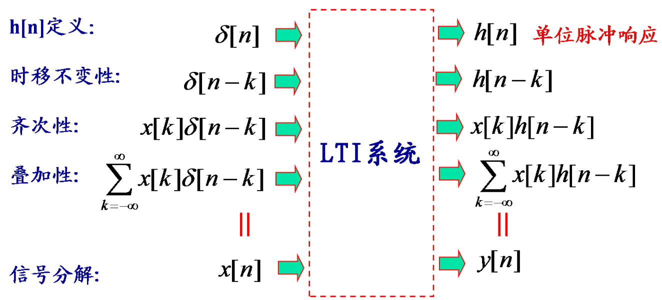
这表明，任何离散时间信号都可以被分解成移位的单位脉冲信号的线性加权组合。

离散LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示示例



离散LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示

若LTI系统对$\delta[n]$的响应为$h[n]$，称$h[n]$为系统的单位脉冲响应。



这表明：一个离散时间LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。
这种求得系统响应的运算关系称为**卷积和**（The convolution sum）：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

卷积和的计算

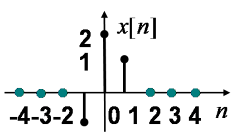
$$y[n]=\sum_k x[k]h[n-k]$$

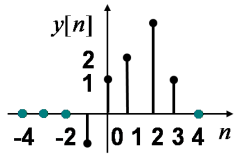
例2：

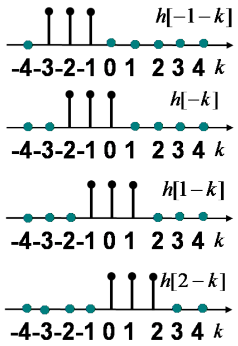
信号和系统同例1，我们下面换一种思路来求解$y[n]$。

$x[k]$和$h[n-k]$可以看作k的函数。

对每一个可能的n，将$x[k]$与$h[n-k]$的对应点相乘，再把所得序列的各点值累加，即可得到n时刻的$y[n]$。







$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-1-k]=-1$$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-k]=1$$

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[1-k]=2$$

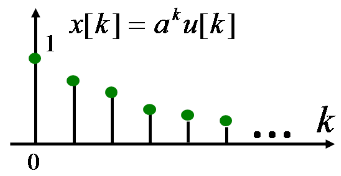
$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[2-k]=3$$

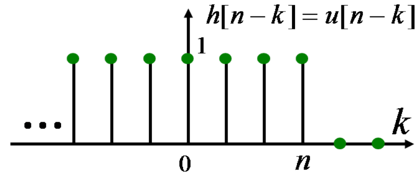
卷积和的计算

例3：输入信号和系统单位脉冲响应分别为下式，求系统输出$y[n]$。

$$x[n]=a^n u[n],\ 0<a<1; \qquad h[n]=u[n]$$

将信号$x[k]$和$h[n-k]$看作k的函数。





$$x[k]h[n-k]=\begin{cases}a^k, & 0\le k\le n\\ 0, & \text{other } k\end{cases} \qquad y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

卷积和运算可以等效为序列$h[n-k]$与$x[k]$的滑动相关。

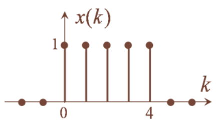
计算卷积和的一般步骤

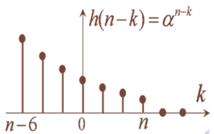
由定义$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$，可以得出计算卷积和的一般步骤：

1. **换元**：将$x[n]$和$h[n]$中的变量n换为k；
2. **反转**：将$h[k]$以纵轴为对称轴反转得到$h[-k]$；
3. **平移**：将$h[-k]$随参变量n平移，得到$h[n-k]$；若$n>0$则将$h[-k]$沿k轴向右平移，若$n<0$，则向左平移；
4. **相乘**：将$x[k]$与$h[n-k]$各对应点相乘；
5. **求和**：将相乘后的各点值相加。

