信号与系统A
Signals and Systems

第3章　周期信号的傅里叶级数表示

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2016年 5月 23 日

本章内容

基本要求

- 掌握复指数信号是一切LTI系统特征函数的概念及以特征函数为基底对信号进行分解的基本思想方法；
- 掌握周期信号分解为傅里叶级数的方法，傅里叶级数系数的确定，信号在频域的描述方法—频谱的概念；
- 了解傅里叶级数的收敛，Gibbs现象；
- 掌握周期性矩形脉冲信号频谱的特征；
- 掌握连续时间傅里叶级数的性质；
- 掌握离散时间周期信号的傅里叶级数表示及性质；
- 掌握用傅里叶级数求LTI系统输出的方法。

时域和频域分析法

时域分析法：

在时域将信号分解成$\delta(t)$或$\delta[n]$的线性组合，利用LTI系统的线性和时不变性，导出卷积和与卷积积分。时域分析方法遇到的三个问题：

- 信号的某些特征表述不明显（转换至频域特征表述明显）；
- 卷积运算较为繁杂（频域：可将卷积运算转化为乘积运算）；
- 为得到系统的输出，需要求解微分方程或差分方程（频域：可将微分和差分方程求解问题转换线性代数方程组的求解问题）。

频域分析和变换域分析方法的基本思路：

- 将复杂信号分解为具备一定特征的基本信号的线性叠加；
- 利用此基本信号针对LTI的特殊特性，将上述的卷积运算转化为相乘运算，将微分或差分方程转化为代数方程求解。
- 本章的基本信号为复正弦信号，将周期信号分解为多个复正弦信号的加权组合的形式就是周期信号的傅里叶级数表示。

频域分析的基本思想与时域相同，即设法将任意信号分解成基本信号单元的线性组合，利用LTI系统的线性和时不变性求得系统的响应。

傅里叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出"任何周期信号都可以用正弦函数的级数来表示"
- 拉格朗日反对发表
- 1822年首次发表"热的分析理论"
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件

傅里叶最主要的两个贡献：

"周期函数都可以表示为成谐波关系的正弦函数的加权和"

"非周期函数都可以用正弦函数的加权积分表示"

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
约瑟夫.傅里叶
(1768,3–1830,5)

LTI系统对复指数信号e^{st}的响应

基本单元信号应该满足以下两个要求：（时域频域的"分辨率"）

1. 本身简单，LTI系统对它的响应容易求得，且响应也具有十分简单的形式。
2. 具有普遍性，能够用以构成相当广泛的一类信号。

考虑LTI系统对复指数信号e^{st}的响应：

$$e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

由时域分析方法：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

这表明：LTI系统对复指数信号的响应仍是复指数信号，系统所起的作用只是改变了复指数信号的幅度。此特性为系统的频域分析带来了极大的方便。

当$s = j\omega$时，复指数信号就成了复正弦信号，是一类广泛的信号。

连续时间LTI系统的特征函数

如果系统对某一信号的响应只不过是该信号乘以一个常数，则称该信号是这个系统的**特征函数**。

系统对该信号加权的常数称为系统与特征函数相对应的**特征值**。

复指数函数e^{st}是一切连续时间LTI系统的特征函数。$H(s)$是系统与复指数信号相对应的特征值。

不同的LTI系统可能会有不同的特征函数，而复指数函数能成为一切LTI系统的特征函数。

若：$x(t) = \sum_i a_i e^{s_i t}$，则：$y(t) = \sum_i a_i H(s_i) e^{s_i t}$

由此可见，只要能把连续时间信号$x(t)$分解成复指数信号的线性组合，并且求出与特征函数对应的各个特征值$H(s_i)$，系统对$x(t)$的响应就迎刃而解了。

本章先研究$s = j\omega$时的情况。

离散时间LTI系统的特征函数

与连续时间的情况一样，离散时间复指数信号，即**复指数序列是一切离散时间LTI系统的特征函数**。

由时域分析法：$x[n] = z^n$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k}$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$$z^n \rightarrow \boxed{\text{LTI}\ h(n)} \rightarrow y(n)$$

z^n是系统的特征函数；
$H(z)$是系统与特征函数相对应的特征值。

如果：$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$，则$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$。

