§ 3.6 Hopfield人工神经网络用于线性规划

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

- 线性规划问题
- 线性规划网络的电路模型及其能量函数
- 线性规划网络求解二维线性规划
- 线性规划网络求解DFT变换

§ 3.6.1 线性规划问题

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

线性规划是运筹学的一个重要分支，它的主要研究内容是在一组线性约束条件下对线性的价值函数寻优。在众多科学领域，特别是管理、经济领域中，线性规划的应用都非常重要。

线性规划的一般数学描述如下:

$$\begin{cases} \max(\min) z = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_n v_n \\ d_{11} v_1 + d_{12} v_2 + \cdots d_{1n} v_n \le (=,\ge) b_1 \\ d_{21} v_1 + d_{22} v_2 + \cdots d_{2n} v_n \le (=,\ge) b_2 \\ \vdots \\ d_{m1} v_1 + d_{m2} v_2 + \cdots d_{mn} v_n \le (=,\ge) b_m \end{cases}$$

§ 3.6.1 线性规划问题

汽车，自行车

V_1 V_2

矩阵表示:

目标函数 $Min[AV]$ 或 $Max[AV]$

约束条件 $DV \geq B$ 或 $DV \leq B$

线性规划问题的一个简单实例是在最优利润条件下安排产品在一组设备上的加工。

车 铣 钻 磨

若 V_1、V_2 表示在规定期限内两种产品的产量，a_1、a_2 分别表示每生产一件 V_1 或 V_2 所得之利润，B_1、B_2、B_3、B_4，是4种设备上在规定期限的有效台时数，产品 V_1、V_2 在4种生产设备上加工所需时间分别为 D_{11}、D_{21}、D_{31}、D_{41} 和 D_{12}、D_{22}、D_{32}、D_{42}。为了在不超过所有设备能力的条件下得到最大利润，确定 V_1 和 V_2 的值。

§ 3.6.1 线性规划问题

我们可以建立此问题的数学模型，它的数学表达式如下：

目标函数 $Max[a_1V_1 + a_2V_2]$

约束条件

$$\begin{cases} D_{11}V_1 + D_{12}V_2 \leq B_1 \\ D_{21}V_1 + D_{22}V_2 \leq B_2 \\ D_{31}V_1 + D_{32}V_2 \leq B_3 \\ D_{41}V_1 + D_{42}V_2 \leq B_4 \end{cases}$$

取 $A_1 = -a_1, A_2 = -a_2$ ，上述的目标函数转化为：

$$Min[A_1V_1 + A_2V_2]$$

§ 3.6.2 线性规划网络的电路模型及其能量函数

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

20世纪80年代，美国物理学家Hopfield提出了反馈型人工神经网络的理论，同时给出了一种利用反馈神经网络求解线性规划的解决方案，被称为线性规划网络。

目标函数 $$Min[A_1V_1 + A_2V_2]$$

约束条件 $$\begin{cases} D_{11}V_1 + D_{12}V_2 \le B_1 \\ D_{21}V_1 + D_{22}V_2 \le B_2 \\ D_{31}V_1 + D_{32}V_2 \le B_3 \\ D_{41}V_1 + D_{42}V_2 \le B_4 \end{cases}$$

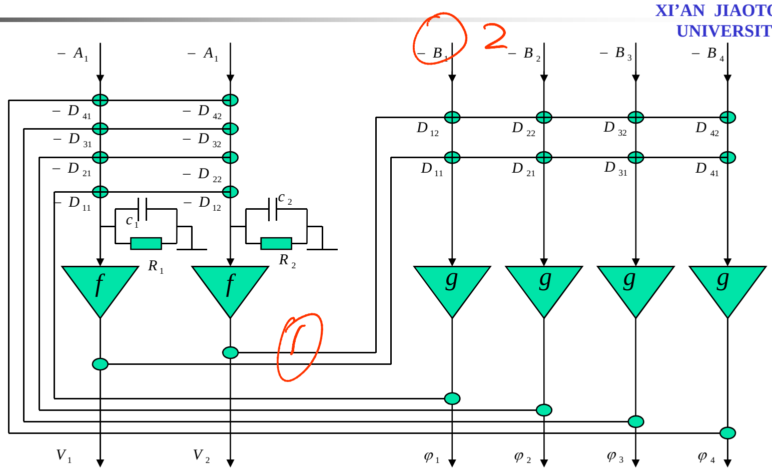
下面给出Tank与Hopfield利用人工神经网络求解上述线性规划的电路模型。

§ 3.6.2 线性规划网络的电路模型及其能量函数

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$Min[A_1V_1 + A_2V_2]$$

$$\begin{cases} D_{11}V_1 + D_{12}V_2 \le B_1 \\ D_{21}V_1 + D_{22}V_2 \le B_2 \\ D_{31}V_1 + D_{32}V_2 \le B_3 \\ D_{41}V_1 + D_{42}V_2 \le B_4 \end{cases}$$