例：$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

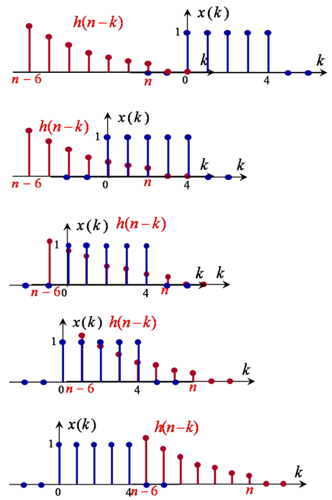
$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n, & \alpha>1, 0\le n\le 6\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$





例：图解法计算卷积和

1. $n<0$时，$y[n]=0$。
2. $0\le n\le 4$时，
$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}=\alpha^n\sum_{k=0}^{n}\alpha^{-k}$$
$$=\alpha^n\cdot\frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$
3. $4\le n\le 6$时，
$$y[n]=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$
4. $6\le n\le 10$时，
$$y[n]=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$
5. $n>10$时，$y[n]=0$。



有限长序列卷积和的竖式计算

将卷积公式改写为下列形式：

$$\text{由} x[n]*h[n]=\sum_k x[k]h[n-k]=\sum_k x[k]\delta[n-k]*h[n]$$

可得到如下的有限长序列卷积和的竖式计算方法。

			h_0	h_1	h_2
	$*$	x_0	x_1	x_2	x_3
			x_3h_0	x_3h_1	x_3h_2
		x_2h_0	x_2h_1	x_2h_2	
	x_1h_0	x_1h_1	x_1h_2		
x_0h_0	x_0h_1	x_0h_2			
x_0h_0	$x_1h_0+x_0h_1$	A	B	$x_3h_1+x_2h_2$	x_3h_2

其中：$A=x_2h_0+x_1h_1+x_0h_2, B=x_3h_0+x_2h_1+x_1h_2$

卷积结果的下限是两个序列的下限之和，上限是两个序列的上限之和。

有限长序列卷积和计算的矩阵表示

例：$x[n]=[\underline{a}\ b\ c\ d]$，$h[n]=[e\ \underline{f}\ g]$。

$$x[n]*h[n]=\begin{bmatrix}e & f & g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c & d & 0 & 0\\ 0 & a & b & c & d & 0\\ 0 & 0 & a & b & c & d\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a & b & c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f & g & 0 & 0 & 0\\ 0 & e & f & g & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & f & g & 0\\ 0 & 0 & 0 & e & f & g\end{bmatrix}$$

$$x[n]*h[n]=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\\ d & c & b\\ 0 & d & c\\ 0 & 0 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ f\\ g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & 0 & 0 & 0\\ f & e & 0 & 0\\ g & f & e & 0\\ 0 & g & f & e\\ 0 & 0 & g & f\\ 0 & 0 & 0 & g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

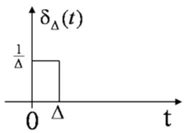
连续时间信号的时域分解

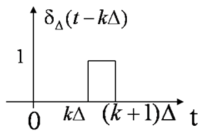
采用数学中讨论积分的思想。
定义：

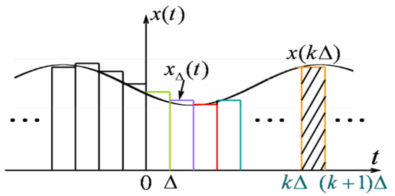
$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}, & 0<t<\Delta\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

则有：

$$\Delta\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\Delta\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$







第k个矩形可以表示为：

$$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

这些矩形迭加起来就成为阶梯形信号：

$$x_\Delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

连续时间信号的时域分解

当$\Delta\to 0$时，

$$k\Delta\to\tau,\delta_\Delta(t-k\Delta)\to\delta(t-\tau),\Delta\to d\tau,\sum\to\int$$

