第三章　课后习题汇总

《第一次课后作业》

5 设 $x_1(t)$ 是一个连续时间周期信号，其基波频率为 ω_1，傅里叶系数为 a_k，已知

$$x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$$

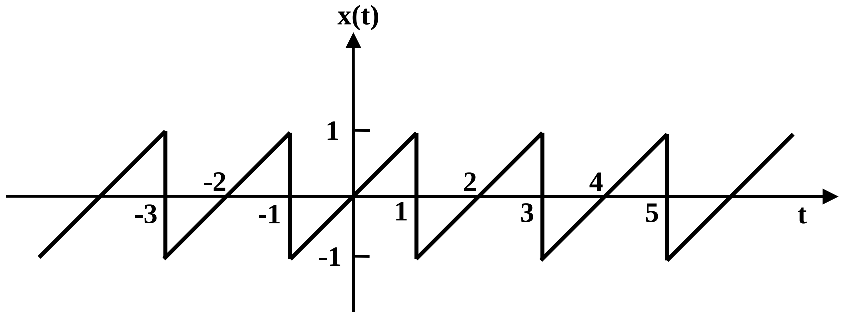
问 $x_2(t)$ 的基波频率 ω_2 与 ω_1 是什么关系？求 $x_2(t)$ 的傅里叶级数系数 b_k 与系数 a_k 之间的关系。（注：可参考书 P.146-表 3.1 中所列的连续时间傅里叶级数性质）

8 现对信号 $x(t)$ 给出如下信息：

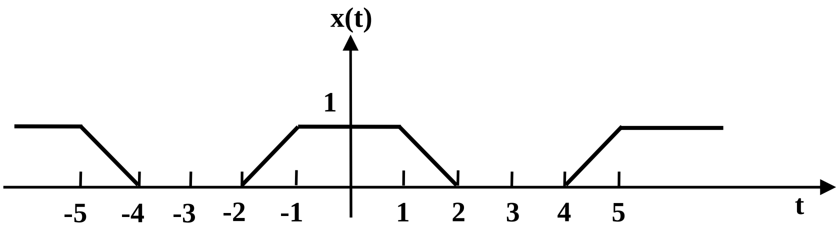
1. $x(t)$ 是实的且为奇函数。
2. $x(t)$ 是周期的，周期 $T=2$，傅里叶系数为 a_k。
3. 对 $|k|>1$，$a_k = 0$。
4. $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 \, dt = 1$。

试确定两个不同的信号都满足这些条件。

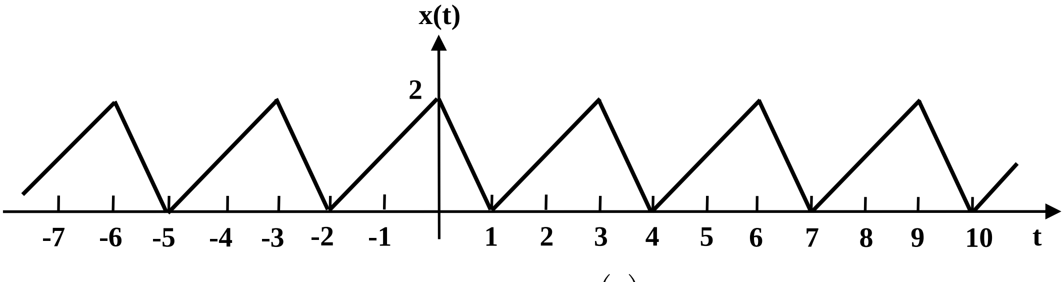
22 求下面各图所示信号的傅里叶级数表示：



(a)



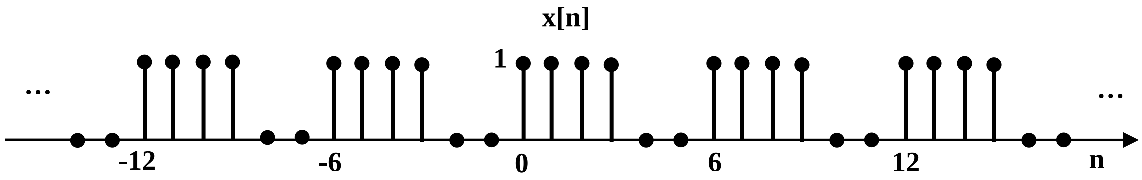
(b)