其中$z = re^{j\omega}$是一个复数，本章先讨论$z = e^{j\omega}$时的情况。

特征函数和特征值

在线性代数和矩阵分析课程中，我们曾讨论过特征向量和特征值。而这里，我们又遇到特征函数和特征值。两者之间有联系吗？这里有必要回顾和讨论，以便建立起两者的联系，加深我们的理解。

设：$\mathbf{R}$是一个$N\times N$的矩阵，$\mathbf{v}$为$N\times 1$的向量，如果

$$\mathbf{R}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$$

则称$\mathbf{v}$为矩阵$\mathbf{R}$的特征向量，λ为相应的特征值。

这里，我们有

$$h[n]*z^n=H(z)z^n;\quad h[n]*e^{j\omega n}=H(e^{j\omega})e^{j\omega n};\quad h(t)*e^{st}=H(s)e^{st}$$

两者的唯一差异只是：一个是矩阵与矢量的相乘，另一个是冲激响应与特征函数的卷积。而实际上，前者就是后者的矩阵/矢量表述。

成谐波关系的复指数信号的线性组合

研究成谐波关系的复指数信号集：$\Phi_k(t)=\{e^{jk\omega_0 t}\}$。

由第2章内容我们知道，ω_0是该信号集的基波频率，$T=2\pi/|\omega_0|$是它的基波周期。显然，T是该信号集中所有信号的公共周期，只是当$|k|\geq 2$时，T是$\Phi_k(t)$ 的周期$T_k=2\pi/|k\omega_0|$ 的整数倍。

如果将该信号集中所有的信号线性组合起来，得到一个连续时间信号$x(t)$：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

将连续时间周期信号表示为成谐波关系的复指数信号的线性组合，这就是**连续时间傅里叶级数**。

连续时间傅里叶级数（Continuous-time Fourier Series）

傅里叶级数$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$，其中$a_k$是傅里叶级数的系数。

如果$x(t)$是实信号，则

$$x(t)=x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^* e^{-jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

于是$\boxed{a_k=a_{-k}^*,\text{即：}\ a_k^*=a_{-k}}$。

这表明，对实信号来说，傅里叶级数中$k=N$和$k=-N$ 这两项的系数总是互为共轭的，这两项合并起来才真正代表了信号中实实在在的一个正弦谐波分量。

对级数进行变形，得到：

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}\right]=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{jk\omega_0 t}+a_k^* e^{-jk\omega_0 t}\right]$$

傅里叶级数的三角函数形式

因此：$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\Re\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$

将a_k用极坐标形式表示$a_k=A_k e^{j\theta_k}$，可得：

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

考虑到$a_k^*=a_{-k}$，于是有$A_k=A_{-k}$，$\theta_k=-\theta_{-k}$。这表明，**实周期信号的傅里叶级数的系数，其模是偶函数，相位是奇函数。**

将a_k表示为$a_k=B_k+jC_k$，可得另一种三角函数形式：

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos(k\omega_0 t)-C_k\sin(k\omega_0 t)\right]$$

同理$B_k=B_{-k}$，$C_k=-C_{-k}$，即系数的**实部是偶函数，虚部是奇函数。**

傅里叶级数的系数

以T为周期的信号$x(t)$可以表示成傅里叶级数：$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$
如何确定a_k？推导：

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases}T, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=a_nT \quad a_k=\frac{1}{T}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

通常表示为：$\boxed{a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt; \qquad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}$

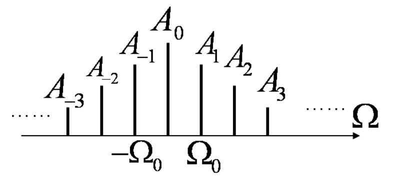
频谱（Spectral）的概念

在傅里叶级数中，各个谐波分量间的区别仅仅是频率和复振幅不同。只要知道了一个周期信号所包含的全部复指数分量的频率和相应的复振幅，这个周期信号也就完全确定了。因此，有必要研究复振幅随频率变化的关系。