于是

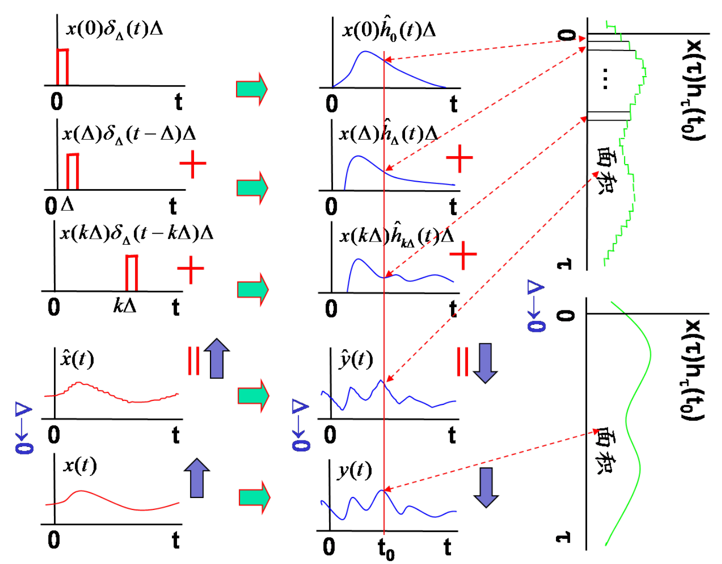
$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

这一关系也可以根据$\delta(t)$的筛选性质直接推导得来：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$
$$=x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

可见，任何连续时间信号都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的线性组合。

连续时间LTI系统的单位脉冲响应图示



连续LTI系统的单位冲激响应及卷积积分表示

如果一个LTI系统的单位冲激响应为$h(t)$，则表明当系统的输入为$\delta(t)$时，系统的输出为$h(t)$。对于LTI系统而言，如果输入为$\delta(t-k\Delta)$，其输出应为$h(t-k\Delta)$，而如果输入为$x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta$，则输出为$x(k\Delta)h(t-k\Delta)\Delta$，即：

$$x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta \Rightarrow x(k\Delta)h(t-k\Delta)\Delta$$

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta \Rightarrow \hat{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)h(t-k\Delta)\Delta$$

当$\Delta\to 0, k\Delta\to\tau, \Delta\to d\tau$时，则有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

上式的运算称为卷积积分（The convolution integral），简称为卷积，通常记为：$\boxed{y(t)=x(t)*h(t)}$，这表明，LTI系统可以完全由它的单位冲激响应$h(t)$来表征。

卷积积分的解析计算

系统对输入信号$x(t)$的响应就是$x(t)$与系统单位冲激响应$h(t)$的卷积。

例： 已知$x(t)=e^{-at}u(t), a>0$; $h(t)=u(t)$，求$y(t)=x(t)*h(t)$。

解：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<0;\\ \int_0^t e^{-a\tau}d\tau & t>0.\end{cases}$$

$$=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t)$$

注意：通过图形帮助确定积分区间和积分上下限往往是很有用的。

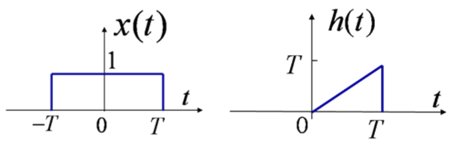
卷积积分的图解计算步骤

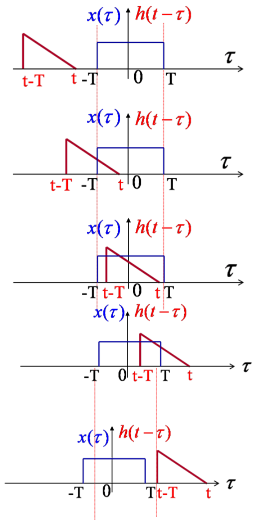
由$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$ 可以看出，$x(t)*h(t)$的几何意义就是求$x(\tau)$与$h(t-\tau)$相乘后，曲线下的面积，这一面积是参量t的函数。知道了两个参与卷积信号的波形，可以利用图解法求出卷积结果，一般步骤为：

1. **换元：** 将$x(t)$和$h(t)$中的变量t换为τ，得$x(\tau)$和$h(\tau)$；
2. **反转：** 将$h(\tau)$以纵轴为对称轴反转得到$h(-\tau)$；
3. **平移：** 将$h(-\tau)$随参变量t平移，得到$h(t-\tau)$，若$t>0$则将$h(-\tau)$沿τ轴向右平移，若$t<0$，则向左平移；
4. **相乘：** 将$x(\tau)$与$h(t-\tau)$相乘；
5. **积分：** $x(\tau)$与$h(t-\tau)$乘积曲线下的面积即为t时刻的卷积值。

