

# 信号与系统A Signals and Systems

## 第9章 拉普拉斯变换

张建国

西安交通大学  
电子与信息工程学院

2016年6月



## 本章内容

- 1 引言
- 2 拉普拉斯变换
- 3 拉普拉斯变换的收敛域
- 4 拉普拉斯反变换
- 5 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值
- 6 拉普拉斯变换的性质
- 7 常用信号的拉普拉斯变换
- 8 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统
- 9 系统函数的代数属性与方框图表示
- 10 单边拉普拉斯变换
- 11 本章小结



## 基本要求

- 1 掌握双边拉普拉斯变换的定义，它与傅里叶变换的关系；
- 2 掌握拉普拉斯变换收敛域的概念，各类信号拉氏变换收敛域的基本特征；
- 3 掌握通过部分分式展开和常用变换对求拉普拉斯反变换的方法；
- 4 掌握零极点图的概念，系统函数零极点分布对系统时、频域特性的影响；并一般了解一阶与二阶系统的时域和频域特性。
- 5 熟练掌握常用信号的拉普拉斯变换对，拉普拉斯变换的性质；
- 6 掌握并能运用拉普拉斯变换法分析LTI系统；明确系统函数在系统分析中的重要性，掌握系统的级联型结构和并联型结构；
- 7 掌握单边拉普拉斯变换及利用单边拉普拉斯变换分析增量线性系统的方法。



## 引言

傅里叶分析工具在研究信号和线性时不变系统的很多问题中是极为有用的工具。这主要是因为相当广泛的一类信号都能用周期性复指数信号 ( $e^{j\omega t}$ ) 的线性组合来表示，而  $e^{j\omega t}$  是LTI系统的特征函数。

将  $e^{j\omega t}$  扩展为复指数函数  $e^{st}$  (其中  $s = \sigma + j\omega$ )，即为拉普拉斯变换，又称变换域 (或复频域) 分析。

有了连续时间傅里叶变换 (傅氏变换)，为什么还要引入拉普拉斯变换 (拉氏变换)？

- 数学上，傅氏变换是拉氏变换的特例，而拉氏变换是傅氏变换的推广，拉氏变换比傅氏变换有更大的收敛区间。
- 工程上，拉氏变换可以用于许多不稳定系统的分析。
- 系统单位冲激响应函数的拉氏变换的零极点特性为系统的设计带来了许多便利。





## 双边拉普拉斯变换的定义

复指数输入信号 $e^{st}$ 是一切连续时间LTI系统的特征函数。当系统的单位冲激响应为 $h(t)$ 时, 系统的输出响应为:

$$y(t) = H(s)e^{st}, \text{ 其中 } H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$$

显然当 $s = j\omega$ 时, 上式即对应 $h(t)$ 的傅里叶变换。

与此对应, 信号 $x(t)$ 的**双边拉普拉斯变换**定义为:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

简称拉氏变换, 一般而言自变量 $s$ 是复数, 具有 $s = \sigma + j\omega$ 的形式。

显然当 $s = j\omega$ 时, 上式即为信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。



## 双边拉氏变换的示例

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a$$

当 $a > 0$ 时,  $x(t)$ 的傅里叶变换存在

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a+j\omega} \quad (a > 0)$$

显然, 在 $a > 0$ 时, 拉氏变换收敛的区域 ( $\Re\{s\} > -a$ ) 包括了 $\sigma = 0$  (即 $j\omega$ 轴)。

比较 $X(s)$ 和 $X(j\omega)$ , 显然有 $X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega)$ 。

当 $a = 0$ 时,  $x(t) = e^{-at}u(t) = u(t)$ , 可知

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \Re\{s\} > 0$$

例2:  $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st} dt = \frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} < -a$$



## 拉普拉斯变换和傅里叶变换之间的关系

对一般的 $s(s = \sigma + j\omega)$ 来说, 上式可改写为:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt$$

所以拉氏变换是傅氏变换的推广。 $x(t)$ 的拉氏变换可以看成它乘以一个实指数信号 $e^{-\sigma t}$ 后的傅氏变换。

只要有合适的 $\sigma$ , 就可以使许多本来傅氏变换不收敛的函数, 在引入 $e^{-\sigma t}$ 后满足收敛条件。所以拉氏变换的收敛性要比傅氏变换的收敛性强, 这也是本章要讨论拉氏变换的主要原因之一。

例1: 考察信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$ 的拉氏变换及收敛域。

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{+\infty}$$

只有 $\Re\{s\} > -a$ 时, 积分收敛。



## 收敛域( Region of Convergence )的概念

比较上面两个例子, 两个不同信号拉氏变换的代数表示式相同, 区别仅在于收敛域不同。

- 拉氏变换与傅里叶变换一样存在收敛问题。并非任何信号的拉氏变换都存在, 也不是 $s$ 平面上的任何复数都能使拉氏变换收敛。
- 使拉氏变换积分收敛的那些复数 $s$ 的集合, 称为拉氏变换的收敛域。拉氏变换的收敛域ROC (Region of Convergence) 对拉氏变换是非常重要的概念。
- 不同的信号可能会有完全相同的拉氏变换表达式, 只是它们的收敛域不同。
- 只有拉氏变换的表达式连同相应的收敛域, 才能和信号建立一一对应的关系。所以给出一个信号的拉氏变换时, 要同时给出代数表达式和收敛域。
- 如果拉氏变换的ROC包含 $j\omega$ 轴, 则有 $X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$





## 收敛域( Region of Convergence )的概念

例3:  $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

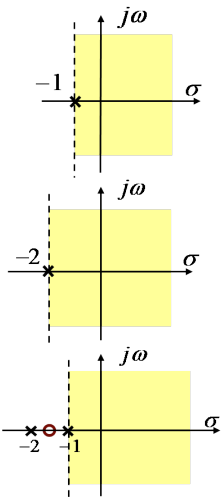
$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}dt$$

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \quad \Re\{s\} > -1$$

可见：拉氏变换的收敛域是各个收敛域的公共部分。ROC总是以平行于 $j\omega$ 轴的直线作为边界的，ROC的边界总是与的分母的根相对应的。



## 拉氏变换的零极点图

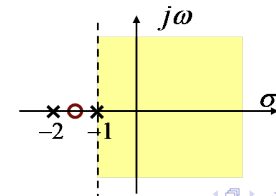
若 $X(s)$ 是有理函数

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$

分子多项式的根称为**零点**；分母多项式的根称为**极点**。

将 $X(s)$ 的全部零点和极点表示在 $s$ 平面上，就构成了**零极点图**。零极点图及其收敛域可以表示一个 $X(s)$ ，最多与真实的 $X(s)$ 相差一个常数因子 $M$ 。因此，零极点图是拉氏变换的图示方法。

$$X(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} = 2 \frac{s+3/2}{(s+1)(s+2)}$$



## 拉普拉斯变换收敛域的性质

由例子可以看出，若 $X(s)$ 存在，则其收敛域边界的位置是由 $X(s)$ 的极点决定的。各种类型的信号，其拉氏变换的ROC具有一些普遍的特征：

**性质1: ROC由 $s$ 平面上平行于 $j\omega$ 轴的带状区域组成。**

说明：决定 $x(t)e^{-\sigma t}$ 是否可积的只是 $s$ 的实部，而与 $s$ 的虚部无关。由于ROC只取决于 $s$ 的实部，因此ROC的边界必然平行于 $j\omega$ 轴。