周期信号所有谐波分量的复振幅随频率的分布就称为信号的频谱。

可以用一根线段来表示某个分量的幅度，用线段的位置表示相应的频率，这样画出的图称为频谱图。由于a_k通常是复数，**频谱图一般分为幅度频谱和相位频谱**。

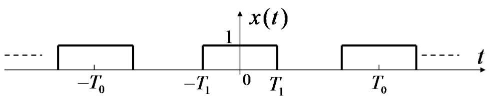
频谱图其实就是$a_k\sim\omega$的关系。由于信号的频谱完全代表了信号，研究它的频谱就等于研究信号本身，因此，这种表示信号的方法称为频域表示法。有了信号频谱的概念，就可以实现从时域到频域的转变。



周期性矩形脉冲信号

考察一类重要的信号—周期性矩形脉冲信号。它在一个周期内定义如下：

$$x(t)=\begin{cases}1, |t|<T_1\\ 0, T_1<|t|<T/2\end{cases}$$



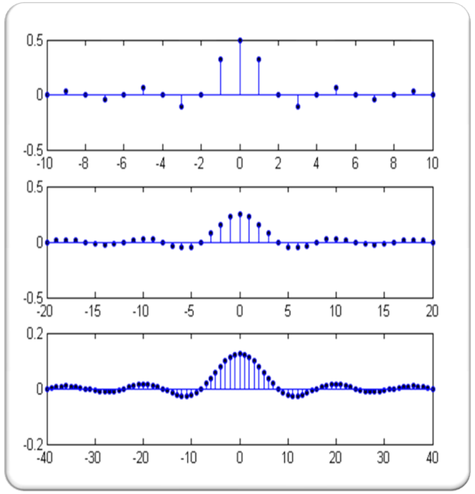
显然该信号的基波周期为T。
计算$x(t)$的傅里叶级数的系数：
$k=0$时，有$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt=\frac{2T_1}{T}\Rightarrow$ 直流分量，也即占空比。
$k\neq 0$时，

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$=\frac{2T_1}{T}\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1}=\frac{2T_1}{T}\operatorname{sinc}\left(k\frac{2T_1}{T}\right) \quad 其中：\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

周期信号的频谱具有如下特点：离散性、谐波性、收敛性。

T_1不变，改变T时周期性矩形脉冲的频谱变化



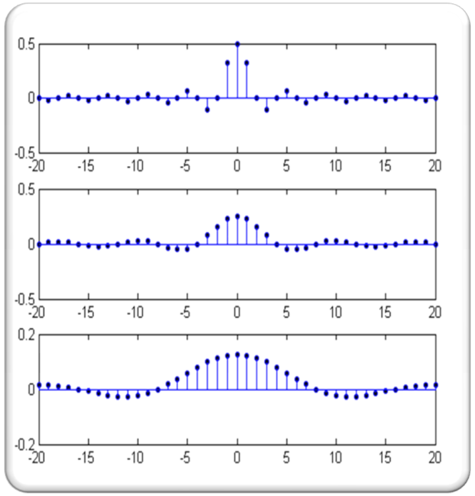
$$a_k=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

从上到下，T_1不变，T增加。

$$\frac{2T_1}{T}=\frac{1}{2}, \frac{2T_1}{T}=\frac{1}{4}, \frac{2T_1}{T}=\frac{1}{8}$$

由图可以看出，随着T增大：
- 基波频率减小，谱线更加密集；
- 包络线过零点对应的频率不变；
- 幅度减小，但包络并不发生展宽或压缩。

T不变，改变T_1时周期性矩形脉冲的频谱变化



$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

从上到下，T不变，T_1减小。

$$\frac{2T_1}{T} = \frac{1}{2}, \frac{2T_1}{T} = \frac{1}{4}, \frac{2T_1}{T} = \frac{1}{8}$$

由图可以看出，随着T_1减小：

- 基波频率不变，谱线的密度（间隔）不变；
- 信号功率减小，频谱幅度减小；
- 包络展宽，信号带宽变大。

傅里叶级数的收敛

用复指数信号作为基本信号单元分解信号具有相当广泛的现实性，但这并不意味着对信号本身没有任何约束。本节旨在研究信号分解为复指数信号线性组合时的广泛性问题。

傅里叶级数的收敛有两层含义：首先a_k是否存在；其次级数是否收敛于$x(t)$。

假设周期信号$x(t)$可以表示成傅里叶级数，用有限个谐波分量近似$x(t)$时，有：

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

误差为：$e_N(t) = x(t) - x_N(t)$，误差信号具有与$x(t)$相同的周期。以均方误差作为衡量误差的准则，其均方误差为：

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2\, dt = \int_T e_N(t) e_N^*(t) dt$$