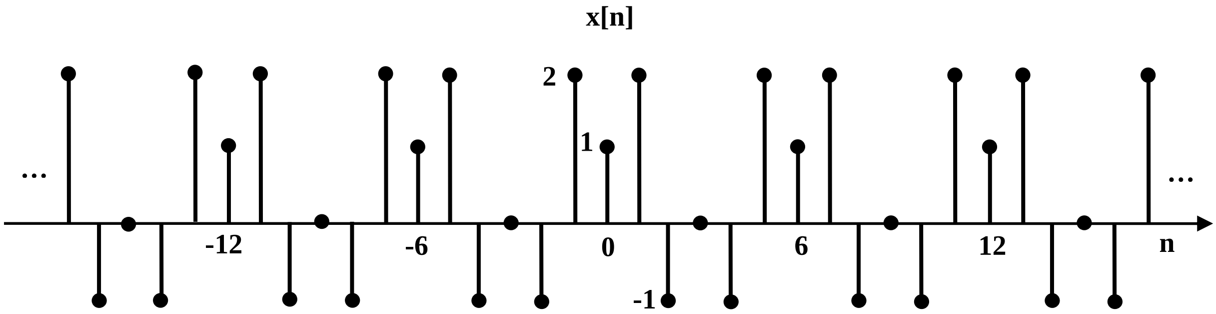
(c)

《第二次课后作业》

28 对下图所示的离散时间周期信号 $x[n]$ 求傅里叶级数系数，并画出每一组系数 a_k 的模和相位。



(b)



(c)

11 现对一信号 $x[n]$ 给出如下信息：

1. $x[n]$ 是实、偶信号。　　2. $x[n]$ 有周期 $N=10$ 和傅里叶系数 a_k。

3. $a_{11}=5$　　4. $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$

证明：$x[n]=A\cos(Bn+C)$，并给出 A，B 和 C 的值。

30 考虑下面三个基波周期为 6 的离散时间信号：

$$x[n]=1+\cos(\frac{2\pi}{6}n) \qquad y[n]=\sin(\frac{2\pi}{6}n+\frac{\pi}{4}) \qquad z[n]=x[n]y[n]$$

(a) 求 $x[n]$ 的傅里叶级数的系数。

(b) 求 $y[n]$ 的傅里叶级数的系数。

(c) 利用 (a) 和 (b) 的结果，并按照离散时间傅里叶级数的相乘性质，求 $z[n]=x[n]y[n]$ 的傅里叶级数系数。

(d) 经由直接求 $z[n]$ 的傅里叶级数系数，并将结果与 (c) 作比较。

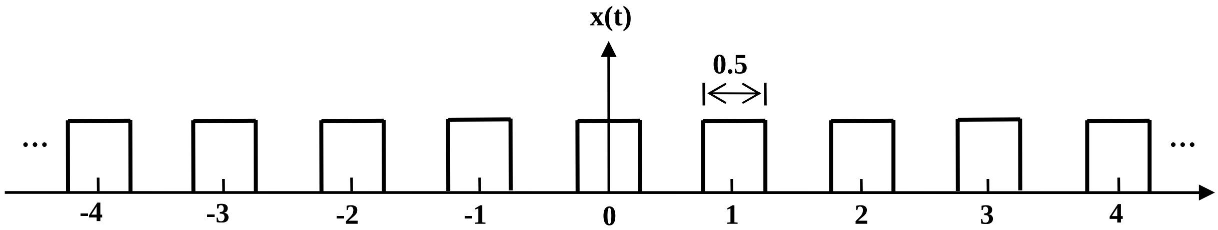
34 考虑一个连续时间 LTI 系统，其单位冲激响应为

$$h(t)=e^{-4|t|}$$

对下列各输入情况下，求输出 $y(t)$ 的傅里叶级数表示：

(b) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(t-n)$

（c） $x(t)$ 为下图所示的周期性方波



35 考虑一个连续时间 LTI 系统 S，其频率响应是

$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\ge 250\\ 0, & \text{其余}\,\omega\end{cases}$$

当输入到该系统的信号 $x(t)$ 是一个基波周期 $T=\pi/7$，傅里叶级数系数为 a_k 的信号时，

发现输出 $y(t)=x(t)$。问：对于什么样的 k 值，才有 $a_k=0$？

36 考虑一个因果离散时间 LTI 系统，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下面差分方程所关联：