**性质2: 有理拉氏变换的ROC内不包含任何极点。**

说明：如果在ROC内有一个极点，则 $X(s)$ 在该点为无穷大，拉氏变换的积分在该点就不可能收敛。

**性质3: 如果信号 $x(t)$ 是时限的，并且是绝对可积的，则其ROC是整个 $s$ 平面。**

说明：设 $x(t)$ 是 $[t_1, t_2]$ 上的时限信号，由于它是绝对可积的，所以有： $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$



## 拉普拉斯变换收敛域的性质

对任意的 $s$ 有：

$$X(s) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)e^{-st}dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \quad \sigma = \Re\{s\}$$

在有限持续期 $[t_1, t_2]$ 内，

如果 $\sigma < 0$ ，则

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq e^{-\sigma t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$$

如果 $\sigma > 0$ ，则

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq e^{-\sigma t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$$

因此对任意 $s$ 有： $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

即在整个 $s$ 平面上绝对可积， $X(s)$ 在整个 $s$ 平面收敛。



## 拉普拉斯变换收敛域的性质

性质4: 若 $x(t)$ 是右边信号, 且 $s = \sigma_0 + j\omega$ 时拉氏变换存在, 则对 $\Re\{s\} > \sigma_0$ 的 $s$ , 其拉氏变换也存在。

说明: 右边信号是指 $t < t_0$ 时,  $x(t) = 0$ 的信号。若拉氏变换对 $s = \sigma_0 + j\omega$ 收敛, 则有:

$$\int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

如果 $\sigma_1 > \sigma_0$ , 则有:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_0} \int_{t_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned}$$

所以 $\sigma_1 > \sigma_0$ 的区域在收敛域内。又因为收敛域内不能有极点, 故收敛域一定位于 $X(s)$ 的最右边极点的右边。



## 拉普拉斯变换收敛域的性质

性质5: 若 $x(t)$ 是左边信号, 且 $s = \sigma_0 + j\omega$ 时拉氏变换存在, 则对 $\Re\{s\} < \sigma_0$ 的 $s$ , 其拉氏变换也存在。

性质6: 若 $x(t)$ 是双边信号且其拉氏变换存在, 那么 $X(s)$ 的收敛域一定是由 $s$ 平面的一条带状区域所组成。

说明: 一个双边信号就是对 $t > 0$ 和 $t < 0$ 都具有无限范围的信号。可以选取任意时间 $t_0$ , 将它分成一个左边信号和一个右边信号。根据特征4和特征5, 如果 $x(t)$ 的拉氏变换存在, 其ROC一定为这两个单边信号ROC的公共部分, 这个公共部分必定是一个带状区域。如果没有公共部分, 就意味着双边信号 $x(t)$ 的拉氏变换不存在。

当 $X(s)$ 是有理函数时, 其ROC总是由 $X(s)$ 的极点分割的, 必然满足以下规律:

- 右边信号的ROC一定是 $X(s)$ 最右边极点的右边;
- 左边信号的ROC一定是 $X(s)$ 最左边极点的左边;
- 双边信号的ROC可以是任意两相邻极点之间的带状区域。



## 拉普拉斯变换收敛域—举例

例1:

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

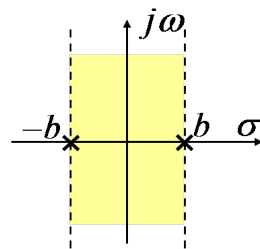
$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad \Re\{s\} > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-b}, \quad \Re\{s\} < b$$

当 $b > 0$ 时, 上述ROC有公共部分,

$$X(s) = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} \quad -b < \Re\{s\} < b$$

当 $b < 0$ 时, 上述ROC无公共部分, 表明 $X(s)$ 不存在。



## 拉普拉斯变换收敛域—举例

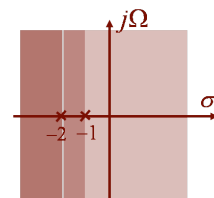
$$\text{例2: } X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$X(s)$ 的极点:  $s = -1, s = -2$

$X(s)$ 可以形成三种ROC:

- ① ROC:  $\Re\{s\} > -1$ , 此时 $x(t)$ 是右边信号;  
 $x(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t)$
- ② ROC:  $\Re\{s\} < -2$ , 此时 $x(t)$ 是左边信号;  
 $x(t) = [e^{-2t} - e^{-t}] u(-t)$
- ③ ROC:  $-2 < \Re\{s\} < -1$ , 此时 $x(t)$ 是双边信号。  
 $x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$

可见, 根据极点分布和ROC的特征, 可以判断信号的种类。





## 拉普拉斯反变换(The Inverse Laplace Transform)

利用傅里叶变换的反变换, 有:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

若令  $s = \sigma + j\omega$ , 则  $d\omega = \frac{1}{j}ds$ , 所以有:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

物理意义: 信号  $x(t)$  可以分解成为无穷多个复振幅为  $\frac{X(s)}{2\pi j}$  的复指数信号  $e^{st}$  的线性组合。

拉氏变换对:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$



## 拉普拉斯反变换

当  $X(s)$  是有理函数时, 通常利用部分分式展开法或留数法求拉氏反变换。

部分分式展开法是求拉氏反变换的主要方法。具体步骤如下:

- ① 将  $X(s)$  展开为部分分式。
- ② 根据  $X(s)$  的 ROC, 确定每一项的 ROC。
- ③ 利用常用信号的变换对与拉氏变换的性质, 对每一项进行反变换。

$$\text{例: } X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

确定可能的收敛域及所对应信号的属性。

极点:  $s = -1, s = -2$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



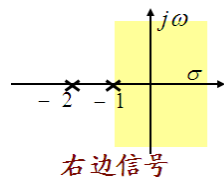
## 拉普拉斯反变换的求法—部分分式展开

右边信号, ROC:  $\Re\{s\} > -1$

$$\frac{1}{s+1}, \Re\{s\} > -1 \Leftrightarrow e^{-t}u(t)$$

$$-\frac{1}{s+2}, \Re\{s\} > -2 \Leftrightarrow -e^{-2t}u(t)$$

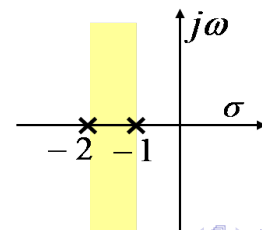
$$\therefore X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \Re\{s\} > -1 \Leftrightarrow x(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$



双边信号, ROC:  $-2 < \Re\{s\} < -1$

$$\frac{1}{s+1}, \Re\{s\} < -1 \Leftrightarrow -e^{-t}u(-t)$$

$$-\frac{1}{s+2}, \Re\{s\} > -2 \Leftrightarrow -e^{-2t}u(t)$$



## 拉普拉斯反变换的求法—部分分式展开

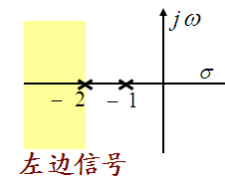
$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, -2 < \Re\{s\} < -1 \Leftrightarrow x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