与卷积和类似，卷积积分运算过程的实质也是：参与卷积的两个信号中，一个不动，另一个反转后随参变量t移动。对每一个t的值，将$x(\tau)$和$h(t-\tau)$对应相乘，再计算相乘后曲线所包围的面积。

例：用图解法计算卷积





1. $t < -T, y(t) = 0$
2. $-T < t < 0, (t - T < -T)$

$$y(t) = \int_{-T}^{t} (t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}t^2 + tT + \frac{1}{2}T^2$$

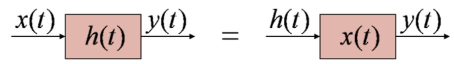
3. $0 < t < T, (-T < t - T < 0)$
   $y(t) = \int_{t-T}^{t} (t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}T^2$
4. $T < t < 2T, (0 < t - T < T)$
   $y(t) = \int_{t-T}^{T} (t-\tau)d\tau = -\frac{1}{2}t^2 + tT$
5. $t > 2T, (t - T > T), y(t) = 0$

卷积的交换律

一个LTI系统的特性完全由它的单位脉冲响应来决定。但是，单位脉冲响应不能完全表征非LTI系统的特性。

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2$$
$$y[n] = \max(x[n], x[n-1]) \qquad \Rightarrow h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

交换律：

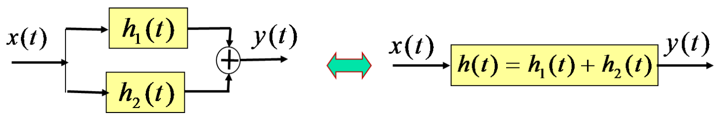


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

表明：一个单位冲激响应是$h(t)$的LTI系统对输入信号$x(t)$产生的响应，与单位冲激响应是$x(t)$的LTI系统对输入信号$h(t)$所产生的响应相同。

卷积的分配律

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



表明：两个LTI系统并联，其总的单位冲激响应等于各个子系统的单位冲激响应之和。

例：求下面两个函数的卷积

$$x[n] = 2^{-n}u[n] + 2^n u[-n] \qquad h[n] = u[n]$$

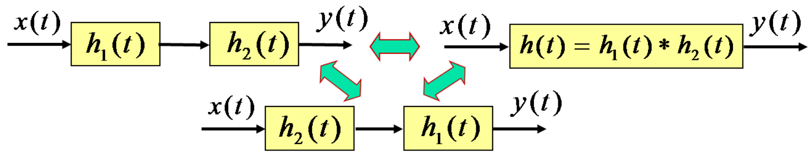
$$y[n] = x[n] * h[n] = 2^{-n}u[n] * u[n] + 2^n u[-n] * u[n]$$
$$= (2 - 2^{-n})u[n] + 2^{n+1}u[-n-1] + 2u[n]$$

卷积的结合律

结合律：

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

表明：两个LTI系统级联时，系统总的单位冲激响应等于各个子系统单位冲激响应的卷积。

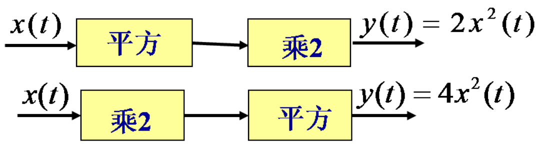


由于卷积满足交换律，因此系统级联的先后次序可以调换。

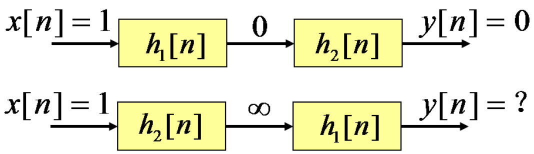
$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * h_2(t) * h_1(t)$$