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

在下面两种输入下，求输出 $y[n]$ 的傅立叶级数表示：

（a） $x[n]=\sin(\frac{3\pi}{4}n)$ （b） $x[n]=\cos(\frac{\pi}{4}n)+2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

《第三次课后作业》

43 （a） 一个周期为 T 的连续时间周期信号 $x(t)$，若在其傅里叶级数表示式

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

中，对全部非零的偶数 k，有 $a_k=0$，则称 $x(t)$ 是**奇谐**（odd-harmonic）的。

（i） 证明：若 $x(t)$ 是奇谐的，则有

$$x(t)=-x(t+\frac{T}{2})$$

（ii） 证明：若 $x(t)$ 满足上式，则它是奇谐的。

（b） 假设 $x(t)$ 是一个周期为 2 的奇谐周期信号，且有

$$x(t)=t,\ 0<t<1$$

画出 $x(t)$ 并求出它的傅里叶级数系数。

45 设 $x(t)$ 是一个实周期信号，其正弦-余弦形式的傅里叶级数表示为

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos k\omega_0 t-C_k\sin k\omega_0 t]$$

(a) 求 $x(t)$ 的偶部和奇部的指数形式的傅里叶级数表示；也就是利用上式的系数求下面两式中的 α_k 和 β_k，

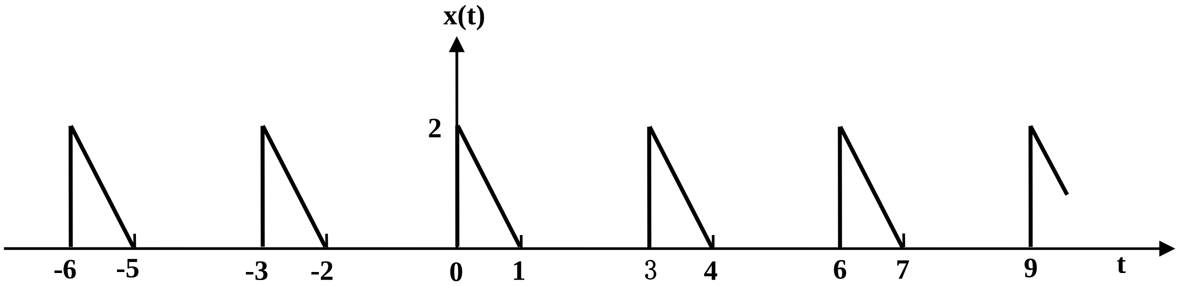
$$\mathcal{E}v\{x(t)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \qquad \mathcal{O}d\{x(t)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

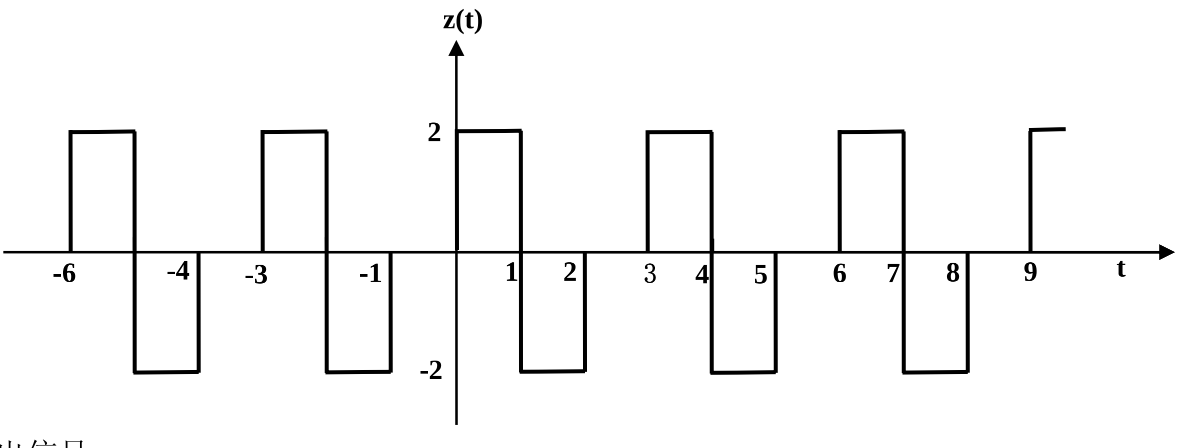
(b) 在(a)中 α_k 和 α_{-k} 之间是什么关系？β_k 和 β_{-k} 之间是什么关系？