左边信号, ROC:  $\Re\{s\} < -2$

$$\frac{1}{s+1}, \Re\{s\} < -1 \Leftrightarrow -e^{-t}u(-t)$$

$$-\frac{1}{s+2}, \Re\{s\} < -2 \Leftrightarrow e^{-2t}u(-t)$$

$$\therefore X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \Re\{s\} < -2 \Leftrightarrow x(t) = [e^{-2t} - e^{-t}]u(-t)$$





## 拉普拉斯反变换的求法—留数法

当 $X(s)$ 是有理函数时, 可用留数法求反变换:

- 1 求出 $X(s)$ 的全部极点。
- 2 求出 $X(s)e^{st}$ 在ROC 左边的所有极点处的留数之和, 它们构成了 $x(t)$ 的因果部分。
- 3 求出 $X(s)e^{st}$ 在ROC 右边的所有极点处的留数之和, 并加负号, 它们构成了 $x(t)$ 的反因果部分。

例:  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , ROC:  $-2 < \Re\{s\} < -1$

$X(s)$ 的极点 $s_1 = -1$ 位于ROC的右边,  $s_2 = -2$ 位于ROC的左边。

$$\begin{aligned} x(t) &= -\text{Res}[X(s)e^{st}, s_1] + \text{Res}[X(s)e^{st}, s_2] \\ &= -\frac{1}{s+2}e^{st} \Big|_{s=-1}u(-t) + \frac{1}{s+1}e^{st} \Big|_{s=-2}u(t) \\ &= -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$



## 由零点极点图对傅里叶变换几何求值

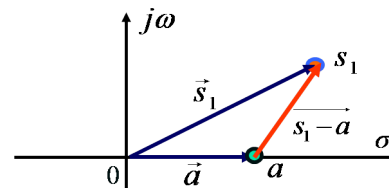
可以用零点极点图表示 $X(s)$ 的特征。当ROC包括 $j\omega$ 轴时, 以 $s = j\omega$ 代入 $X(s)$ , 就可以得到 $X(j\omega)$ 。以此为基础可以用几何求值的方法从零点极点图求得 $X(j\omega)$ 的特性。这在定性分析系统频率特性时有很大用处。

复数和平面上的矢量是一一对应的。

1. 单零点情况:  $X(s) = s - a$ , 零点 $s = a$ , 要求出 $s = s_1$ 时的 $X(s_1)$ 。

复数 $s_1$ 和 $a$ 可以分别看作平面上的矢量 $\vec{s}_1$ 和 $\vec{a}$ 。

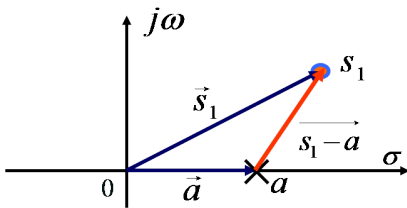
根据 $X(s_1) = s_1 - a$ , 复数 $X(s_1)$ 对应的矢量即为上述两个矢量的差矢量 $\vec{s}_1 - \vec{a}$ , 称之为零点矢量。零点矢量的模(长度) $|\vec{s}_1 - \vec{a}|$ 对应 $|X(s_1)|$ , 幅角即为 $\angle X(s_1)$ 。



## 由零点极点图对傅里叶变换几何求值

2. 单极点情况: 极点 $s = a$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s - a} \\ |X(s_1)| &= \frac{1}{|\vec{s}_1 - \vec{a}|} \\ \angle X(s_1) &= -\angle(\vec{s}_1 - \vec{a}) \end{aligned}$$



直接由极点向点 $s_1$ 作矢量, 称之为极点矢量。极点矢量长度(模)的倒数为 $|X(s_1)|$ , 负的幅角为 $\angle X(s_1)$ 。

3. 一般情况: 对有理函数形式的 $X(s)$

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$



## 由零点极点图对傅里叶变换几何求值

因此有:

$$X(s_1) = M \frac{\prod_i (s_1 - \beta_i)}{\prod_i (s_1 - \alpha_i)} \Rightarrow \begin{cases} |X(s_1)| = |M| \frac{\prod_i |s_1 - \beta_i|}{\prod_i |s_1 - \alpha_i|} \\ \angle X(s_1) = \sum_i \angle(s_1 - \beta_i) - \sum_i \angle(s_1 - \alpha_i) \end{cases}$$

即: 从所有零点向 $s_1$ 点作零点矢量, 从所有极点向 $s_1$ 点作极点矢量。所有零点矢量的长度之积的 $M$ 倍除以所有极点矢量的长度之积即为 $|X(s_1)|$ 。所有零点矢量的幅角之和减去所有极点矢量的幅角之和即为 $\angle X(s_1)$ , 如果比例因子 $M$ 是负的, 则还应有一个附加的相角 $\pi$ 。

当 $s_1$ 取为 $j\omega$ 轴上的点时, 即为傅里叶变换的几何求值。考查 $s_1$ 在 $j\omega$ 轴上移动时所有零、极点矢量的长度和幅角的变化, 即可得出 $X(j\omega)$ 的幅频特性和相频特性。



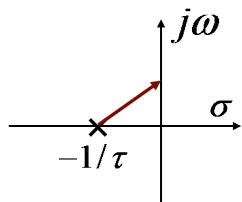


## 由零点极点图表示一阶系统

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t),$$

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)}, \Re[s] > -\frac{1}{\tau}$$

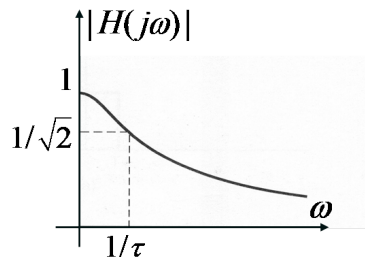


$|H(j\omega)|$ 在 $\omega = 0$ 取得最大值，因为此时极点向量最短。

随着 $\omega$ 增加， $|H(j\omega)|$ 单调下降。

$\omega = \frac{1}{\tau}$ 时，下降到最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

$\tau$ 为时间常数， $\tau$ 越小，极点离坐标原点越远，系统的3dB带宽越宽。



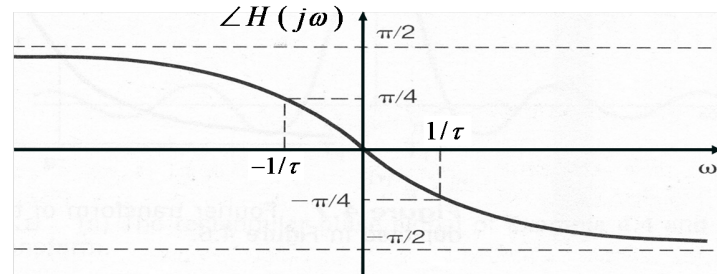
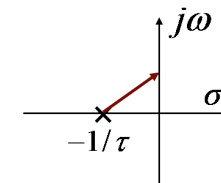
## 由零点极点图表示一阶系统