傅里叶级数收敛的条件—平方可积

可以证明：如果用有限项复指数信号的级数和近似周期信号，在均方误差最小的准则下，有限项级数的系数a_k应满足：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

这表明：在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似（复指数信号的级数和形式）。

平方可积条件：

如果周期信号满足$\int_T |x(t)|^2\, dt < \infty$，则其傅里叶级数表达式一定存在。

将傅里叶级数表达式代入上式再结合复指数信号单元的正交性可得

$$\int_T |x(t)|^2\, dt = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

因此平方可积时，a_k必为有限值。

傅里叶级数收敛的条件—狄里赫利条件

狄里赫利（Dirichlet）条件

1. 信号在任何周期绝对可积，即$\int_T |x(t)| < \infty$，保证了级数的所有系数为有限值。
2. 信号在任何周期内只有有限个极值点，且极值为有限值。
3. 信号在任何有限区间内只有有限个间断点，且在这些点处信号为有限值。

这两组条件并不完全等价。它们都是傅里叶级数收敛的充分条件。

相当广泛的信号都能满足这两组条件中的一组，因而用傅里叶级数表示周期信号具有相当广泛的适用性。

教材140页图3.8给出了三种不满足Dirichlet条件的信号。

吉布斯（Gibbs）现象

问题的提出：满足Dirichlet条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于$x(t)$的？特别当$x(t)$具有间断点时，在间断点附近如何收敛？

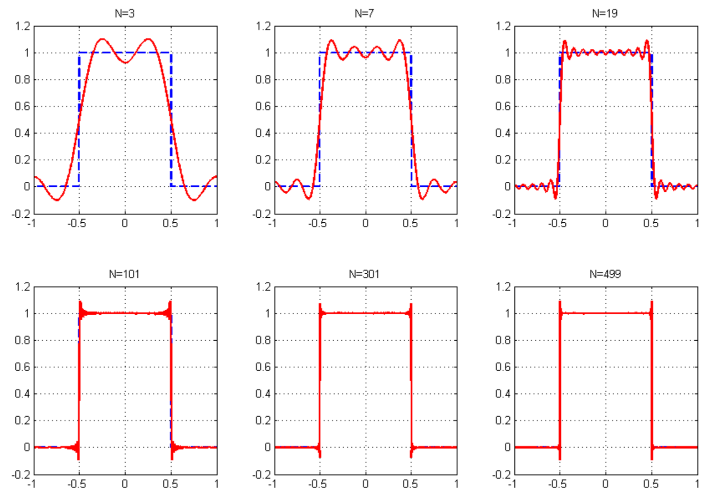
1898年Michelson在用谐波分析仪研究周期信号时，发现了意想不到的情况：对方波信号，用各个谐波叠加时，在信号的间断点处始终存在振荡和超量，并不随所取谐波分量的增加而有所减小。

1899年，Gibbs解释了这一现象，因此被称为**吉布斯现象**。

吉布斯现象表明：傅里叶级数在信号的连续点处收敛于信号本身，在间断点处收敛于间断点左右极限的平均值。用有限项傅氏级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随项数的增加而减少。只是随着项数的增多，振荡频率变高，向间断点处压缩，从而使它所占有的能量逐步减少。

这正是由于**傅里叶级数是在均方误差最小的准则下对信号的最佳近似所导致的必然结果**。

吉布斯（Gibbs）现象



线性和时移性质

学习这些性质，有助于对概念的理解和对信号进行级数展开。

线性：

若$x(t)$和$y(t)$都是以T为周期的信号，

且：$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

则：$Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} Aa_k + Bb_k$

时移：

若$x(t)$是以T为周期的信号，

且：$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$

则：$x(t-t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} \qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

时间反转和时域尺度变换

时间反转：

若$x(t)$是以T为周期的信号，

且：$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ 则：$x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$