(c) 假设信号 $x(t)$ 和 $z(t)$ 如下图所示，它的正弦-余弦形式的级数表示式为

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos(\frac{2\pi kt}{3})-C_k\sin(\frac{2\pi kt}{3})]$$

$$z(t)=d_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[E_k\cos(\frac{2\pi kt}{3})-F_k\sin(\frac{2\pi kt}{3})]$$





试画出信号

$$y(t)=4(a_0+d_0)+2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[B_k+\frac{1}{2}E_k\right]\cos(\frac{2\pi kt}{3})+F_k\sin(\frac{2\pi kt}{3})\right\}$$

48 令 $x[n]$ 是一个周期为 N 的周期序列，其傅里叶级数表示为

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n}$$

下列每个信号的傅里叶级数系数都能用上式中的 a_k 来表示，试导出如下信号的表示式：

（a） $x[n-n_0]$　　（b） $x[n]-x[n-1]$　　（c） $x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$（N 为偶数）

（d） $x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$（N 为偶数；注意该信号是周期的，周期为 $N/2$）

第四章　课后习题汇总

《第一次课后作业》

13 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为　　$X(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega-5)$

并令　　$h(t)=u(t)-u(t-2)$

（a） $x(t)$ 是周期的吗？

（b） $x(t)*h(t)$ 是周期的吗？

（c） 两个非周期信号的卷积有可能是周期的吗？

14 考虑一个信号 $x(t)$，其傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)$，假设给出下列条件：

1. $x(t)$ 是实值且非负的。
2. $\mathscr{F}^{-1}\left\{(1+\mathrm{j}\omega)X(\mathrm{j}\omega)\right\}=Ae^{-2t}u(t)$， A 与 t 无关。
3. $\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega=2\pi$

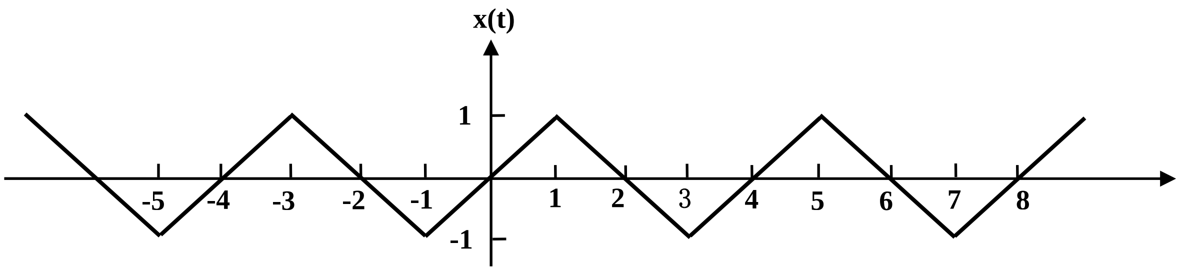
求 $x(t)$ 的闭式表达式。

24 （a） 下图所示的实信号中，如果有的话，哪些信号的傅里叶变换满足下列所有条件：

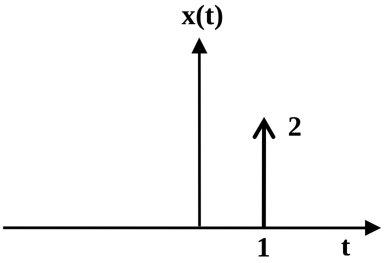
（1） $\mathcal{R}e\left\{X(\mathrm{j}\omega)\right\}=0$　　（2） $\mathcal{I}m\left\{X(\mathrm{j}\omega)\right\}=0$

（3） 存在一个实数 α，使 $e^{\mathrm{j}\alpha\omega}X(\mathrm{j}\omega)$ 为实函数

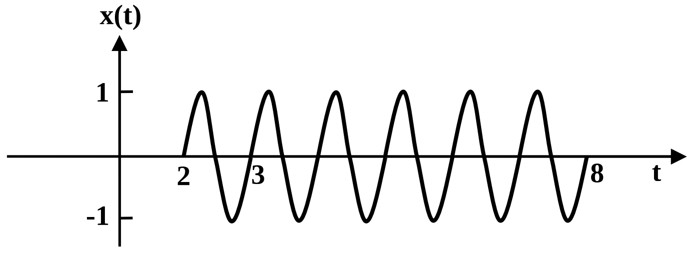
（4） $\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=0$　　（5） $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=0$　　（6） $X(\mathrm{j}\omega)$ 是周期的。