卷积积分和卷积和的性质

产生以上结论的前提条件：系统必须是LTI系统；所有涉及到的卷积运算必须收敛。如



又如：若$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1], h_2[n]=u[n]$，虽然系统都是LTI系统。但当$x[n]=1$时：



卷积的微分与积分

卷积的微分与积分：

if $x(t)*h(t)=y(t)$, then $x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)=y'(t)$

$$\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]*h(t)=x(t)*\left[\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right]=\left[\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau\right]$$

卷积的其它性质：

- $x(t)*\delta(t)=x(t)$
  $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$
  $x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$
- 如果$x(t)*h(t)=y(t)$，那么
  $x(t-t_1)*h(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$
- $x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $x(t)*\delta'(t)=x'(t)*\delta(t)=x'(t)$

产生以上结论的前提条件：

1. 系统必须是LTI系统；
2. 所有涉及到的卷积运算必须收敛。

记忆系统和无记忆系统

LTI系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

记忆性：根据$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$，如果系统是无记忆的，则在任何时刻$n$，$y[n]$都只能和$n$时刻的输入有关，即和式中只能有$k=n$时的一项为非零，因此必须有：$h[n-k]=0, k\neq n$，即$h[n]=0, n\neq 0$。

因此无记忆系统的单位冲激响应为：$\boxed{h[n]=K\delta[n], h(t)=K\delta(t)}$。

此时，$x[n]*h[n]=Kx[n] \quad x(t)*h(t)=Kx(t)$。

当$K=1$时是恒等系统，卷积公式就是单位冲激函数的筛选性质。

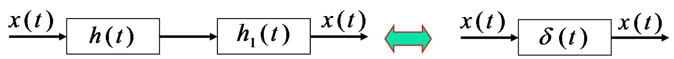
$$x[n]=x[n]*\delta[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求，则系统是记忆的。

系统的可逆性

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且该逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。



逆系统的单位脉冲/冲激响应满足：

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t), \quad h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

例：考察延时器$y(t)=x(t-t_0)$的可逆性。
解：延时器的单位冲激响应：$h(t)=\delta(t-t_0)$。因此：

$$\boxed{x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)}$$

即一个信号与移位冲激的卷积就是该信号的移位。其逆系统是将移位后的信号再移回来，因此其逆系统的单位冲激响应：

$$h_1(t)=\delta(t+t_0)$$

系统的可逆性

例：考察累加器的$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$可逆性。

第1章已经讨论过，其逆系统为差分器：$y[n]=x[n]-x[n-1]$。

下面对上述结论进行验证，由于：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]u[n-k]$$

累加器的单位脉冲响应为：$h[n]=u[n]$。

差分器的单位脉冲响应为：$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$。

$$u[n]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

所以，延时器和累加器都是可逆系统。

因果性

根据

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

如果LTI系统是因果的，则在任何时刻n，$y[n]$都只能取决于n时刻及其以前的输入，和式中所有$k>n$的项都必须为零，因此有：

$$h[n-k]=0,k>n \quad 即：h[n]=0,n<0$$

LTI系统具有因果性的充分必要条件是：

$$\boxed{h[n]=0,\ \ n<0 \qquad h(t)=0,\ \ t<0}$$

累加器及其逆系统为因果系统，延时器是因果的，其逆系统是非因果的。一个线性系统的因果性等效于初始松弛的条件。

$n<0$和$t<0$时信号为零的信号称为因果信号，一个LTI系统的因果性就等效为其冲激响应是因果信号。

系统的稳定性

根据稳定性的定义，如果$x[n]$有界，即$|x[n-k]|\le B$，则$y[n]$必有界。由$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$，有

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]\right|$$
$$\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|\,|x[n-k]|\le B\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

可知，当$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$，即单位脉冲响应绝对可和时，系统是稳定的。

对连续时间系统，相应地有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty$$

实际上，该条件是LTI系统稳定的充分必要条件。

稳定性

用反证法证明必要性。

假设单位脉冲响应不是绝对可和的，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\infty$。设系统输入为：

$$x[n]=\begin{cases}0, & h[-n]=0\\ \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[-n]\neq 0\end{cases}$$