时域尺度变换：

若$x(t)$是以T为周期的信号，则$x(at)$以T/a为周期。

设：$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$

则：$x(at) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = \dfrac{a}{T}\displaystyle\int_{T/a} x(at)e^{-jka\omega_0 t}dt$

令$at=\tau$，当t在$0 \sim T/a$变化时，τ从$0 \sim T$变化，于是有：

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau = a_k \qquad \therefore \quad x(at) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = a_k$$

相乘性质

若$x(t)$和$y(t)$都是以T为周期的信号，

且：　$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$

则：$x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{jl\omega_0 t}\cdot y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-j(k-l)\omega_0 t}dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

$$\therefore \quad x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

共轭及共轭对称性

$x(t)$是以T为周期的信号，

若：　$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$　　则：$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$

由此可推得，对实信号有：

$$a_k = a^*_{-k} \text{ 或 } a^*_k = a_{-k}$$

当$a_k = A_k e^{j\theta_k}$时，有$A_k = A_{-k} \quad \theta_k = -\theta_{-k}$

当$a_k = B_k + jC_k$时，有$B_k = B_{-k} \quad C_k = -C_{-k}$

进一步，对实信号

当$x(t) = x(-t)$时，$a_k = a_{-k}$（实偶函数）

当$x(t) = -x(-t)$时，$a_k = -a_{-k}$（虚奇函数）

帕斯瓦尔定理

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

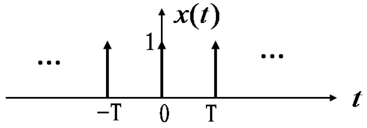
表明：一个周期信号的总平均功率就等于它的全部谐波分量的平均功率之和。

教材146页表3.1列出了连续时间傅里叶级数的重要性质。

例1：$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}$$

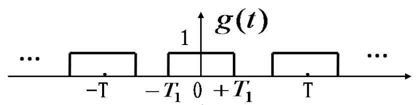
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

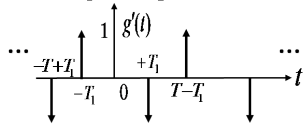


利用性质求解傅里叶级数举例

例2：周期性矩形脉冲

将其微分后，可利用例1表示为





$$g'(t) = x(t+T_1) - x(t-T_1)$$

设$g(t) \xleftrightarrow{FS} c_k \qquad g'(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$

由时域微分性质有$b_k = jk\omega_0 c_k$

根据时移特性，有

$$b_k = a_k\left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}\right] = 2ja_k \sin k\omega_0 T_1$$

由例1知，$a_k = 1/T, \quad \omega_0 = 2\pi/T$

$$\therefore c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T} = \frac{2T_1}{T}\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$$

离散时间傅里叶级数的概念

复指数信号$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$是一个以N为周期的信号，把以N为周期的所有离散时间周期性复指数信号组合起来，就可以得到成谐波关系的信号集：

$$\phi_k[n] = \left\{ e^{j(2\pi/N)kn} \right\} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

N是这个信号集的基波周期，信号集中只有N个信号是独立的。

$\boxed{\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n]}$ 与连续信号的不同之处

可见，在频率上相差2π整数倍的复指数序列都是相同的。

如果将信号集中所有独立的N个信号线性组合起来，

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

显然，$x[n]$是以N为周期的离散时间信号，上式称为$x[n]$的**离散时间傅里叶级数**表达式。

离散时间傅里叶级数DTFS

这表明，以N为周期的离散时间周期信号可以分解成N个独立的复指数谐波分量。

与连续时间傅里叶级数相同

- a_k称为傅里叶级数的系数，也称为$x[n]$的频谱系数（Spectral Coefficients）。
- $x[n]$是实信号时：$a_k^* = a_{-k}$
  a_k的实部、模是偶函数；虚部、相角是奇函数。

与连续时间傅里叶级数不同

- 级数中只有N个独立的谐波分量，说明离散时间傅里叶级数是一个有限项的级数。
- k只需取相继的N个整数，可以从0到$N-1$，也可以从1到N。

傅里叶级数的系数

给级数表达式两边同时乘以$e^{-j(2\pi/N)rn}$，并将相继的N项对n求和得到：

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>} a_k e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(2\pi/N)(k-r)n}$$

由于$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ \frac{1-e^{j2\pi k}}{1-e^{j(2\pi/N)k}} = 0, & 其它k \end{cases}$

