

信号与系统A Signals and Systems

第4章 连续时间傅里叶变换

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2016年 5月



本章内容

- 1 非周期信号的表示—连续时间傅里叶变换
- 2 周期信号的傅里叶变换
- 3 连续时间傅里叶变换的性质
- 4 卷积性质
- 5 相乘性质
- 6 由线性常系数微分方程表征的系统
- 7 本章小结



基本要求

- 1 掌握非周期信号的频域描述—连续时间傅里叶变换，连续时间傅里叶变换的收敛条件；
- 2 掌握常用信号的傅里叶变换，信号带宽的概念；
- 3 掌握周期信号的傅里叶变换表示；
- 4 掌握连续时间傅里叶变换的性质；
- 5 LTI系统的频域分析方法，系统频率响应的概念及频率响应的求法。



从傅里叶级数到傅里叶变换

在第3章中，通过傅里叶级数可以把周期信号表示为成谐波关系的复指数信号（是LTI系统的特征函数）的线性组合。

在工程应用中有相当多的信号是非周期信号（Aperiodic signals），本章及第5章将把上一章的概念推广应用到非周期信号，通过傅里叶变换建立非周期信号的频谱表示。

相当广泛的一类信号，包括全部有限能量的信号，都能够用复指数信号的线性组合来表示。对周期信号而言，这些复指数信号是成谐波关系的；而对非周期信号，它们在频率上无限小的靠近，线性组合的形式也由加权求和变为加权积分。

研究思路：

在时域中，如果一个周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号将演变成一个非周期信号；反过来，如果对任何非周期信号进行周期性延拓，就一定能形成一个周期信号。把非周期信号看成是周期信号在周期 T 趋于无穷大时的极限，从而考查连续时间傅里叶级数在 T 趋于无穷时的变化，就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。





周期性矩形脉冲信号的频谱

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

T_1 不变, 改变 T 。从上到下,
 $T = 4T_1, T = 8T_1, T = 16T_1$

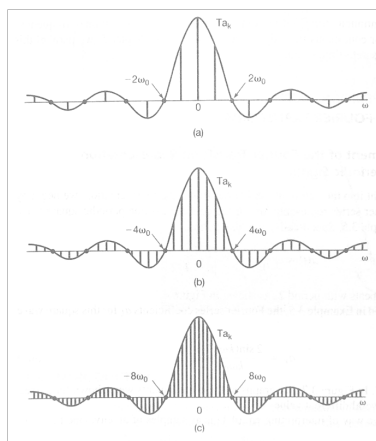
随着 T 增大, a_k 会逐渐减小并最终趋向于零。考察 Ta_k 的变化,

$$Ta_k = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$2 \sin(\omega T_1)/\omega$ 代表了 Ta_k 的包络, 而 Ta_k 是对此包络等间隔所取的样本。若 T_1 固定, 则频谱的包络与周期 T 无关。

随着 T 增加, 该包络就被以愈来愈密集的间隔采样。

T 趋于无穷时, 周期信号变成了非周期信号, Ta_k 就趋近于包络函数。



从傅里叶级数到傅里叶变换

用傅里叶级数表示图(b)的周期信号:

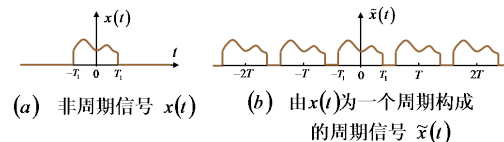
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

由 $x(t)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 的关系

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

定义 Ta_k 的包络为 $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



称为 $x(t)$ 的傅里叶变换。



周期信号与非周期信号的频谱

将 $X(j\omega)$ 与周期信号的傅里叶级数相比较有: $a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

求傅里叶反变换:

因此可得如下变换对:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$T \rightarrow \infty$ 有 $\sum \rightarrow \int$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

表明: 非周期信号可以分解成无数多个频率连续分布的振幅为 $\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega$ 的复指数信号之和。

周期信号的频谱就是与它相对应的非周期信号频谱的样本。



傅里叶变换的物理解释

首先考察傅里叶变换为 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 的信号 $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

对某一频点 ω_0 , 求 $x(t)$ 和单频复指数信号的相关:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j(\omega - \omega_0)t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_0)t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) 2\pi\delta(\omega - \omega_0) d\omega = X(j\omega_0) \end{aligned}$$