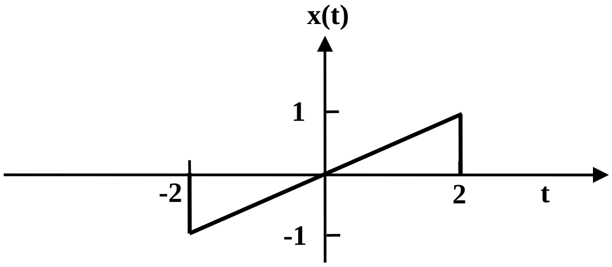
(a)



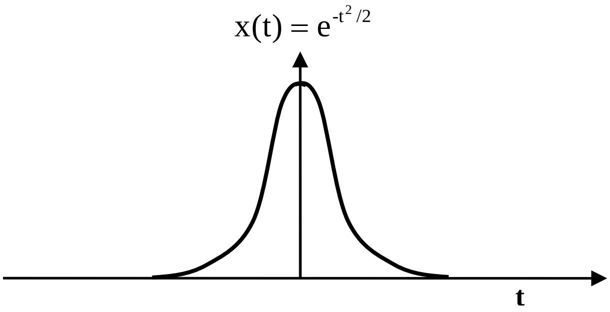
(b)



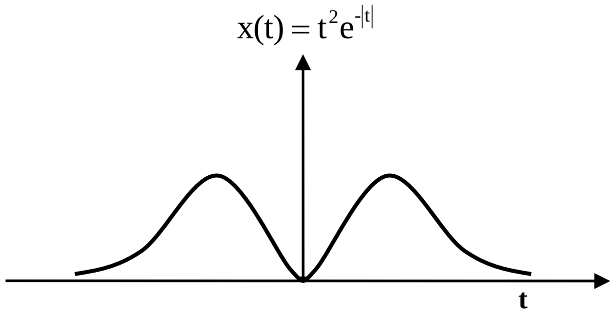
(c)



(d)



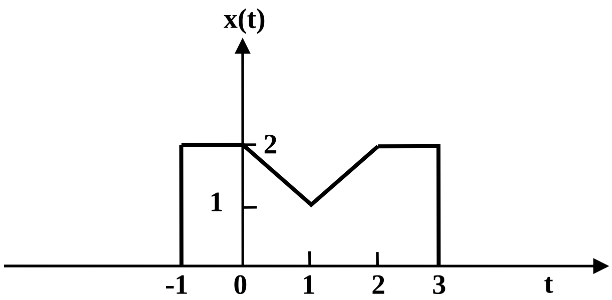
(e)



(f)

(b) 构造一个信号，它具有上述性质(1)，(4)和(5)，但没有其余性质。

25 设 $X(\mathrm{j}\omega)$ 为右下图所示信号 $x(t)$ 的傅里叶变换：



(a) 求 $\sphericalangle X(\mathrm{j}\omega)$

(b) 求 $X(\mathrm{j}0)$

(c) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$

(d) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{\mathrm{j}2\omega}\mathrm{d}\omega$

(e) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$

(f) 画出 $\mathcal{R}e\{X(\mathrm{j}\omega)\}$ 的反变换

注意：不必具体算出 $X(\mathrm{j}\omega)$ 就能完成以上全部计算。

27 考虑信号

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

和

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

式中 $T > 2$。令 a_k 记作 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数系数， $X(\mathrm{j}\omega)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换。

(a) 求 $X(\mathrm{j}\omega)$ 的闭式表达式。

（b） 求傅里叶级数 a_k 的表达式，并验证 $a_k = \frac{1}{T}X(\mathrm{j}\frac{2\pi k}{T})$

《第二次课后作业》

11 已知下列关系：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

和

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

并已知 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(\mathrm{j}\omega)$，$h(t)$ 的傅里叶变换是 $H(\mathrm{j}\omega)$，利用傅里叶变换性质证明