显然$|x[n]|\le 1$，即输入有界。考察$n=0$时的输出：

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[0-k]=\sum_{\substack{k=-\infty\\ h[k]\neq 0}}^{\infty}h[k]\frac{h^*[k]}{|h[k]|}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\infty$$

输出无界，所以绝对可和条件为LTI系统稳定的必要条件。

对连续时间系统，也有相应的结果。

系统的单位阶跃响应

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对$u(t)$或$u[n]$所产生的响应。即:

$$s(t) = u(t) * h(t); \qquad s[n] = u[n] * h[n]$$

单位阶跃响应与单位冲激响应的关系:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t) = \frac{d}{dt}s(t)$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n] = s[n] - s[n-1]$$

可见单位阶跃响应也可以完全表征一个LTI系统。

线性常系数微分方程

可以用线性常系数微分方程（Linear Constant-Coefficient Differential Equation）描述相当广泛的一类连续时间LTI 系统。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

其中，a_k, b_k为常数。

求解该微分方程，通常是求出一个特解$y_p(t)$和通解$y_h(t)$，于是

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

特解$y_p(t)$：是与输入$x(t)$同类型的函数。

通解$y_h(t)$：是齐次方程$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$的解，因此又称齐次解。

线性常系数微分方程的通解（齐次解）

欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$，求出其特征根。在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t}$$

其中，C_k是待定系数。要确定系数，需要有一组条件，称为**附加条件**。仅从确定待定系数的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

系统在没有输入即$x(t) = 0$时，微分方程就蜕变成齐次方程。由于线性系统具有“零输入—零输出”的性质，因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，即所有的C_k都为零。这就要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零。由此可得：**零附加条件的LCCDE描述的系统是线性系统。**

线性常系数微分方程与系统的性质

如果附加条件在输入接入系统的同一时刻给出，则称这组附加条件为**初始条件**。

如果线性常系数微分方程具有零初始条件，则LCCDE描述的系统不仅是**线性的**，也是**因果的**和**时不变的**。

结论：LCCDE连同一组全部为零的初始条件可以描述一个LTI因果系统。这组条件是：

$$\boxed{y(0) = 0, y'(0) = 0, \cdots, y^{(N-1)}(0) = 0}。$$

如果一个因果的LTI系统由LCCDE描述（方程具有零初始条件），就称该系统**初始是静止的**或**最初是松弛的**。

如果LCCDE具有一组非零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是**增量线性的**。

线性常系数差分方程（LCCDE）

一般的线性常系数差分方程（LCCDE）可表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解$y_p[n]$和通解（齐次解）$y_h[n]$来进行，其过程与解微分方程类似。

要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当LCCDE具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

无论微分方程还是差分方程，由于其特解都与输入信号具有相同的函数形式，也就是说它是完全由输入决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为**受迫响应**或**强迫响应**。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的**自然响应**。

线性常系数差分方程（LCCDE）的迭代解法

增量线性系统的响应有零状态响应和零输入响应。零输入响应与输入信号无关，因此属于自然响应。

零状态响应既与输入信号有关，也与系统特性有关，因而它包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。

线性常系数差分方程还可以采用迭代的方法求解，将方程改写为：

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right]$$

从该差分方程可以看出，要求出$y[0]$，不仅要知道所有的$x[n]$，还要知道$y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$，这就是一组初始条件，由此可以得出$y[0]$。进而，又可以通过$y[0], y[-1], \cdots, y[-N+1]$，求得$y[1], \cdots$，依次类推可以推出所有$n \geq 0$ 时的解。

由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为**递归方程**。

FIR系统和IIR系统

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- 若$k \neq 0, a_k = 0$，则方程变为：$y[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

  此时方程无需递推。$y[n] = x[n] * h[n]$，其中

  $$h[n] = \begin{cases} b_n/a_0, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