傅里叶变换就是通过相关运算提取原始信号中所包含的相应谱分量的过程。



傅里叶变换的收敛

根据傅里叶变换与傅里叶级数的关系，可以想到，傅里叶变换的收敛条件应该和傅里叶级数的收敛条件相类似。也有相应的两组条件：

1. 平方可积条件：

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ ，则 $X(j\omega)$ 存在。这表明，所有能量有限的信号，其傅里叶变换一定存在。

2. 狄里赫利条件

- ① $x(t)$ 绝对可积；
- ② $x(t)$ 在任何有限区间内只有有限个极值点，且极值是有限值；
- ③ $x(t)$ 在任何有限区间内只有有限个间断点，这些间断点都必须是有有限值。



傅里叶变换的收敛

这两组条件并不完全等价。例如： $\sin t/t$ 是平方可积的，但是并不绝对可积。

应该指出：这些条件都是傅里叶变换收敛的充分条件。

和周期信号的情况一样，当 $x(t)$ 的傅里叶变换存在时，其傅里叶变换在 $x(t)$ 的连续处收敛于信号本身，在间断点处收敛于左右极限的平均值，在间断点附近会产生 Gibbs 现象。

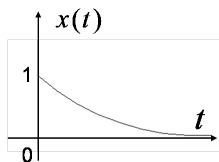
对于周期信号，尽管上述条件并不满足，但是我们通过使用冲激函数仍然认为周期信号具有傅里叶变换，这样就可以将傅里叶级数和傅里叶变换纳入到一个统一的框架内。



单边指数信号

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

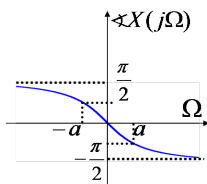
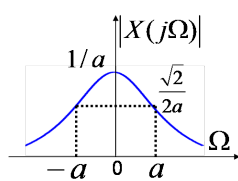
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$



幅度频谱和相位频谱：

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

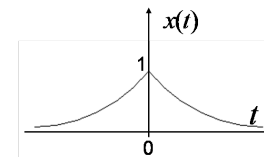
$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



双边指数信号

$$x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$$

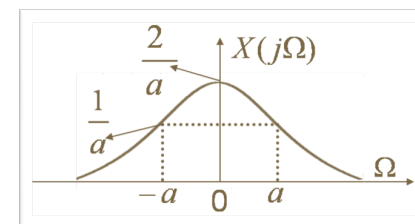
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



由于 $x(t)$ 是偶对称的实信号，它的傅里叶变换是一个实偶函数，频谱可以只用一幅图来表示。

$$|X(j\omega)| = X(j\omega)$$

$$\angle X(j\omega) = 0$$





单位冲激函数

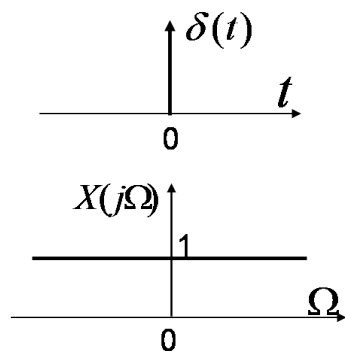
$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

这表明单位冲激信号中包含了所有的频率分量，所有频率分量的幅度都为1，相位都为0。

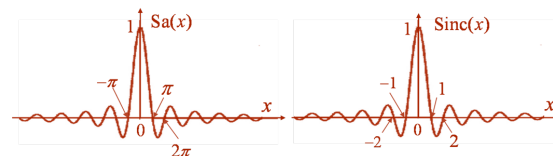
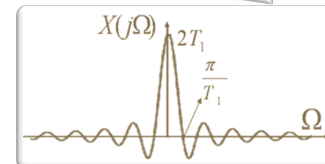
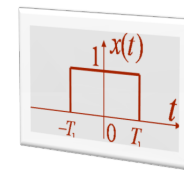
因此系统的单位冲激响应 $h(t)$ 才能完全描述一个LTI系统本身的固有特性。单位冲激信号在系统分析中具有重要意义。



矩形脉冲信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \\ &= 2T_1 \text{Sa}(\omega T_1) \\ &= 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \end{aligned}$$