左边变量放大器的输出电压与输入电压的关系为： $V_i = f(u_i)$

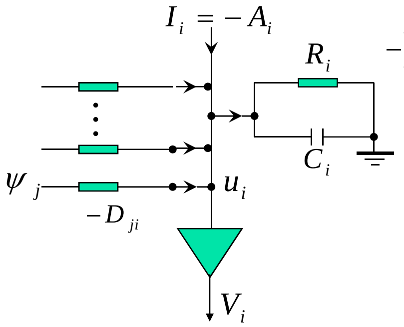
右边约束放大器的输出电压与输入电压的关系为： $\varphi_i = g(u_i)$

§ 3.6.2 线性规划网络的电路模型及其能量函数

由上图的结构可以得出右边约束放大器的输出与输入电流之间的关系式为:

$$\varphi_j = g\left(\sum_i D_{ji} V_i - B_j\right)$$

如果不考虑约束放大器的响应时间，在第 i 个变量放大器的输入节点按KCL应满足:



$$-\sum_j D_{ji}(\varphi_j - u_i) = A_i + c_i \frac{du_i}{dt} + \frac{u_i}{R_i}$$

$$c_i \frac{du_i}{dt} = -A_i - \frac{u_i}{R} - \sum_j D_{ji}\varphi_j$$

$$c_i \frac{du_i}{dt} = -A_i - \frac{u_i}{R} - \sum_j D_{ji} g\left(\sum_i D_{ji} V_i - B_j\right)$$

§ 3.6.2 线性规划网络的电路模型及其能量函数

电阻R为输入节电处各电阻的并联值: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_i} + \sum_j D_{ji}$

Tank与Hopfield给出了这种神经网络的能量函数:

$$E = \sum_k A_k V_k + \sum_j G\left(\sum_i D_{ji} V_i - B_j\right) + \sum_i \frac{1}{R} \int_0^{V_i} f^{-1}(V)\,dV$$

其中: $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$ 或 $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$

下面与Hopfield网络类似，推导此能量随着时间的演化关系。

$$E=\sum_k A_k V_k+\sum_j G(\sum_i D_{ji}V_i-B_j)+\sum_i \frac{1}{R}\int_0^{V_i} f^{-1}(V)dV$$

§ 3.6.2 线性规划网络的电路模型及其能量函数

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$\frac{dE}{dt}=\sum_i \frac{dV_i}{dt}\frac{dE}{dV_i}$$

$$c_i\frac{du_i}{dt}=-A_i-\frac{u_i}{R}-\sum_j D_{ji}g(\sum_i D_{ji}V_i-B_j)$$

$$\frac{dE}{dV_i}=A_i+\sum_j g(\sum_i D_{ji}V_i-B_j)D_{ji}+\frac{u_i}{R}$$

$$\frac{dE}{dV_i}=-c_i\frac{du_i}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt}=\sum_i \frac{dV_i}{dt}\frac{dE}{dV_i}=\sum_i \frac{dV_i}{dt}(-c_i\frac{du_i}{dt})=-\sum_i c_i\frac{dV_i}{du_i}(\frac{du_i}{dt})^2=-\sum_i c_i\frac{df(u_i)}{du_i}(\frac{du_i}{dt})^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{dE}{dt}\le 0\\ \dfrac{dV_i}{dt}=0\rightarrow\dfrac{dE}{dt}=0\end{cases}$$

以上结果说明，在状态空间中，网络总是朝能量函数 E 减小的方向运动，网络达到稳态时 E 取极小值。

§ 3.6.3 线性规划网络求解二维线性规划

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$Max(2V_1+3V_2)$$

$$\begin{cases}V_1+V_2\le 9\\ 2V_1+V_2\le 16\\ V_2\le 5\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\alpha x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2}{2} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$G(x)$ 及 $g(x)$ 函数的选取保证了当输入变量V违背了约束条件时，网络能量迅速上升，从而保证了演变结果对约束方程的满足。

§ 3.6.3 线性规划网络求解两维线性规划

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

变量放大器的输入输出的关系函数 我们就取简单线性函数:

$$f(x) = \beta x$$

考虑线性规划网络的标准能量函数，还缺少一项:

$$\sum_i \frac{1}{R}\int_0^{V_i} f^{-1}(V)dV = \sum_i \frac{1}{R}\int_0^{V_i} \frac{V_i}{\beta}dV = \sum_i \frac{V_i^2}{2R\beta}$$

