# 变分法补充讲义

## （2004-02-17）

### 变分法的基本预备定理（基本引理）

如果函数*φ*(*x*)在线段(*x*0, *x*1)上连续，且对于只满足某些一般条件的任意选定的函数*η*(*x*)（例如，一阶或若干阶可微，在线段(*x*0, *x*1)的端点处为0，*η*(*x*)<*ε* 或|*η*(*x*)|<*ε* 和|*η’*(*x*)|<*ε* 等），有，则在线段。

证明：（反证法）

假定在线段*x*0 ≤ *x* ≤ *x*1上一点处，事实上，由*φ*(*x*)的连续性可知，*φ*(*x*)在点的一邻域内不变号。

如果取*η*(*x*)也在这个邻域内不变号且在邻域之外等于0，即如图所示：

0











*η*(*x*)

则 

因在上保持定号，在之外等于0。

则与定理假设相矛盾，所以必有。

而如图所示的可选取：



其中，*k*未常数，*n*正整数。则连续，且有直到2*n*-1 阶连续导数。

### （1.7）节补充

（1）泛函变分的定义

引理：泛函的变分 

**证明**：

定义泛函的变分为泛函增量的线性主部，即当泛函增量可以表示成：



其中，为关于的线性泛函，当。

我们将

这时，取函数的增量为，即增加一个因子。计算对于的导数在=0时的取值：

 （由于是对求导，=0，）



当时，，而，为有限小量。

∴后一项极限为0

∴ 

（2）泛函数极值的必要条件：

**定理**：若可微泛函在上达到极小（大）值，则在上有。

**证明**：

对于任意给定的来说，是实变量*α*的函数。由定理的假设可知，函数在*α*=0时达到极值，所以在*α*=0时，导数为0，即



由泛函变分的另一种定义，知左边等于泛函的变分，又由于是任意给定的，从而定理得证。

**又证明**：（从第一种定义证明）。

由泛函极值的定义，若在上达到极值，则存在的一个邻域，对于该邻域内的任一容许函数，泛函增量不变号。而当时，*ΔJ=*0。

又由泛函变分的定义，当变分存在时，泛函的变分与函数的变分之间具有线性关系。

显然，在这种情况下，若要求对任意的足够小的，相应的泛函增量（即泛函的变分）均不变号，则必须有=0。

### 导数的表示

一．对数量变量的导数

*n*维函数向量 的导数为 

*n× m*维矩阵函数



的导数为



二．对向量变量的导数

函数是以向量为自变量的数量函数，*x*为*n*维列向量。

 即或

函数，其中。它是以*n*维向量为自变量的*m*维函数向量，

，称为*Jacobi*矩阵。

（另一种形式为）

函数是*n*维向量变量*x*的*m× l*维函数矩阵



则

 或 

三．对矩阵变量的导数

对*n× m*矩阵变量X的数量函数，其中



对*n× m*矩阵变量X的*l*维函数向量

，

其中， 

对*n× m*矩阵变量X的*l× p*维函数矩阵，



其中



定义运算子矩阵



则



其中，⊗表示积， 