LTI系统中常见的两个函数：

$$\text{Sa}(x) = \sin x / x$$

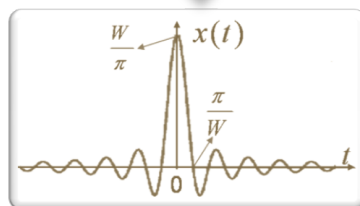
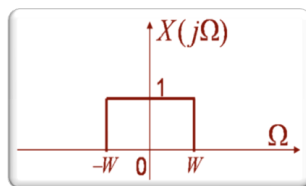
$$\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$$



sinc函数与理想低通滤波器

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \\ &= \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) \\ &= \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \end{aligned}$$

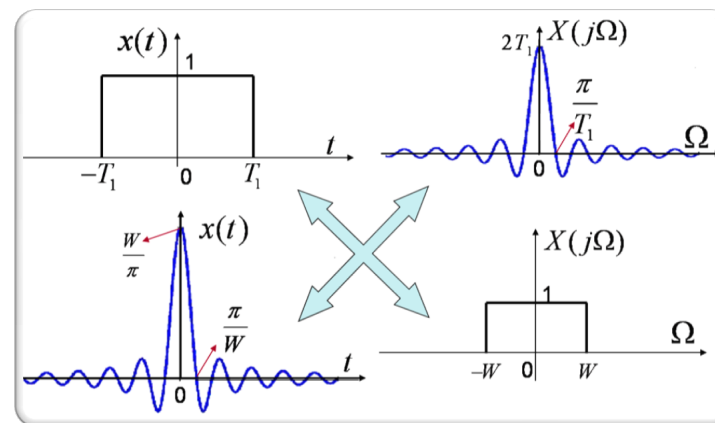


同矩形脉冲信号比较可以发现，在这两种傅里叶变换对中，都有一个矩形脉冲，一个是 $\sin x/x$ 的形式。这说明：信号在时域和频域存在着一种对偶关系。



时域和频域的对偶关系

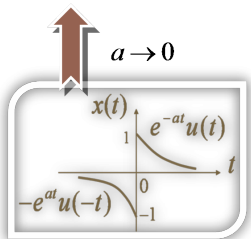
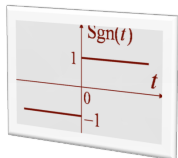
上面的对偶关系如图，可以看到，信号在时域和频域之间有一种相反的关系，即信号在时域脉冲越窄，则其频谱主瓣越宽，反之亦然。





符号函数

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



如图, 符号函数 $\text{sgn}(t)$ 可视为信号 $x(t)$ 在 a 趋近于0时的极限。

对信号 $x(t)$, 有:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$a \rightarrow 0 \quad X(j\omega) \rightarrow \frac{2}{j\omega}$$

于是有: $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

实奇信号的傅里叶变换是纯虚的奇函数。



单位阶跃函数

$$x(t) = 1 \quad X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\because x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad \therefore x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

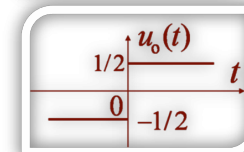
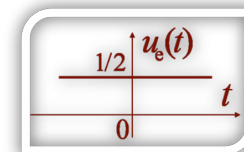
$$x(t) = u(t) \quad u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

$$u_e(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)] = \frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\omega)$$

$$u_o(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

$$\therefore u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

可以看到, 实信号的偶部与傅里叶变换的实部相对应, 奇部和虚部相对应。



周期信号的傅里叶变换

到此为止, 周期信号用傅里叶级数表示, 非周期信号用傅里叶变换表示。如果能够把它们统一起来, 无疑会给LTI系统的分析带来方便。

由于周期信号不满足Dirichlet条件, 因而不能直接从定义出发建立其傅里叶变换表示。但Dirichlet条件仅仅是傅里叶变换存在的充分条件, 因此建立周期信号的傅里叶变换表示是可能的。

我们已经知道 $x(t) = 1$ 的傅立叶变换是 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 。下面考查一下 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 应该对应于时域中的什么信号。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

即 $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, 这表明周期性复指数信号的频谱是一个冲激。

将上述关系加以推广, 于是当周期信号表示为傅里叶级数时:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$



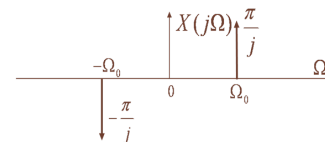
周期信号的傅里叶变换

这表明, 周期信号可以用傅里叶变换来表示, 它由一系列等间隔的冲激函数线性组合而成, 每个冲激分别位于信号各次谐波的频率处, 其强度是傅里叶级数系数的2 π 倍。

例1:

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

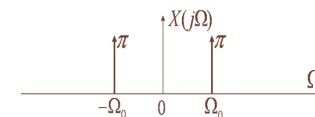
$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



例2:

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$X(j\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



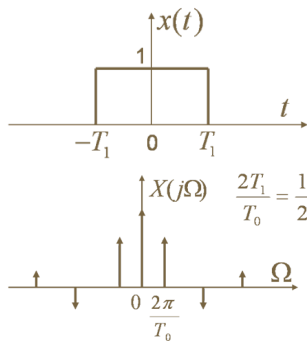


周期信号的傅里叶变换

例3: 周期性矩形脉冲信号

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

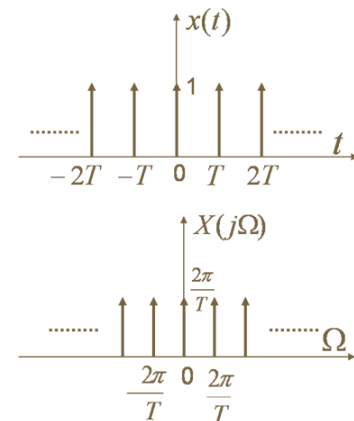
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$



周期信号的傅里叶变换

例4: 均匀冲激串

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \\ x(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \\ X(j\omega) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) \end{aligned}$$



线性和时移性质

本节讨论连续时间傅里叶变换的性质,旨在通过这些性质揭示信号时域特性与频域特性之间的关系。同时掌握和运用这些性质可以简化傅里叶变换对的求取。

线性 (Linearity)

若: $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$
则有: $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$

时移 (Time Shifting)

若: $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
则有: $x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0} = X_1(j\omega)$

易得: $|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$, $\angle X_1(j\omega) = \angle X(j\omega) - \omega t_0$

这表明: 信号的时移只影响它的相频特性,其相频特性会增加一个线性相移。



共轭对称性 (Conjugate and Symmetry)

若: $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则有 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$, $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$
 $X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt$ *
对t换元可得:
 $X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt$
对*式两边取共轭:
 $X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt$

若 $x(t)$ 是实信号, 则 $x(t) = x^*(t)$,
于是有: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$.
 $\Re[X(j\omega)] = \Re[X(-j\omega)]$
 $\Im[X(j\omega)] = -\Im[X(-j\omega)]$
 $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$
 $\angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega)$

$x(t)$	$X(j\omega)$
实信号	$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ 实部是偶函数, 虚部是奇函数 模是偶函数, 相角是奇函数
实偶函数	实偶函数
实奇函数	纯虚、奇函数
偶部+奇部	对应实部+虚部



时域微分和积分 (Differential and Integral)

若: $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则: $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$ 。

证明: 傅里叶反变换公式的两边对时间变量 t 微分, 可得

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \square$$

该性质说明傅里叶变换可将时域的微分运算转变为频域的代数运算。

对信号在时域积分则相应有:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

由于

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

利用 $u(t)$ 的傅里叶变换及后面将要介绍的卷积性质即可证明积分性质。



时域和频域的尺度变换 (Scaling)

若: $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

则有

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

这表明: 信号如果在时域扩展 a 倍, 则其带宽相应压缩 a 倍, 反之亦然。这从理论上证明了时域与频域的相反关系, 也证明了信号的脉宽带宽积等于常数的结论。

作为特例:

若 $a = -1$, 则有 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 。



对偶性 (Duality)

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

由对偶性可以方便地将时域的某些特性对偶到频域。

例: 求 $x(t)$ 的傅里叶变换。 利用对偶性, 由时域特性推出频域特性。
移频特性:

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \quad x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)]$$

解: 由 频域微分特性:

$$e^{-a|t|}, a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad -jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

令 $a = 1$ 并利用对偶性, 可得 频域积分特性:

$$X(j\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} \quad \frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\tau) d\tau$$



Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

这表明: 信号的能量既可以在时域求得, 也可以在频域求得。由于 $|X(j\omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布, 因而称其为能量谱密度函数。

对周期信号也有相应的Parseval定理:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$|a_k|^2$ 称为周期信号的功率谱。



系统的频率响应

考察 $e^{j\omega_0 t}$ 经过LTI系统后的响应:

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

可见, $e^{j\omega_0 t}$ 是LTI系统的特征函数, 对应的特征值是

$$H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

所以单位冲激响应的傅里叶变换在 ω_0 处的值就是LTI系统对 $e^{j\omega_0 t}$ 的复加权因子。因此, $H(j\omega)$ 被称为系统的频率响应。