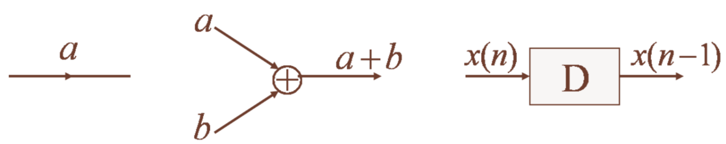
  显然，$h[n]$为有限长序列，此时方程描述的系统称为**有限长脉冲响应**(Finite Impulse Response, FIR)系统。
- 若$k \neq 0$时，a_k不全为零，则方程为递推型，$h[n]$为无限长，称为**无限长脉冲响应**(Infinite Impulse Response, IIR)系统。

离散时间LTI系统的方框图表示

由LCCDE 描述的系统，其数学模型是由一些基本运算来实现的，如果能用一种图形表示方程的运算关系，就会更加形象直观；另一方面，分析系统很重要的目的是为了设计或实现一个系统，用图形表示系统的模型，将对系统的特性仿真、硬件或软件实现具有重要意义。

不同的结构也会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

由$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right]$可以看出，方程中包括三种基本运算：**乘系数**、**相加**、**移位**（单位延迟）。这些运算可以用以下符号表示：

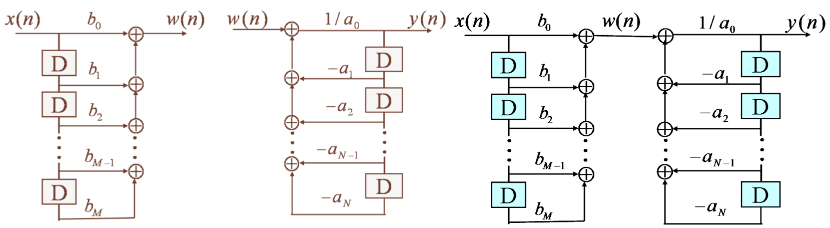


离散时间LTI系统的方框图表示

对于式$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_ky[n-k]\right]$，

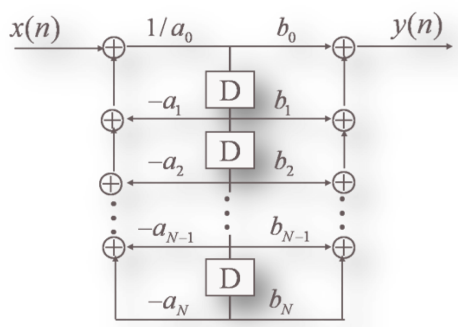
如果令$w[n]=\sum\limits_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$，则$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[w[n]-\sum\limits_{k=1}^{N}a_ky[n-k]\right]$

这两个系统可以用如下的方框图表示。将它们级联起来，如右边的方框图所示，就成为LCCDE 描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。这就是离散时间系统的**直接I型**实现结构。



离散时间LTI系统的方框图表示

显然，作为两个级联的系统，可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，得到离散时间系统的**直接II型**实现结构：



连续时间LTI系统的方框图表示

由$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx(t)}{dt^k}$可以看出，方程中也包括三种基本运算：**微分**、**相加**、**乘系数**。

由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为敏感，工程上通常使用积分器而不用微分器。

首先作如下约定：

零次积分：$y_{(0)}(t)=y(t)$，

一次积分：$y_{(1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}y_{(0)}(\tau)d\tau=y(t)*u(t)$

二次积分：$y_{(2)}(t)=\int_{-\infty}^{t}y_{(1)}(\tau)d\tau=y(t)*u(t)*u(t)$

K次积分：$y_{(K)}(t)=\int_{-\infty}^{t}y_{(K-1)}(\tau)d\tau=y(t)*\underbrace{u(t)*\cdots*u(t)}_{\text{K个}}$

将方程（设$M=N$）两边同时积分N次，即可得到一个积分方程：

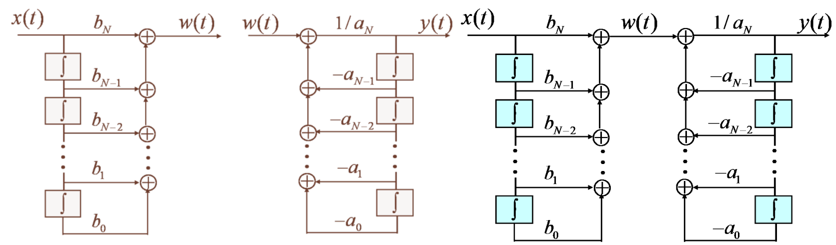
$$\sum_{k=0}^{N}a_ky_{(N-k)}(t)=\sum_{k=0}^{N}b_kx_{(N-k)}(t)$$