相位特性：当 $\omega = 0$ 时， $\angle H(j\omega) = 0$

随着 $\omega$ 增加， $\angle H(j\omega)$ 趋向于 $-\pi/2$ 。

随着 $\omega$ 减小， $\angle H(j\omega)$ 趋向于 $\pi/2$ 。

$\omega = 1/\tau$ 时， $\angle H(j\omega) = -\pi/4$ 。



## 由零点极点图表示二阶系统

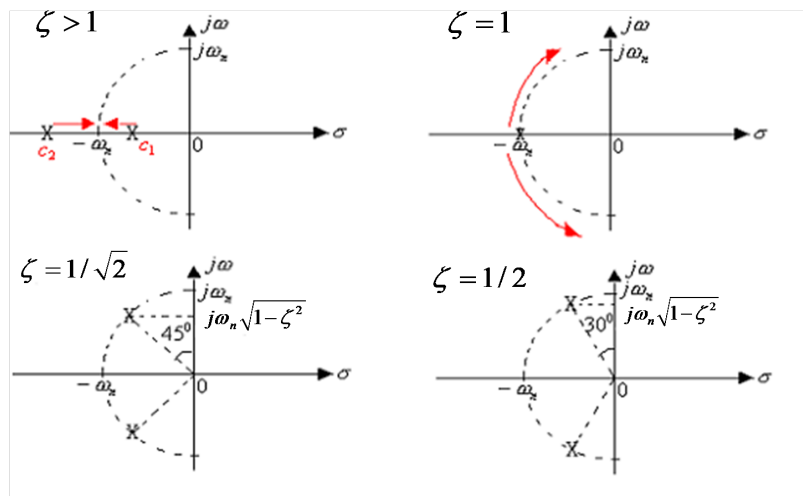
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)}$$

$$c_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$h(t) = M (e^{c_1 t} - e^{c_2 t}) u(t), M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

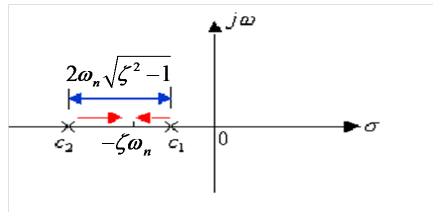


## 由零点极点图表示二阶系统



## 由零极点图表示二阶系统

当 $\zeta > 1$ 时,  $H(s)$ 有两个负的实数极点, 此时系统处于**过阻尼状态**。 $c_1$ 起主要作用。随着 $\zeta \downarrow$ , 两极点相向移动, 向 $-\zeta\omega_n$ 处靠拢。



当 $\zeta = 1$ 时, 两极点重合于 $-\omega_n$ 处, 成为二阶极点。系统处于**临界阻尼状态**。

$\zeta$ 进一步减小, 则二阶极点分裂为共轭复数极点, 且随 $\zeta$ 的减小而逐步靠近 $j\omega$ 轴。极点运动的轨迹——根轨迹是一个半径为 $\omega_n$ 的圆周。

此时系统处于**欠阻尼状态**, 随着 $\omega \uparrow$ , 位于第2象限的极点矢量比第3象限的极点矢量更短, 因此它对系统特性的影响较大(被称为**主极点**)。



## 由零极点图表示二阶系统

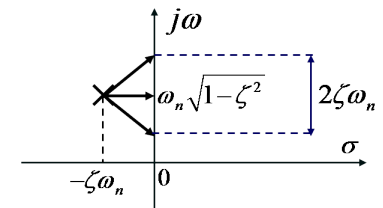
当 $\zeta < 1/\sqrt{2}$ 时, 由于该极点矢量变得很短, 因而会使 $H(j\omega)$ 出现峰值。其峰点位于 $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 附近, 峰值为

$$|H(j\omega)|_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

在 $\zeta < 1/\sqrt{2}$ 时, 若认为**主极点矢量**增长 $\sqrt{2}$ 倍时, 对应的频率是系统带宽的截止频率, 则可以近似确定此时的系统带宽约为 $2\zeta\omega_n$ 。

当 $\zeta = 0$ 时, 两极点分别位于 $j\omega$ 轴上的 $\pm j\omega_n$ 处, 此时系统处于**无阻尼状态**。

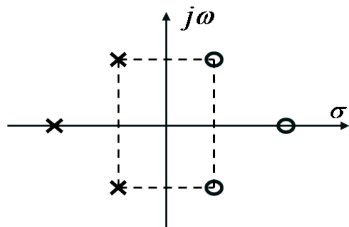
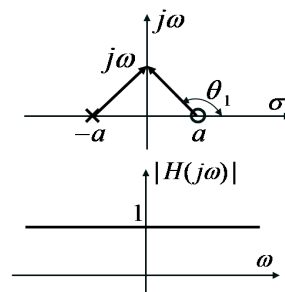
系统的相位特性也可以从零极点图得到。此时, 只需考察当动点沿 $j\omega$ 轴移动时所有极点矢量和所有零点矢量的幅角变化, 用所有零点矢量的幅角之和减去所有极点矢量的幅角之和, 即可得到系统的相位特性。



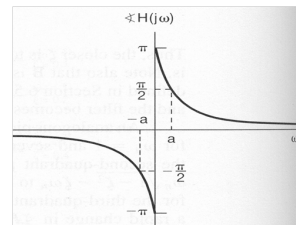
## 由零极点图表示全通系统

考察零极点对称分布的一阶系统 $H(s) = \frac{s-a}{s+a}$ 。该系统的 $|H(j\omega)|$ 在任何时候都等于1, 所以称为全通系统。

其相位特性 $\angle H(j\omega) = \theta_1 - (\pi - \theta_1) = 2\theta_1 - \pi$ 。全通系统的零极点分布呈四角对称特征。全通系统被广泛用于对系统进行相位均衡。



三阶全通系统

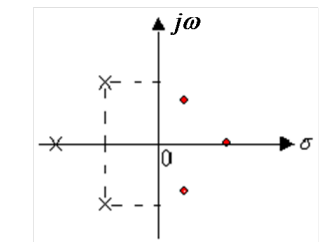
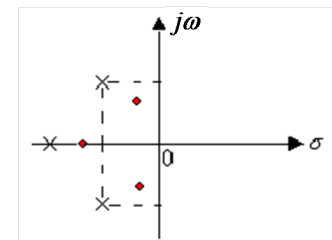


## 由零极点图表示最小相位系统

考察两个系统, 它们的极点相同, 零点分布关于 $j\omega$ 轴对称。其中一个系统的零点均在左半平面, 另一个系统的零点均在右半平面。

显然这两个系统的幅频特性是相同的。但零点在左半平面的系统其相位总小于零点在右半平面的系统。因此将零极点均位于左半平面的系统称为**最小相位系统**。

工程应用中设计的各种频率选择性滤波器, 如: Butterworth、Chebyshev、Cauer滤波器都是最小相位系统。



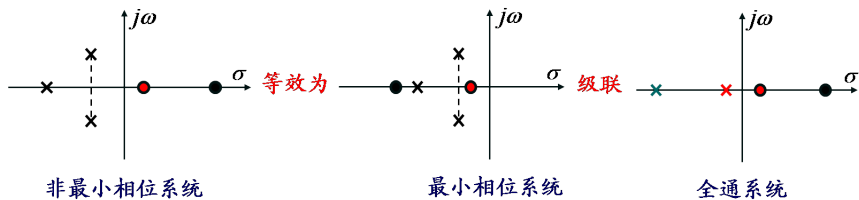




## 由零极点图表示最小相位系统

从本质上讲系统的特性是由系统的零、极点分布决定的。对系统进行优化设计，实质上就是优化其零、极点的位置。

当工程应用中要求实现一个非最小相位系统时，通常采用将一个最小相位系统和一个全通系统级联来实现。



## 拉普拉斯变换的性质—线性

### 1. 线性性质

$$\text{if } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \text{ ROC} = R_1; \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \text{ ROC} = R_2$$

$$\text{then } ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s), \quad \text{ROC 包含 } R_1 \cap R_2$$