所以当$k = r$时有：

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

于是得到DTFS的两个关系式：

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j(2\pi/N)kn}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

傅里叶级数的系数

如果不限制k的范围，使其可以取任何整数，则有：$\boxed{a_k = a_{k+rN}}$。

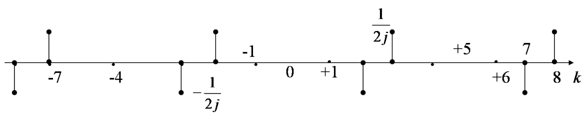
与连续时间信号不同：DTFS的系数以N为周期的，也就是离散时间周期信号的频谱是以N为周期的，k从0到$N-1$的周期称为频谱的**主值周期**。

例：$x[n] = \sin\omega_0 n$，当$\omega_0/2\pi$是有理数时，$x[n]$是周期的。设$\omega_0 = 2\pi m/N$，其中$m = 3, N = 5$。试绘出$x[n]$的频谱图

解：$x[n]$可以用离散时间傅里叶级数表示为：

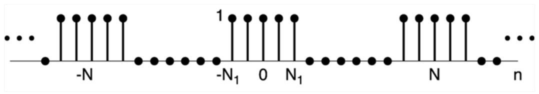
$$x[n] = \frac{1}{2j}\left[e^{j(2\pi/N)mn} - e^{-j(2\pi/N)mn}\right]$$

k取0到4时有$a_3 = \frac{1}{2j}$；$a_2 = a_{-3} = -\frac{1}{2j}$；其余$a_k = 0$。



离散时间周期性矩形脉冲序列的频谱

考虑如图的离散时间周期性矩形脉冲序列的频谱：



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j(2\pi/N)kn} = \frac{1}{N}\frac{e^{j(2\pi/N)kN_1} - e^{-j(2\pi/N)(N_1+1)k}}{1-e^{-j(2\pi/N)k}}$$

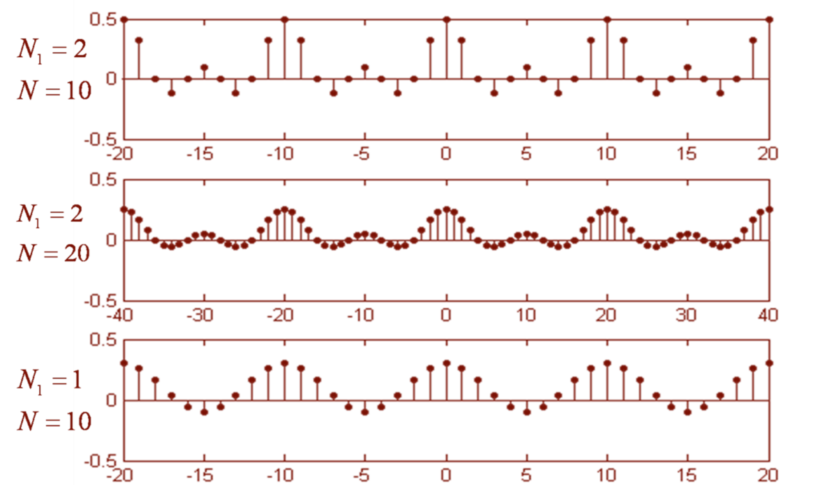
$$= \begin{cases} \frac{1}{N}\frac{\sin[\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})k]}{\sin(\pi k/N)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ \frac{2N_1+1}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \end{cases}$$

考察频谱的包络，

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin[(2N_1+1)\omega/2]}{\sin(\omega/2)}\bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

显然包络具有$\sin\beta x/\sin x$的形式。

离散时间周期性矩形脉冲序列的频谱



离散时间周期性矩形脉冲序列的频谱

与连续时间周期脉冲信号类似

1. 周期序列的频谱具有离散性、谐波性，在$(-\pi,\pi)$区间考查时也具有收敛性。
2. 当周期与脉冲宽度改变时对频谱带来的影响也类似于连续时间信号：
   - N_1不变时，频谱包络形状不变，幅度和谱线间隔都随N增大而减小。
   - N不变，N_1改变时，由于包络具有$\sin\beta x/\sin x$（其中$\beta = 2N_1+1$）的形式，频谱包络一定会发生变化。当N_1减小时，包络的第一个零点会远离原点从而使频谱主瓣变宽。