连续时间LTI系统的方框图表示

对此方程完全按照前面差分方程的办法即可得到**直接I型**实现结构。

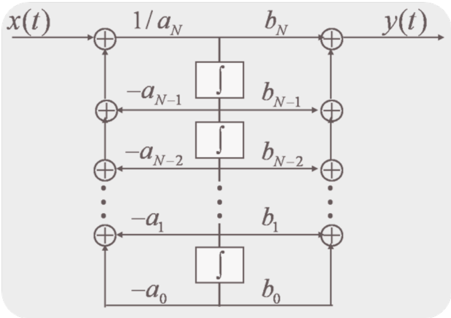
$$w(t)=\sum_{k=0}^{N}b_kx_{(N-k)}(t)$$

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[w(t)-\sum_{k=0}^{N-1}a_ky_{(N-k)}(t)\right]$$



连续时间LTI系统的方框图表示

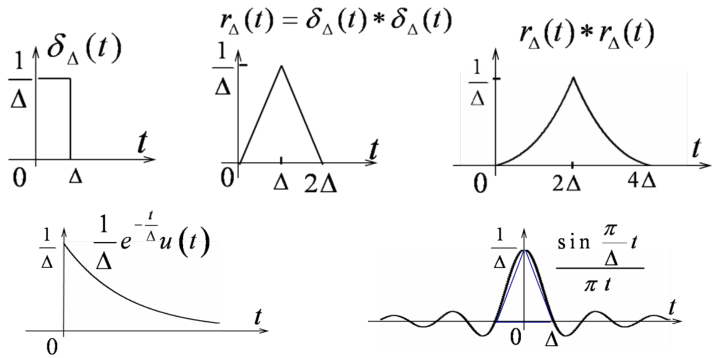
通过交换级联次序，合并积分器可得**直接II型**实现结构。



不同的结构会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如在系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

奇异函数（singularity functions）

前边在定义$\delta(t)$时，采用了极限的思想，将其看成面积始终为1的矩形在宽度趋于0 时的极限。但这样的定义仍然是不严密的，因为可以发现有很多不同的信号在极限的意义下具有相同的属性，如下图。



δ函数及其性质

这表明$\delta(t)$是一个非常规函数，被称为奇异函数或广义函数。对它的定义通常采用在积分运算下所表现的特性来描述。

定义2：$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0)$，其中$x(t)$是在$t=0$处连续的函数。

定义3：$x(t)*\delta(t)=x(t)$。

性质：

- 令$x(t)=1$，则有$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$ $\quad\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$
- $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)\quad x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$
- 若$x(t)$在$t=0$连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(-t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(-t)dt$$

$$x(t)\delta(t)=x(t)\delta(-t)\quad\Rightarrow\quad\delta(t)=\delta(-t)$$

本章小结

- 信号的时域分解；
- LTI系统的时域分析——卷积积分与卷积和；

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

- LTI系统的描述方法：
  1. 用$h(t)$、$h[n]$或者$s(t)$、$s[n]$描述LTI系统；
  2. 用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统；
  3. 用系统方框图描述系统（等同于LCCDE 描述）。
- LTI系统的特性与$h(t)$、$h[n]$的关系：
  1. 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与$h(t)$、$h[n]$的关系；
  2. 系统级联、并联时，$h(t)$、$h[n]$与各子系统之间的关系。

作业

CH2-1：2.1，2.5，2.11，2.16，2.21ac

CH2-2：2.13，2.19，2.22bc，2.24，2.28acg，2.44ab

CH2-3：2.29bdf，2.31，2.40，2.47，2.48

习题勘误

2.13 “整数A”应为“正数A”。