如果两个ROC的交是空集，则表明信号线性组合的拉氏变换不存在。

当 $aX_1(s) + bX_2(s)$ 过程中发生零极点相抵消的情况时，收敛域就可能不仅仅是两个ROC的交，而有可能扩大。

例：已知

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0; \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad \Re\{s\} > 0$$

则 $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ 的拉氏变换为：

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+1)} = \frac{s}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$



## 拉普拉斯变换的性质—平移

### 2. 时域平移性质：

如果： $x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$

则： $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s), \text{ ROC} = R$

复频域乘以指数因子并不改变 $X(s)$ 的极点，故ROC不变。

### 3. 复频域平移性质：

如果： $x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$

则： $x(t)e^{s_0t} \leftrightarrow X(s-s_0)$

复频域乘以指数因子并不改变 $X(s)$ 的极点，故ROC不变。  
收敛域平移一个 $\Re\{s_0\}$

例：求矩形脉冲信号 $x(t) = u(t+T) - u(t-T)$ 的拉氏变换。

解：利用时域平移性质，有

$$u(t+T) \leftrightarrow \frac{1}{s}e^{Ts}, \quad \Re\{s\} > 0; \quad u(t-T) \leftrightarrow \frac{1}{s}e^{-Ts}, \quad \Re\{s\} > 0$$

$$\text{再由线性性质可得： } X(s) = \frac{1}{s}(e^{Ts} - e^{-Ts})$$

ROC为整个 $s$ 平面。（零极点相消，ROC扩大）



## 拉普拉斯变换的性质—时域尺度变换

### 4. 时域尺度变换性质

if  $x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$

$$\text{then } x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ ROC} : R_1 = aR$$

特例：反转变换 $x(-t) \leftrightarrow X(-s), \text{ ROC} = -R$

例：已知 $x(t) \leftrightarrow X(s), \text{ ROC} = R$ ，求信号 $x(at-b)$ 的拉氏变换。

方法1：先时域平移，得

$$x(t-b) \leftrightarrow X(s)e^{-bs}, \quad \text{ROC} = R$$

再尺度变换，得

方法2：先尺度变换，得

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROC} = aR$$

再时域平移，得

$$x(at-b) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}s}, \quad \text{ROC} = aR$$





## 拉普拉斯变换的性质—共轭

## 5. 共轭性质:

$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{则 } x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*), \quad \text{ROC} = R$$

当 $x(t)$ 为实信号时, 有:  $x^*(t) = x(t)$

$$\therefore X(s) = X^*(s^*) \text{ 或 } X^*(s) = X(s^*)$$

由此可得以下重要结论:

如果 $x(t)$ 是实信号, 且 $X(s)$ 在 $s_0$ 有极点(或零点), 则 $X(s)$ 一定在 $s_0^*$ 也有极点(或零点)。这表明: 实信号的拉氏变换其复数零、极点必共轭成对出现。



## 拉普拉斯变换的性质—卷积性质

## 6. 卷积性质:

$$\text{if } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \text{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \text{ROC} = R_2$$

$$\text{then } x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s), \quad \text{ROC 包含 } R_1 \cap R_2$$

卷积特性是LTI系统复频域分析的理论基础。

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{ROC} : R_1 = \sigma > -1$$

$$X_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad \text{ROC} : R_2 = \sigma > -2$$

$$\text{显然有: } R_1 \cap R_2 = \sigma > -1$$

$$X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2$$

**收敛域扩大。**原因是 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 相乘时, 发生了零极点相抵消的现象。当被抵消的极点恰好在ROC的边界上时, 就会使收敛域扩大。



## 拉普拉斯变换的性质—时域微分

## 7. 时域微分性质:

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{then } \frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow sX(s), \quad \text{ROC 包含 } R$$

当 $X(s)$ 在 $s=0$ 有一阶极点, 且该极点位于ROC边界上时, 由于 $s$ 的引入将消去该极点, 从而使ROC扩大。

## 8. s域微分性质:

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{then } -tx(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}X(s), \quad \text{ROC} = R$$

这一性质可由拉氏变换式两边同时对 $s$ 微分得到。



## 拉普拉斯变换的性质—复频域微分举例

例: 求下列 $X(s)$ 的 $x(t)$

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{ROC} : \sigma > -a$$

$$\therefore \frac{1}{(s+a)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\therefore x(t) = te^{-at}u(t)$$

例:  $x(t) = t^n u(t)$

$$tu(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}U(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0$$

重复使用复频域微分性质, 可得

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \Re\{s\} > 0$$





## 拉普拉斯变换的性质—时域积分

### 9. 时域积分性质:

$$\text{if } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$\text{then } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC 包含 } R \cap (\Re\{s\} > 0)$$

可由卷积性质来证明:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0$$

$$x(t) * u(t) \leftrightarrow X(s)U(s) = \frac{1}{s} X(s), \text{ROC 包含 } R \cap (\Re\{s\} > 0)$$

时域微分和积分性质表明信号在时域进行微分或积分, 相当于在复频域对它乘以或除以复变量  $s$ 。根据此性质可以将时域的微分或积分运算转变为复频域的代数运算。这在 LTI 系统分析中十分有用。



## 拉普拉斯变换的性质—初值定理

### 10. 初值定理:

若因果信号  $x(t)$  的拉氏变换为  $X(s)$ , 而且  $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$  存在, 则

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

证明: 将  $x(t)$  在  $t = 0^+$  处展开为泰勒级数  $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n x^{(n)}(0^+)$

两边进行拉氏变换, 考虑到因果性, 得

$$X(s) = \frac{1}{s} x(0^+) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{s^{n+1}} x^{(n)}(0^+)$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+) + \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{s^n} x^{(n)}(0^+)$$

所以  $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$



## 拉普拉斯变换的性质—终值定理

### 11. 终值定理:

若因果信号  $x(t)$  的拉氏变换为  $X(s)$ , 而且  $X(s)$  除了在  $s = 0$  可以有一阶极点外, 其余极点均在  $s$  平面的左半平面。则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

证明: 如果  $x(t)$  的终值存在, 利用  $x(t)$  的因果性, 有

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + \int_{0^-}^{+\infty} s x(t) e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-)$$

取  $s \rightarrow 0$ ,

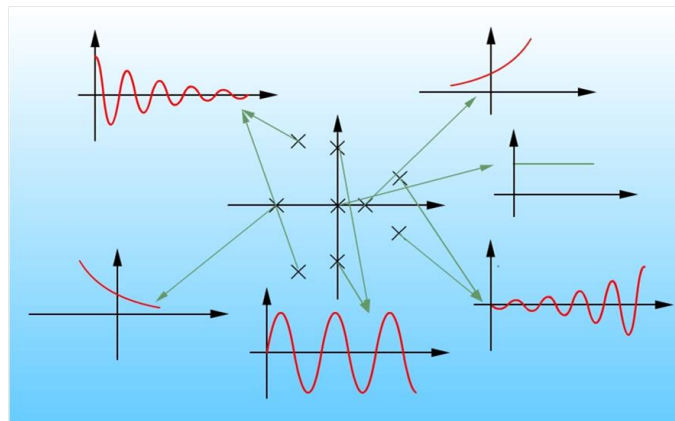
$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-)$$

上式左边积分得:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(0^-) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-)$



## 极点在 $s$ 平面的分布与终值的关系

应用终值定理求信号在时域中的终值时, 必须保证终值存在。这个条件就体现为在复频域中  $X(s)$  的极点都必须在  $s$  平面的左半平面, 原点处只能有一阶极点。





## 常用信号的拉普拉斯变换

$$x(t) = -u(-t)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0$$

$$X(s) = -U(-s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} < 0$$

尺度变换性质

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = -U(-s-a) = \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} < -a$$

复频域平移、尺度变换

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = U(s+a)$$

$$= \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} > -a$$

复频域平移性质



## 常用信号的拉普拉斯变换

偶信号  $x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$ , 由上页结果可得:

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}, -a < \Re\{s\} < a$$

奇信号  $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$ ,  $a > 0$ 

$$X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2s}{s^2 - a^2}, -a < \Re\{s\} < a$$

对拉氏变换有: 偶信号  $\leftrightarrow$  偶函数; 奇信号  $\leftrightarrow$  奇函数。

$$x(t) = [\cos(\omega_c t)] u(t)$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$$

$$X(s) = \frac{1/2}{s - j\omega_c} + \frac{1/2}{s + j\omega_c} = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2}, \Re\{s\} > 0$$

利用复频域  
平移性质和  
线性性质。

## 常用信号的拉普拉斯变换

$$x(t) = [e^{-at} \cos(\omega_c t)] u(t)$$

$$X(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_c^2}, \Re\{s\} > -a$$

在前一结果基础上再次利用复频域平移性质。

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} u(t)$$

反复应用频域微分性质:

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} > -a$$

$$te^{-at} u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\Re\{s\} > -a$$

$$\frac{t^2}{2} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^3}, \Re\{s\} > -a$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \Re\{s\} > -a$$

当  $a = 0$  时, 有

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^n}, \Re\{s\} > 0$$



## 系统函数的概念

以卷积特性为基础, 可以建立LTI系统的拉氏变换分析方法, 即

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

其中  $H(s)$  是  $h(t)$  的拉氏变换, 称为系统函数或转移函数、传递函数。如果  $Y(s)$  的ROC包括  $j\omega$  轴, 则  $X(s)$  和  $H(s)$  的ROC必定包括  $j\omega$  轴, 以  $j\omega$  代入, 即有

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

这就是LTI系统的傅里叶分析。  $H(j\omega)$  即是系统的频率响应。这些方法之所以成立的本质原因在于复指数函数是一切LTI系统的特征函数。当以  $e^{j\omega t}$  为基底分解信号时, LTI系统对输入信号的响应就是  $X(j\omega) \cdot H(j\omega)$ 。而以  $e^{st}$  为基底分解信号时, 系统的输出响应就是  $X(s) \cdot H(s)$ 。 $H(s)$  连同相应的ROC也能完全描述一个LTI系统。系统的许多重要特性在  $H(s)$  及其ROC中一定有具体的体现。



## 用系统函数表征LTI系统—因果性

如果 $t < 0$ 时 $h(t) = 0$ ，则称系统是**因果的**。如果 $t > 0$ 时 $h(t) = 0$ ，则称系统是**反因果的**。

因此，因果系统的 $h(t)$ 是右边信号，其 $H(s)$ 的ROC必在最右边极点的右边。由于反因果系统的 $h(t)$ 是左边信号， $H(s)$ 的ROC必在最左边极点的左边。

应该强调指出，由ROC的特征，反过来并不能判定系统是否因果。ROC在最右边极点的右边并不一定系统因果。

例如：

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \Leftrightarrow H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

就不是因果的。所以只有当 $H(s)$ 是有理函数时，逆命题才成立。



## 用系统函数表征LTI系统—示例

$$\text{例2: } H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

$H(s)$ 的ROC在最右边极点的右边，但 $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$ ，所以系统是非因果的。这是因为 $H(s)$ 是非有理函数。而对系统

$$H(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}, \Re\{s\} > -1$$

$H(s)$ 仍是非有理函数，ROC在最右边极点的右边，但由于 $h(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$ ，所以系统是因果的。

- ① 如果LTI系统的系统函数是有理函数，且全部极点位于 $s$ 平面的左半平面（ROC是包括 $j\omega$ 轴的右半平面），则系统是因果、稳定的。
- ② 如果LTI系统是稳定的，则系统函数的ROC必然包括 $j\omega$ 轴。
- ③ 如果LTI系统的系统函数是有理函数，且系统因果，则系统函数的ROC在最右边极点的右边。若系统反因果，则系统函数的ROC在最左边极点的左边。



## 用系统函数表征LTI系统—稳定性

如果系统稳定，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

因此 $H(j\omega)$ 必存在。意味着 $H(s)$ 的ROC必然包括 $j\omega$ 轴。

综合以上两点，可以得到：**因果稳定系统的 $H(s)$ ，其全部极点必须位于 $s$ 平面的左半边。**

**例1：**某系统的 $h(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$  显然该系统是因果的，确定系统的稳定性。

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \text{ROC: } \Re\{s\} > -1$$

显然，ROC在最右边极点的右边。因为ROC包括 $j\omega$ 轴，所以系统是稳定的。 $H(s)$ 的全部极点都在 $s$ 平面的左半边。



## 系统函数计算—由LCCDE描述的系统

1. 由线性常系数微分方程所描述的LTI系统：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

两边进行拉氏变换，有  $\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \Rightarrow \text{是一个关于 } s \text{ 的有理函数}$$

由方程导出的 $H(s)$ ，并没有对ROC加以约束，微分方程本身不是系统的完整描述。如果**同时指出系统的因果性或稳定性**，那就可以完全描述一个系统。







## 系统函数计算—由零极点图描述的系统

- 如果LCCDE具有一组全部为零的初始条件，或者说LCCDE描述的系统是因果的，则 $H(s)$ 的ROC必为最右边极点的右边；
- 如果已知LCCDE描述的系统是稳定的，则 $H(s)$ 的ROC必定包含 $j\omega$ 轴；

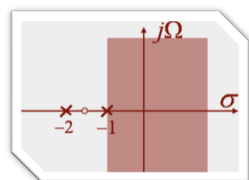
### 2. 由零极点图所描述的系统：

已知一个有理系统函数的零极点图和收敛域，可由零极点分布写出 $H(s)$ ，最多差一个常数因子。若 $H(0)$ 已知，则该常数可以确定。

例：某连续时间LTI因果系统的零极点图如图所示，由图可写出

$$H(s) = H_0 \frac{s + 3/2}{(s + 1)(s + 2)}$$

若已知 $H(0) = 1$ ，可得 $H_0 = 4/3$



## 系统函数计算—由方框图描述的系统

解：由图可以列出如下方程组：

$$\begin{aligned} Y(s) &= -3Y_1(s) + 2sY_1(s) + s^2Y_1(s) \\ s^2Y_1(s) &= X(s) - 5sY_1(s) - 6Y_1(s) \end{aligned}$$

消去 $Y_1(s)$ 解得系统函数为：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 5s + 6} \quad \Re\{s\} > -2$$

因果系统的ROC是最右边极点的右边。

对于由方框图描述的系统，通常总是分别对加法器的输出端列写方程。然后设法消去所设的中间变量，得到一个输入—输出方程，进而可得出系统函数。



## 系统函数计算—由方框图描述的系统

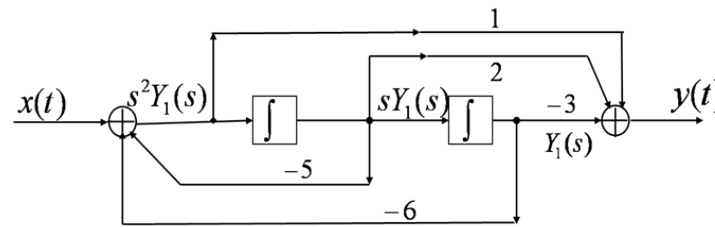
于是：

$$H(s) = \frac{\frac{4}{3}s + 2}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{\frac{2}{3}}{s + 1} + \frac{\frac{2}{3}}{s + 2} \quad \text{ROC} : \Re\{s\} > -1$$

### 3. 由方框图描述的系统：

方框图与常系数微分方程是可以互相转换的，也可以直接由方框图写出 $H(s)$ ，然后根据系统的因果、稳定性确定ROC。

例：已知图示系统是因果的，求系统函数。



## Butterworth滤波器

通常Butterworth滤波器的特性由频率响应的模平方函数给出。对 $N$ 阶Butterworth低通滤波器有：

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

由于 $|B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B^*(j\omega)$ 且Butterworth滤波器是实滤波器，所以

$$B^*(j\omega) = B(-j\omega)$$

将 $|B(j\omega)|^2$ 函数拓展到整个 $S$ 平面有：

$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2N}}$$

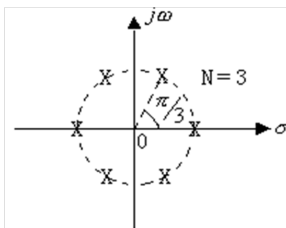
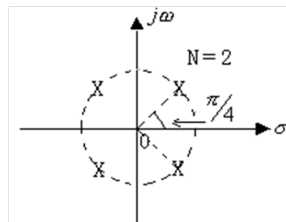
$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\omega_c) = |s_k| e^{j\angle s_k}$$



## Butterworth滤波器

极点分布的特征:

- $2N$ 个极点等间隔均匀分布在半径为 $\omega_c$ 的圆周上。
- $j\omega$ 轴上不会有极点。当 $N$ 为奇数时在实轴上有极点,  $N$ 为偶数时实轴上无极点。
- 相邻两极点之间的角度差为 $\pi/N$ 。
- 极点分布总是关于原点对称的。



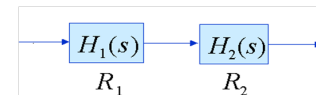
由于要实现的滤波器应该是因果稳定系统, 因此位于左半平面的 $N$ 个极点一定是属于 $B(s)$ 的。据此, 确定出 $B(s)$ 后, 也就可以综合出一个Butterworth滤波器。



## LTI系统互联的系统函数

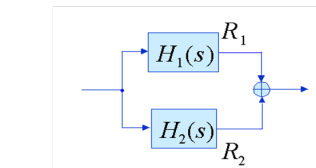
级联:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$



并联:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$

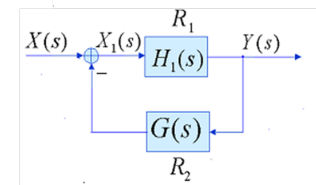


反馈联结:

$$X_1(s) = X(s) - G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)H_1(s)$$

$$= [X(s) - G(s)Y(s)]H_1(s)$$



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + G(s)H_1(s)} \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$



## LTI系统的级联型结构

LTI系统可以由LCCDE来描述。

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

对其进行拉氏变换有:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^N b_k s^k X(s)$$

$H(s)$ 是一个有理函数。

将 $H(s)$ 的分子和分母多项式因式分解

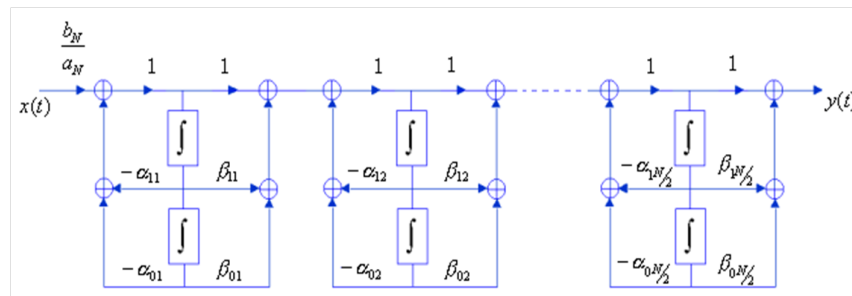
$$H(s) = \frac{b_N}{a_N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^P (s^2 + \beta_{1k}s + \beta_{0k})}{\prod_{k=1}^Q (s^2 + \alpha_{1k}s + \alpha_{0k})} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{N-2P} (s + \lambda_k)}{\prod_{k=1}^{N-2Q} (s + \gamma_k)}$$



## LTI系统的级联型结构

这表明: 一个 $N$ 阶的LTI系统可以分解为若干个二阶系统和一阶系统的级联。在 $N$ 为偶数时, 可以全部组合成二阶系统的级联形式。

$$H(s) = \frac{b_N}{a_N} \cdot \prod_{k=1}^{N/2} H_k(s) \quad \text{其中} \quad H_k(s) = \frac{s^2 + \beta_{1k}s + \beta_{0k}}{s^2 + \alpha_{1k}s + \alpha_{0k}}$$



如果 $N$ 为奇数, 则有一个一阶系统出现。





## LTI系统的并联型结构

将 $H(s)$ 展开为部分分式（假定 $H(s)$ 的分子阶数不高于分母阶数，所有极点都是单阶的），则有：

$$H(s) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s + \gamma_k}$$

将共轭成对的复数极点所对应的两项合并：

$$H(s) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^Q \frac{\beta_{1k}s + \beta_{0k}}{s^2 + \alpha_{1k}s + \alpha_{0k}} + \sum_{k=1}^{N-2Q} \frac{A_k}{s + \gamma_k}$$

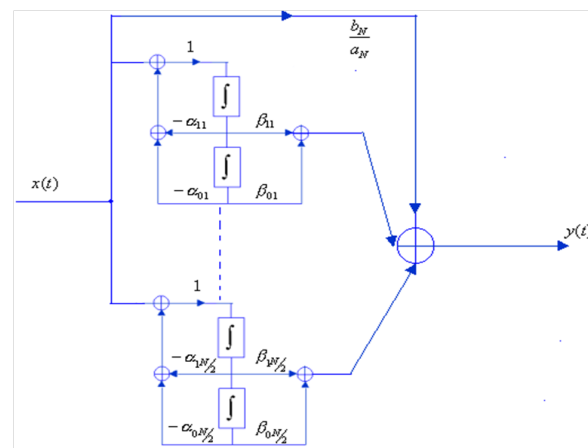
当 $N$ 为偶数时

$$H(s) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^{N/2} H_k(s)$$



## LTI系统的并联型结构

$N$ 为偶数时又可将任意两个一阶项合并为二阶项，由此可得出系统的并联结构：



## 单边拉普拉斯变换(The Unilateral Laplace Transform)

在涉及拉氏变换的大多数实际问题中，信号往往是有始信号，设起始时刻为时间坐标的原点。这样拉氏变换可写为：

$$\mathfrak{X}(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

上式即为信号的**单边拉氏变换**，其积分下限可以取 $0^+$ 或 $0^-$ ，当遇到在 $t = 0$ 处有冲激函数及其导数的情况时，取为 $0^-$ ，其它情况不必区分。

实际上信号 $x(t)$ 的单边拉氏变换就是信号 $x(t)u(t)$ 的双边拉氏变换，所以有：

$$x(t)u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \mathfrak{X}(s)e^{st} ds$$

单边拉氏变换与双边拉氏变换的区别仅在于积分下限。



## 单边拉普拉斯变换与双边拉普拉斯变换

- ① 单边拉氏变换是双边拉氏变换的特例，即：因果信号的双边拉氏变换。
- ② 若两个信号在 $t > 0$ 时相同，在 $t < 0$ 时不同，就会有相同的单边拉氏变换和不同的双边拉氏变换。
- ③ ROC: 由于单边拉氏变换就是因果信号的双边拉氏变换，所以ROC一定是 $s$ 平面中最右边极点的右边，可以不必特殊强调。

除了时域微分、时域积分和时延性质略有不同外，其它性质均与双边拉氏变换相同。其中时域微分和积分性质对分析具有非零初始条件的系统（即增量线性系统）是十分重要的。





## 单边拉普拉斯变换举例

例:  $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

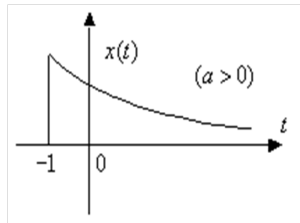
做双边拉氏变换:

$$X(s) = \frac{1}{s+a}e^s, \Re\{s\} > -a$$

做单边拉氏变换:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)}e^{-st}dt \\ &= e^{-a} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}e^{-a}, \Re\{s\} > -a\end{aligned}$$

$X(s)$ 与 $\mathfrak{X}(s)$ 不同, 是因为 $x(t)$ 在 $t < 0$ 的部分对 $X(s)$ 有作用, 而对 $\mathfrak{X}(s)$ 没有任何作用所致。



## 时域积分性质

if  $x(t) \leftrightarrow \mathfrak{X}(s)$

$$\text{then } \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}\mathfrak{X}(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t)dt$$

说明: 由于

$$\int_{0^-}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \right] e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau)d\tau \right] e^{-st}dt$$

因为上式中的 $\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$ 为常数, 右端第一项相当于阶跃函数的拉氏变换, 结果为 $\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t)dt$ , 第二项用分部积分法, 有

$$-\frac{1}{s}e^{-st} \int_{0^-}^t x(\tau)d\tau \Big|_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathfrak{X}(s)$$



## 时域微分性质

if  $x(t) \leftrightarrow \mathfrak{X}(s)$

$$\text{then } \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$$

说明: 由于

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$$

所以 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\mathfrak{X}(s) - x(0^-)$ 。同理可得:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &\leftrightarrow s^2\mathfrak{X}(s) - sx(0^-) - \frac{dx(0^-)}{dt} \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\leftrightarrow s^n \mathfrak{X}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} \frac{d^k x(0^-)}{dt^k}\end{aligned}$$



## 单边拉普拉斯变换分析增量线性系统

对于一个由线性常系数微分方程描述的系统:

- 当初始条件全部为零时, 系统是线性时不变的;
- 若初始条件不全为零, 则是一个增量线性系统。

我们前面讨论的时域分析法、频域分析法和复频域分析法, 都是针对线性系统进行的, 这些方法只能用来分析增量线性系统中的零状态响应。

单边拉普拉斯变换可以用来分析由初始条件引起的零输入响应, 适用于增量线性系统。





## 单边拉氏变换分析增量线性系统—举例

例：描述系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2} y(t) = x(t)$$

初始条件为  $y(0^-) = 0, y'(0^-) = 1$ ，系统的输入  $x(t) = u(t)$ ，求  $y(t)$ 。

解：方程两边同时做单边拉氏变换，有

$$s^2 \mathfrak{Y}(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + \frac{3}{2} s \mathfrak{Y}(s) - \frac{3}{2} y(0^-) + \frac{1}{2} \mathfrak{Y}(s) = \mathfrak{X}(s)$$

整理得：

$$\mathfrak{Y}(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + \frac{3}{2} y(0^-)}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}} + \frac{\mathfrak{X}(s)}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}$$

第一项仅与初始条件和系统特性有关，因此对应于**零输入响应**。第二项只与输入量和系统特性有关，因此对应于**零状态响应**。



## 本章小结

- 拉氏变换是傅氏变换的推广，在LTI系统分析中特别有用。它可以 将微分方程变为代数方程，这对分析系统互联、系统结构、用系统 函数表征系统、分析系统特性等都具有重要意义。
- ROC 是双边拉氏变换的重要概念。离开了收敛域ROC，信号与双 边拉氏变换的表达式将不再有一一对应的关系。
- 作为拉氏变换的几何表示，零极点图对分析系统的频率特性、零极 点分布与系统特性的关系具有重要意义。从本质上讲，系统的特性 完全是由系统函数的零极点分布决定的。
- 拉氏变换的许多性质对于在变换域分析LTI系统，具有重要作用。
- 作为双边拉氏变换的特例，单边拉氏变换特别适用于分析增量线性 系统。



## 单边拉氏变换分析增量线性系统—举例

代入初始条件和  $\mathfrak{X}(s) = 1/s$  后，有：

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}(s) &= \frac{1}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}} + \frac{1}{s(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2})} \\ &= \left( \frac{2}{s + \frac{1}{2}} - \frac{2}{s + 1} \right) + \left( \frac{2}{s} - \frac{4}{s + \frac{1}{2}} + \frac{2}{s + 1} \right) \end{aligned}$$

进行拉氏反变换，得：

$$y(t) = \left( 2e^{-\frac{1}{2}t} - 2e^{-t} \right) u(t) + \left( 2 - 4e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-t} \right) u(t)$$

对于电路描述的系统，可以根据电路的结构和激励，建立电路的微 分方程，然后用单边拉氏变换求解。



## 作业

CH9-1: 9.6, 9.8, 9.10, 9.21

CH9-2: 9.14, 9.23, 9.25, 9.27

CH9-3: 9.35, 9.40, 9.47, 9.50(a)(d)