与连续时间信号不同

频谱具有周期性。

离散时间傅里叶级数的收敛

DTFS是有限项的级数，周期信号可以而且只能分解成有限个独立的复指数谐波分量，因而不存在收敛问题，也不会产生Gibbs现象。

以N为周期的序列在时域只有N个独立的值，即该序列一个周期内各点的值。DTFS的系数也是以N为周期的，也只有N个独立的值。因此，从本质上讲，DTFS就是将序列在时域的N个独立值变换为频域的N个独立值。

只要在频域取够N个分量，就一定能完全恢复成原信号，因此DTFS不存在收敛问题。只要取够了N个分量，级数将完全收敛于$x[n]$，而不会出现Gibbs 现象。

对比连续时间周期信号： 连续时间周期信号在一个周期内有无数多个独立的值，因而CTFS的系数也有无数多个独立值。当只取有限个谐波分量时，不可能恢复原信号。随着所取谐波数量的增加，近似程度越来越高，在最小均方误差准则下考虑极限情况时，就自然产生了收敛问题和Gibbs 现象。

相乘、一阶差分、帕斯瓦尔定理

DTFS有许多性质与CTFS类似，这里只讨论有差异的性质。

相乘： 若：$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFS}} a_k \qquad y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFS}} b_k$

则：$x[n]y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFS}} c_k = \sum\limits_{l=<N>} a_l b_{k-l}$ 周期卷积

差分： 若：$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFS}} a_k$

则：$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\text{DTFS}} \left(1 - e^{-jk(2\pi/N)}\right) a_k$

Parseval定理：

若：$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFS}} a_k$

则：$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

左边是信号在一个周期内的平均功率，右边是信号的各次谐波的总功率。表明：周期信号的功率既可以由时域求得，也可以由频域求得。

系统函数及频率响应

LTI系统对复指数信号所起的作用只是给输入信号加权了一个相应的特征值。

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$H(s), H(z)$被称为系统的系统函数。

如果$s = j\omega$，则

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$H(j\omega)$被称为连续时间LTI系统的频率响应。

如果$z = e^{j\omega}$，则

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$H(e^{j\omega})$被称为离散时间LTI系统的频率响应，它是以2π为周期的。

利用傅里叶级数求得系统的输出

如果一个LTI系统输入周期性信号$x(t)$或$x[n]$，

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

则系统的输出响应为：

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$y[n] = \sum_{k=<N>} a_k H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

可见，LTI系统对周期信号的响应仍是一个周期信号，LTI系统的作用是对各个谐波频率的信号分量进行不同的加权处理。

利用傅里叶级数求得系统的输出

例： 某离散时间LTI系统，单位脉冲响应$h[n] = \alpha^n u[n], -1 < \alpha < 1$，输入$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$，求输出$y[n]$。

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] \qquad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-j\omega_0 n} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega_0}}$$

$$\therefore\ H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \qquad H\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right) = \frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$$

得$b_1 = a_1 H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right) = \dfrac{1/2}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \qquad b_{-1} = a_{-1} H\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right) = \dfrac{1/2}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$

$$y[n] = \sum_{k=\pm 1} b_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

本章小结

- 复指数函数是一切LTI系统的特征函数。
- 建立了用傅里叶级数表示周期信号的方法，实现了对周期信号的频域分解。
- 以周期性矩形脉冲信号为典型例子，研究了连续时间周期信号和离散时间周期信号的谱特点及信号参量改变对谱的影响。
- 通过对连续时间傅氏级数和离散时间傅氏级数的讨论，既看到它们的基本思想与讨论方法完全类似，又研究了它们之间的区别。
- 在对信号分析的基础上，研究了LTI系统的频率响应及LTI系统对周期信号的响应。

作业

CH3-1：3.5, 3.8, 3.11, 3.22(a)abc, 3.28(a) bc

CH3-2：3.30, 3.34(b)(c), 3.36, 3.43(a)(b), 3.45, 3.48(a)(b)(c)(d)

3.43 “全部非零的偶整数k”改为“全部偶数k”