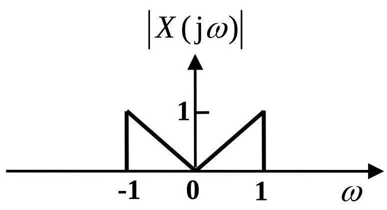
$g(t)$ 为 $$g(t) = Ay(Bt)$$

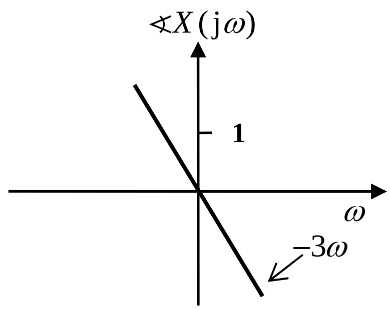
并求出 A 和 B 的值。

22 对下列每一个变换求对应的连续时间信号：

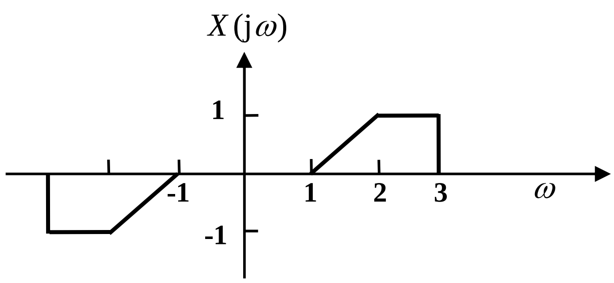
（a） $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{2\sin[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$

（c） $X(\mathrm{j}\omega)$ 的模和相位如下图所示





（e） $X(\mathrm{j}\omega)$ 如下图所示



31 （a） 证明下面三个不同单位冲激响应的 LTI 系统：

$$h_1(t) = u(t)$$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$

和

$$h_3(t)=2te^{-t}u(t)$$

对输入为 $x(t)=\cos t$ 的响应全都一样。

（b）求另一个 LTI 系统的单位冲激响应，它对 $\cos t$ 的响应也相同。

（这道题说明，对 $\cos t$ 的响应不能唯一用来标定一个 LTI 系统）

32 考虑一个 LTI 系统 S，其单位冲激响应为

$$h(t)=\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

求系统 S 对下面每个输入信号的输出：

（a） $x_1(t)=\cos(6t+\frac{\pi}{2})$　　（b） $x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin(3kt)$

（c） $x_3(t)=\frac{\sin(4(t+1))}{\pi(t+1)}$　　（d） $x_4(t)=\left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2$

《第三次课后作业》

10 （a）借助于表 4.1（P.233—傅里叶变换性质）和表 4.2（P.234—基本傅里叶变换对），求下列信号的傅里叶变换：

$$x(t)=t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

（b）借助帕斯瓦尔定理和上面结果，求

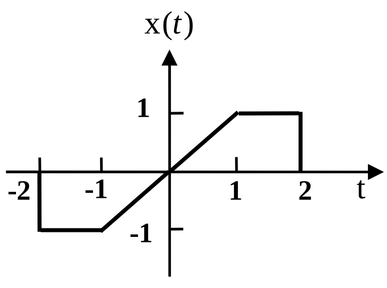
$$A=\int_{-\infty}^{\infty}t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 \mathrm{d}t$$

的值为多少？

21 求下列每一个信号的傅里叶变换：

（a） $[e^{-at}\cos\omega_0 t]u(t),\ a>0$　　（c） $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

（e） $[te^{-2t}\sin 4t]u(t)$　　（g） $x(t)$ 如下图所示



34 一个因果稳定的 LTI 系统S，有频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega+4}{6-\omega^2+5\mathrm{j}\omega}$$

（a）写出关联系统S输入和输出的微分方程。

（b）求该系统S的单位冲激响应$h(t)$。

（c）若输入$x(t)$为

$$x(t)=e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)$$

求系统的输出。

35 在本题中给出有关相位非线性变化产生的影响的几个例子。

（a）有一个连续时间 LTI 系统，其频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{a-\mathrm{j}\omega}{a+\mathrm{j}\omega}$$

式中$a>0$。问$H(\mathrm{j}\omega)$的模是什么？$\sphericalangle H(\mathrm{j}\omega)$是什么？该系统的单位冲激响应是什么？

（b）若在(a)中，$a=1$，当输入为

$$\cos(t/\sqrt{3})+\cos t+\cos\sqrt{3}t$$

求该系统输出，并大致画出输入和输出。

本章习题内容校对

1、题 27 中的$T>0$应为$T>2$。在本章的《第一次课后作业》中已做纠正。