对于稳定系统, 即: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$ 其系统的频率响应往往是存在的。

鉴于 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 是一一对应的, 因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。频率响应和单位冲激响应一样可以为LTI系统建模。



卷积性质

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{h(t)} H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}, \text{ 其中: } H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \xrightarrow{h(t)} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$y(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) H(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$



卷积性质

对于任意输入信号 $x(t)$, 可以将其分解成复正弦 (指数) 信号的线性组合:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

对于每一个不同频率的复正弦信号 $e^{j\omega t}$, 其系统响应为: $H(j\omega) e^{j\omega t}$ 。

系统的输出为:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

卷积性质:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

由于卷积特性的存在, 将LTI系统时域的卷积运算转换为频域的相乘运算。本质上, 上述特性的成立正是因为复正弦信号是一切LTI系统的特征函数。



卷积性质

$$\text{若: } x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega), x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$\text{则: } x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) X_2(j\omega)$$

令 $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$, 对 $x(t)$ 直接作傅里叶变换, 有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(j\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau = X_1(j\omega) X_2(j\omega)$$

卷积特性为在频域分析LTI系统提供了理论依据。



卷积性质的应用—LTI系统的频域分析法

根据卷积特性,可以对LTI系统进行频域分析,其过程为:

- 1 由 $x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$
- 2 根据系统的描述, 求出 $H(j\omega)$
- 3 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
- 4 $Y(j\omega) \xrightarrow{IFT} y(t)$

频域分析的优势:避免复杂的卷积运算, 信号和系统有更为明确的物理表示。

例: 考察延时系统 $y(t) = x(t - t_0)$ 的频率响应及其频域输出。

$$h(t) = \delta(t - t_0) \xrightarrow{FT} H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

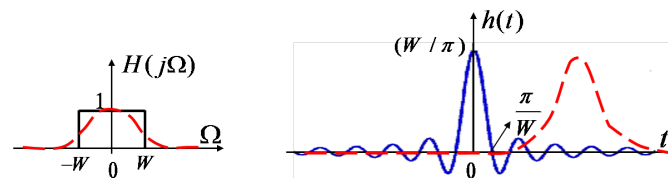
延时系统的频率响应模为1, 相位为线性相位。频域输出为原信号的线性相移。



卷积性质的应用—滤波器设计

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



理想低通滤波器不是因果系统, 工程上无法实现。滤波器设计需要在时域和频域进行折衷。



卷积性质的应用—举例

如果某LTI系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, 系统的输入为 $x(t) = e^{-bt}u(t)$, $b > 0$, 求输出 $y(t)$ 。

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega},$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}$$

将 $Y(j\omega)$ 展开成部分分式有

$a \neq b$ 时, 输出响应为

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega}$$

$$y(t) = \frac{1}{b - a} (e^{-at} - e^{-bt})u(t)$$

$$\text{可求得: } \begin{cases} A = 1/(b - a) \\ B = 1/(a - b) \end{cases}$$

$a = b$ 时, $y(t) = te^{-at}u(t)$

技巧: 展开成部分分式, 然后可以利用常用的变换对和傅里叶变换的性质。



相乘 (调制) 性质

$$\text{若: } x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$\text{则: } x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

利用傅里叶变换的对偶性, 可以从卷积特性推出与之对偶的调制特性。又称**频域卷积特性**。

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$X_1(jt) \leftrightarrow 2\pi x_1(-\omega) \quad X_2(jt) \leftrightarrow 2\pi x_2(-\omega)$$

$$X_1(jt) * X_2(jt) \leftrightarrow 4\pi^2 x_1(-\omega)x_2(-\omega)$$

$$4\pi^2 x_1(-t)x_2(-t) \leftrightarrow 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$



相乘性质

若: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则: $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \cdot x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\Omega)t} dt d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Omega) X_2[j(\omega-\Omega)] d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \end{aligned}$$



相乘性质的应用

工程应用中经常使用两个信号在时域相乘来实现调制、变频和采样。特别的,两个信号在时域相乘可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度,这就是幅度调制。其中一个信号称为载波,另一个是调制信号。相乘性质也称为调制性质。

使用相乘性质解释移频性质:

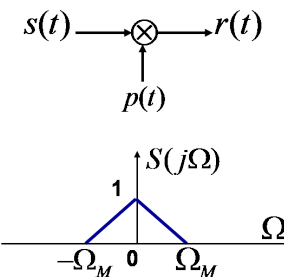
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega), \quad e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)]$$

例: 正弦幅度调制

$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad p(t) = \cos \omega_0 t$$

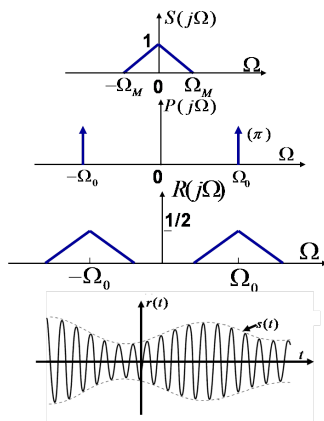
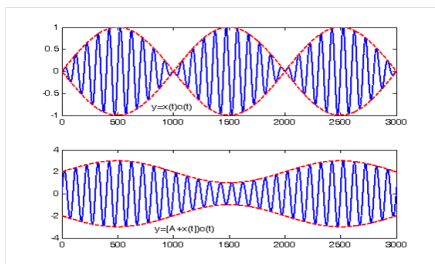
$$r(t) = s(t)p(t)$$



相乘性质的应用—正弦幅度调制

$$P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

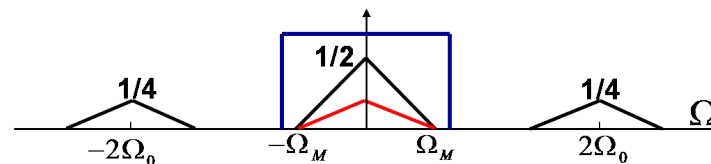


正弦幅度调制等效于在频域将调制信号的频谱搬移到载频位置。



相乘性质的应用—同步解调

$$\begin{aligned} r(t) \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} S[j(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{4} S[j(\omega + 2\omega_0)] \end{aligned}$$



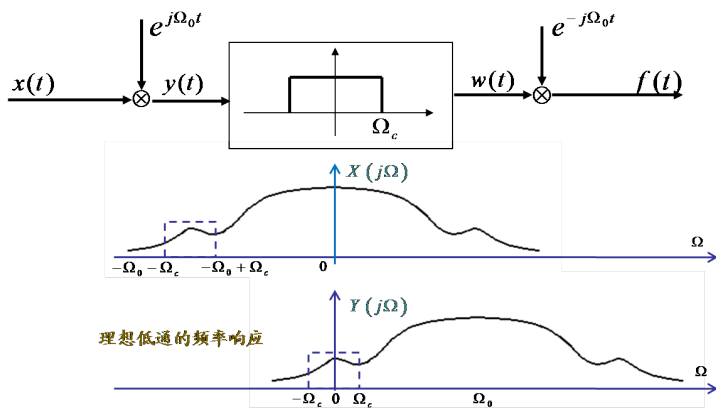
此时,用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的系统即可从 $r(t)$ 恢复出 $s(t)$ 。只要 $\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M$ 即可。



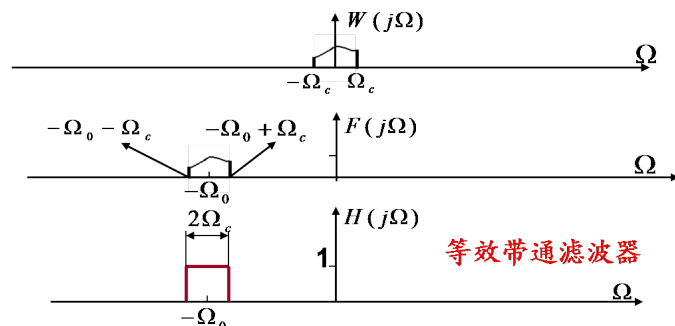


相乘性质的应用

中心频率可变的带通滤波器在工程上实现比较困难，使用变频器结合固定频率特性的滤波器实现中心频率可变带通滤波器。



相乘性质的应用



相当于从 $X(j\omega)$ 中直接用一个带通滤波器滤出的频谱。表明整个系统相当于一个中心频率为 ω_0 的带通滤波器，改变 ω_0 即可实现中心频率可变。工程应用中，宽带的低通滤波器往往也是比较难实现的，所以经常将上述的低通滤波器替换为固定频率的带通滤波器，其中心频点往往称为中频。



系统的频率响应

工程实际中有相当广泛的LTI系统其输入输出关系可以由一个线性常系数微分方程描述。其一般形式是：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

由于 $e^{j\omega t}$ 是一切LTI系统的特征函数，因此当系统的输入 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时，系统所产生的响应就是 $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ 。表明在输入 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的情况下，解得的输出就是 $H(j\omega)$ 的值。但是这种逐频点求得或测得的方法太麻烦。

对于线性常系数微分方程描述的LTI系统，可以很简单地直接从方程求出频率响应 $H(j\omega)$ 。对上式两边取傅里叶变换，并利用时域微分特性可得到：

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$



系统的频率响应

由于： $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$ 所以，系统的频率响应为：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \rightarrow \text{是一个关于 } j\omega \text{ 的有理函数。}$$

可见由LCCDE描述的LTI系统其频率特性是一个有理函数。所以，对由LCCDE描述的LTI系统，当需要求得 $h(t)$ 时(比如时域分析时)，往往是由 $H(j\omega)$ 做反变换得到。傅里叶变换将一个由微分方程表征的LTI系统的问题演变为直接的代数问题。

对有理函数求傅里叶反变换通常采用部分分式展开和利用常用变换对进行。



系统的频率响应—举例

例：某LTI系统由下列微分方程描述，

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

已知系统最初是松弛的，求系统的单位冲激响应。

解：根据上式可直接写出该系统的频率响应为：

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} = \frac{2}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2} \rightarrow \text{部分分式分解}$$

作反变换可求得： $h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ 。

可见对微分方程描述的LTI系统，可以很方便地求出其单位冲激响应。



信号通过系统—举例

例2：求信号 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 通过系统 $h(t)$ 的响应。

解： $x(t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ ，设 $h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$ ，则有

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)H(j\omega) \\ &= \pi [H(-j\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) + H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

又 $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ ，设 $H(j\omega_0) = Ae^{j\theta}$ ，则 $H(-j\omega_0) = Ae^{-j\theta}$

$$Y(j\omega) = A\pi [e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)]$$

取傅里叶反变换可得：

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} \\ &= \frac{A}{2} [e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)}] = A \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$



信号通过系统—举例

例1：已知 $h(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$ ，求 $x_1(t), x_2(t)$ 通过系统后的响应。

$$x_1(t) = \cos \frac{\pi}{2}t, \quad x_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3}t + \cos \frac{4\pi}{3}t + \cos 3\pi t \right)$$

解：系统的频率响应是门函数

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi \\ 0, & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

因此输入信号中低于 2π 的频率分量不失真的通过，而高于 2π 的频率分量被完全衰减了。

所以：

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3}t + \cos \frac{4\pi}{3}t \right)$$



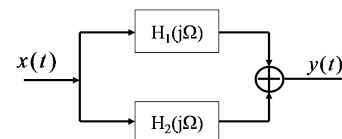
互联系统的频域响应

级联系统：



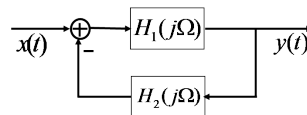
$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

并联系统：



$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

反馈系统：



$$Y(j\omega) = [X(j\omega) - Y(j\omega)H_2(j\omega)]H_1(j\omega)$$

$$X(j\omega)H_1(j\omega) = Y(j\omega)[1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)]$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)}$$





本章小结

- 通过连续时间傅里叶变换，建立了将连续时间信号(包括周期、非周期信号)分解为复正弦(指数)信号分量的线性组合的方法。
- 通过讨论傅里叶变换的性质，揭示了信号时域特性与频域特性的关系。卷积特性是LTI系统频域分析方法的理论基础，相乘特性则是通信和信号传输领域各种调制解调技术的理论基础。
- 对LTI系统建立了频域分析的方法。
- 对由LCCDE描述的LTI系统，可以很方便地由LCCDE得到其频率响应，进而通过傅里叶反变换可以得到其单位冲激响应。
- 稳定的LTI系统可以通过其频率响应来描述。
- 建立了系统互联式，讨论了系统频率响应与各子系统频率响应的关系。



作业

CH4-1: 4.13, 4.14, 4.24, 4.25, 4.27

CH4-2: 4.11, 4.22(a)(c)(e), 4.31, 4.32

CH4-3: 4.10, 4.21(a)(c)(e)(g), 4.34, 4.35

习题勘误:

4.27题中的 $T > 0$ 应改为 $T > 2!$