β很大时，该项可以忽略。

$$E = \sum_{k=1}^{2} A_k V_k + \sum_{j=1}^{3} G\left(\sum_{i=1}^{2} D_{ji}V_i - B_j\right)$$

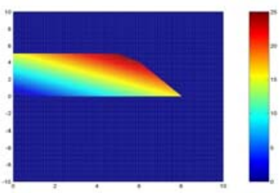
其中 $G(x)$ 是 $g(x)=\begin{cases}\beta x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ 的积分，有 $G(x)=\begin{cases}\frac{\beta}{2}x^2 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

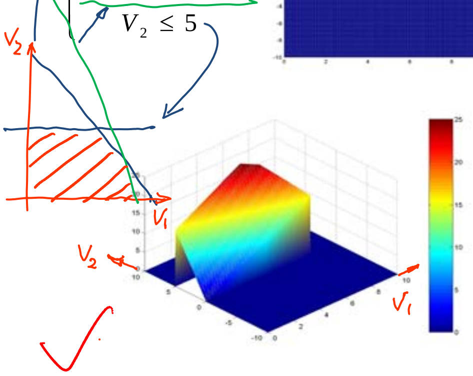
§ 3.6.3 线性规划网络求解两维线性规划

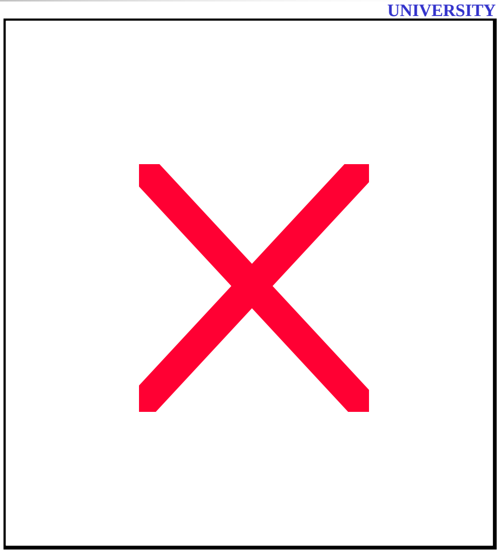
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$Max(2V_1 + 3V_2)$$

$$\begin{cases} V_1 + V_2 \le 9 \\ 2V_1 + V_2 \le 16 \\ V_2 \le 5 \end{cases}$$







§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

长度为 N 的有限长序列 $x(n)$，其离散傅里叶变换 $X(k)$ 仍然是一个长度为 N 的频域有限长序列

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j(2\pi/N)nk} \end{cases}$$

由于复数的存在，不能直接应用线性规划求解DFT，这里我们通过DHT（离散哈托莱变换）求解DFT。

设一组实数采样序列 $x(n), n = 0 \cdots N-1$，N点的DHT的正反变换为:

§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$\begin{cases} X_H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) cas(\frac{2\pi}{N} nk) \\ x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_H(k) cas(\frac{2\pi}{N} nk) \end{cases}$$

其中变换核函数 $cas(x) = \cos(x) + \sin(x)$

可以证明此核函数的两点性质:

(1) $cas(\frac{2\pi}{N} nk)$ 以N为周期

(2) $cas(\frac{2\pi}{N} nk) + cas(\frac{2\pi}{N}(N-n)k) = 2\cos(\frac{2\pi}{N} nk)$

$cas(\frac{2\pi}{N} nk) - cas(\frac{2\pi}{N}(N-n)k) = 2\sin(\frac{2\pi}{N} nk)$

§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

相同长度的DFT与DHT的关系:

$$X_F(k) = E_H(k) - jO_H(k)$$

其中: $E_H(k) = \frac{1}{2}[X_H(k) + X_H(N-k)]$ $\quad O_H(k) = \frac{1}{2}[X_H(k) - X_H(N-k)]$

因此，我们可以将求DFT转化为求DHT这个只有实数运算的变换。

$$\begin{aligned} X_F(k) &= \sum_0^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \\ &= \sum_0^{N-1} x(n)(\cos(\frac{2\pi}{N}kn) - j\sin(\frac{2\pi}{N}kn)) \\ &= \sum_0^{N-1} x(n)(\frac{1}{2}(cas(\frac{2\pi}{N}kn) + cas(\frac{2\pi}{N}(N-k)n))) - j\sum_0^{N-1} x(n)(\frac{1}{2}(cas(\frac{2\pi}{N}kn) - cas(\frac{2\pi}{N}(N-k)n))) \\ &= \frac{1}{2}(X_H(k) + X_H(N-k)) - j\frac{1}{2}(X_H(k) - X_H(N-k)) \end{aligned}$$

§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

DHT反变换: $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_H(k) cas(\frac{2\pi}{N}nk) = x(n)$ $\quad (n=0,1,2,\cdots N-1)$

写成矩阵形式如下: $DX_H = X$

$$D = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} cas(0) & cas(0) & cas(0) & cas(0) \\ cas(0) & cas(\frac{2\pi}{N}) & cas(\frac{2\pi}{N}2) & \cdots \\ cas(0) & cas(\frac{2\pi}{N}2) & cas(\frac{2\pi}{N}4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cas(0) & cas\left(\frac{2\pi}{N}(N-1)\right) & cas\left(\frac{2\pi}{N}(N-1)2\right) & \cdots \end{bmatrix}$$

结合线性规划网络的模型，可以将矩阵D作为线性规划约束网络的互连电导矩阵。

$$E = \sum_k A_k V_k + \sum_j G(\sum_i D_{ji} V_i - B_j) + \sum_i \frac{1}{R}\int_0^{V_i} f^{-1}(V)dV$$

§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

考虑线性规划网络的能量函数，取 $A_k = 0$，变量放大器函数 f 取为线性函数，$f(x) = \beta x$，约束放大器函数 g 也取为线性函数 $g(x) = \alpha x$

从而 $G(x) = \int g(x)dx = \frac{\alpha}{2}x^2$

$$E = \frac{\alpha}{2}\sum_j\left(\sum_i D_{ji}v_i - x_j\right)^2 + \sum_i \frac{1}{2\beta R}v_i^2$$

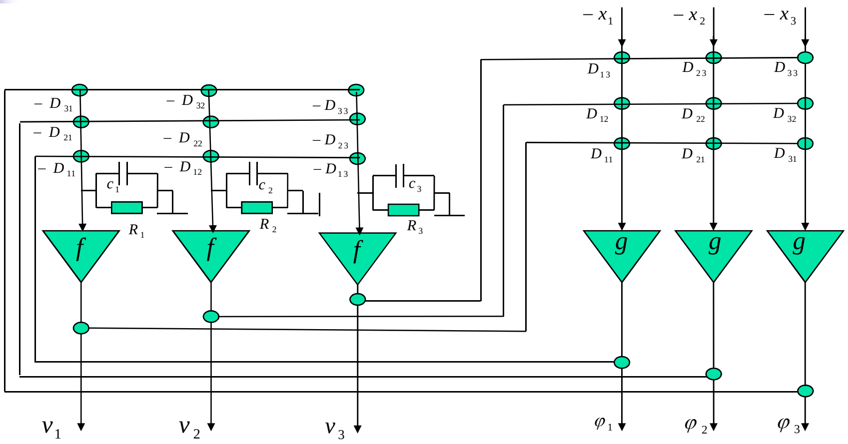
用矩阵表示： $E = \frac{\alpha}{2}\|Dv - x\|^2 + \frac{1}{2\beta R}\|v\|^2$

取较大的 $2\beta R$ 可以近似忽略第二项的影响。当网络动态平衡时，$x = Dv$，此时的输出电压 v 即为输入的DHT值。

简单，速度快，并行性，计算时间不依赖于序列长度，只和网络的时延特性RC有关。

§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



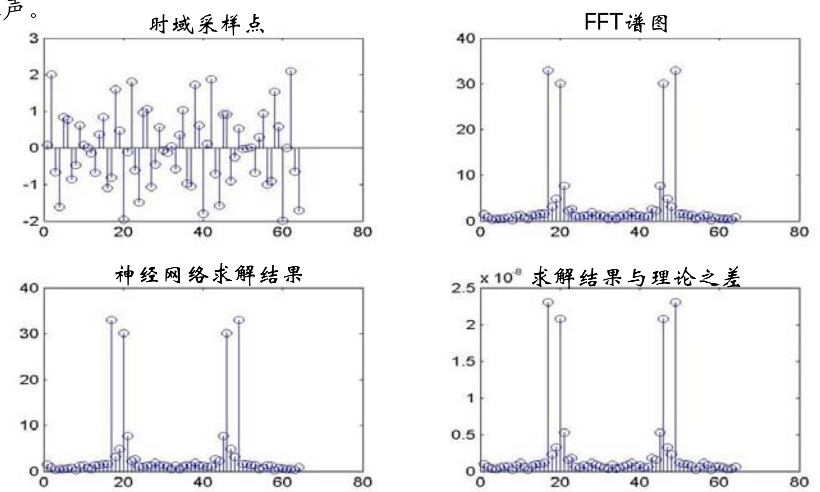
$f(x) = \beta x$ $g(x) = \alpha x$

§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + e(t)$$

$f_1 = 10Hz, f_2 = 12Hz$,采样频率 $f_s = 40Hz$,序列长度取64。噪声为方差0.1的高斯白噪声。



§ 3.6.4 线性规划网络求解DFT变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY