1.线性系统的齐次性和叠加性定理

在一个系统中，假设输入 $x(t)$ 对应的响应为 $y(t)$，那么齐次性，叠加性可以表示如下：

齐次性：对任意比例系数 c（c 可以是复数），若对输入 $c \cdot x(t)$ 的响应为 $c \cdot y(t)$，则称系统具有齐次性。

可加性：对几个输入信号共同作用于系统时，总的响应等于每个输入单独作用时产生的响应之和

叠加性：可加性和齐次性可统一为叠加性。

当总输入为 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ 时，系统响应为 $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$，则称系统具有叠加性。

其中：c_1和c_2为任意常数。

2.基本电路知识

1）R L C 的电阻、电抗、阻抗、电导、电纳、导纳

$$\text{电阻：}R=\frac{G}{G^2+B^2}\text{，电抗：}X=\frac{B}{G^2+B^2}$$

$$\text{电导：}G=\frac{R}{R^2+X^2}\text{，电纳：}B=\frac{X}{R^2+X^2}$$

$$\text{阻抗：}Z=\frac{1}{Y}=R+jX\text{，其中}|Z|=\sqrt{R^2+X^2}$$

$$\text{导纳：}Y=\frac{1}{Z}=G+jB,\text{其中}|Y|=\sqrt{G^2+B^2}$$

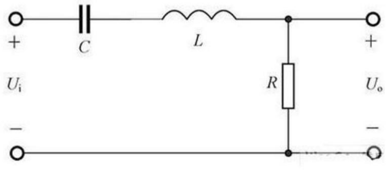
2）R L C 的复阻抗

在关联参考方向下，一端口（二端）线性无源网络的端电压相量和电流相量的比值定义为该网络的复阻抗 Z，即有：

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U}{I}\angle(\phi_u-\phi_i)=|Z|\angle\varphi_Z$$

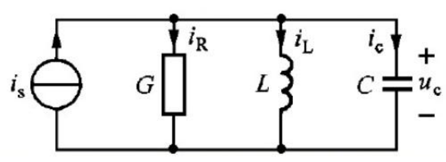
3）常见 RLC 电路及其基本方程

RLC 串联电路：



$$LC\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+RC\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)=u_i(t)$$

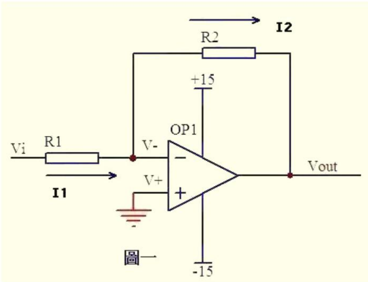
RLC 并联电路：



$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}+i_{\mathrm{L}}=i_{\mathrm{S}}(t)$$

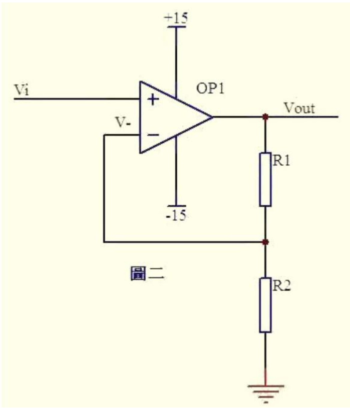
4）常见运放与 RLC 构成的放大、积分、微分电路分析

反相放大器：



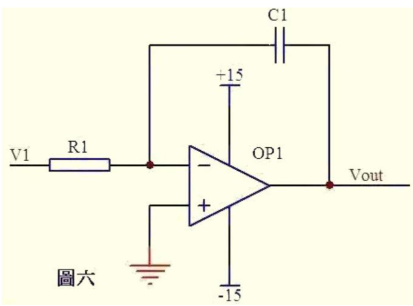
$$U_o=-\frac{R_2}{R_1}U_i$$

同相放大器：



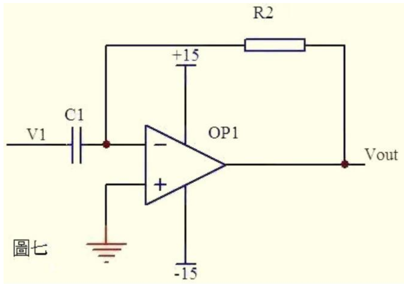
$$U_o=\frac{R_1+R_2}{R_2}U_i$$

积分电路：



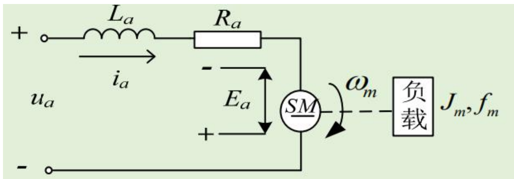
$$U_o=-\frac{1}{R_1C_1}\int U_i\mathrm{d}t$$

微分电路：



$$U_o = -R_2 C_1 \frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}t}$$

3. 电动机的基本知识



1）电枢回路的方程

$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a$$

2）电枢反电势

$$E_a = C_e n \phi$$

式中 $C_e = \dfrac{pN}{60a}$ 为常量，当转速 n 的单位为 r/min，每极磁通 ϕ 的单位为 Wb 时，E_a 的单位为 V。

3）转动惯量概念、转矩平衡方程

转动惯量 J 是刚体绕轴转动时惯性（回转物体保持其匀速圆周运动或静止的特性）的量度，大小等于刚体的各质元的质量与该质元到转轴垂直距离平方的乘积之和，即：

$$J = \sum_{k=1}^{n}(\Delta m_k r_k^2) = \int_V r^2 \mathrm{d}m \quad J = \sum_{k=1}^{n}(\Delta m_k r_k^2) = \int_V r^2 \mathrm{d}m$$

电动机转矩平衡方程：

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = M_m(t) - M_c(t) - f_m \omega_m(t)$$

4.拉氏变换

1）拉氏变换的基本概念

定义：

设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义，而且积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$（$s$是一个复参量）在复平面 s 的某一区域收敛，由此积分所确定的函数记为

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\,,$$

则称 $F(s)$为$f(t)$的Laplace变换

Laplace 变换存在定理：

若函数 $f(t)$ 满足以下条件：

1°在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上连续或分段连续；

2°当 $t \to +\infty$ 时，$f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数，亦即存在常数 $M > 0$ 及 $c \geq 0$，使得

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, 0 \leq t < +\infty$$

成立（满足此条件的函数，称它的增大时不超过指数级的，c 为它的增长指数），则 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s) > c$ 上一定存在，右端的积分在 $\mathrm{Re}(s) \geq c_1 > c$ 上绝对收敛而且一致收敛。

2）拉氏变换的微分定理

若 $\mathrm{L}[f(t)] = F(s)$，则有 $\mathrm{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

推论：

若 $\mathrm{L}[f(t)] = F(s)$，则有 $\mathrm{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

进一步有：$\mathrm{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)(\mathrm{Re}(s) > c)$

特别地，当初值 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 时，有：

$$\mathrm{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s)$$

3）常用函数的拉氏变换表

序号	拉氏变换 E(s)	时间函数 e(t)	Z 变换 E(z)
1	1	δ（t）	1
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}(\frac{z}{z-e^{-aT}})$

7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
15	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$

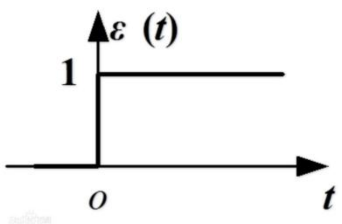
5.常用信号函数

1）脉冲信号

满足以下特征的称为单位脉冲信号：

$$\begin{cases}\delta(t)=0(t\neq 0)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1\end{cases}$$

2）阶跃信号



单位阶跃信号：$\varepsilon(t)=\begin{cases}1,(t>0)\\ 0,(t<0)\end{cases}$，

它在 t=0 处的值无定义，但为有限值，$\varepsilon(0_-)=0$，$\varepsilon(0_+)=1$

6.泰勒级数展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,x\in(x_0-R,x_0+R)$$

7.部分分式展开法

已知连续信号的拉氏变换，将其展开成部分分式之和：

$$E(s)=E_1(s)+E_2(s)+\cdots+E_n(s)$$

每一个部分分式，都是 z 变换表中对应的标准函数，其 z 变换即可查表得出：

$$E(z)=E_1(z)+E_2(z)+\cdots+E_n(z)$$

8.拉氏变换的终值定理

若 L[$f(t)$]= $F(s)$，且 $sF(s)$ 的所有奇点全在 s 平面的左半部，则

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to 0} sF(s)\\ \text{或：} f(+\infty)=\lim\limits_{t\to 0} sF(s)\end{array}\right\}$$

9.长除法

若$E(z)$是一个有理分式，则可以通过长除法得到一个无穷项幂级数的展开式，则根据z^{-n}的系数便可得出时间序列$e(nT)$的值。

长除法

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

$$E(z)=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$$

10.分式函数的求导：

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)'=\frac{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}{g^2(t)}$$

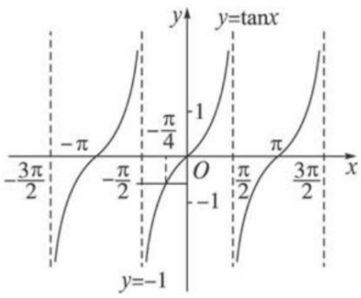
11.复数与复指数

欧拉公式： $e^{j\omega}=\cos\omega+j\sin\omega$

12.指数函数、对数函数、tan 函数，arctan 函数

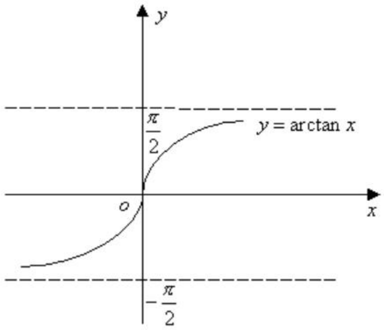
指数函数：一般地， $y=a^x$ 函数(a 为常数且以 a>0，a≠1)叫做指数函数

对数函数：一般地，函数 $y=\log_a x$ （a>0，且 a≠1）叫做对数函数



tan 函数：y=tanx

arctan 函数：正切函数 y=tanx 在开区间（x∈(-π/2,π/2)）的反函数，记作 y=arctanx 或 $y=\tan^{-1}x$，叫做反正切函数。



13. 复变函数的映射定理（幅角定理）

设 C 是一条分段光滑的正向简单闭曲线，若 $f(z)$ 在 C 的内部除有限多个极点外处处解析，在 C 上解析且不为零，则 $f(z)$ 在 C 内部的零点个数与极点个数之差，等于当 z 沿 C 的正向绕行一周后的 $f(z)$ 的幅角的改变量 $\Delta c^{+}\mathrm{Arg}f(z)$ 除以 2π .

14. 行列式的概念，计算，尤其是二阶行列式。

行列式是一个函数，由排成正方形的一组数(称为元素)，按照一定的规则得到的标量代数和，称为 n 阶行列式，记作 det(A)或 |A|

计算方法：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

二阶行列式计算方法：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

15. z 变换的实数位移定理

$$Z\left[r(t-kT)\right] = z^{-k}R(z)$$

$$Z\left[r(t+kT)\right] = z^{k}[R(z) - \sum_{n=0}^{k-1} r(nT)z^{-n}]$$

$$Z\left[r(t+2T)\right] = z^{2}R(z) - z^{2}r(0) - zr(T)$$

16.矩阵求逆，伴随矩阵。尤其是二阶矩阵。

逆矩阵：设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得：$AB = BA = I$，则称 A 是可逆的，并且方阵 A、方阵 B 互为逆矩阵。

伴随矩阵：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为$n(n\geq 2)$阶方阵，矩阵A的对应的行列式中，元素a_{ij}的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$，则称以 A_{ij}为(i,j)元素的n阶方阵 为 A 的伴随矩阵，记为 A^*，即

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

可逆矩阵计算：$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

17.矩阵的行列式计算，尤其是 2*2 矩阵的行列式。

只有方阵才有行列式，计算方法同 14

18.矩阵乘法

1）数乘矩阵：$k\mathbf{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$，$k$乘上矩阵中的每一个元素

2）矩阵相乘：设矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times s},\mathbf{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,规定$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的乘积为矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,

记为$\mathbf{AB}=\mathbf{C}$，其中：$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n.$

19.约当阵、单位阵、非奇异线性变换矩阵

约当阵：形如

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix} \mathrm{J}_1 & & & \\ & \mathrm{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{J}_s \end{bmatrix},$$

其中：
$$\mathrm{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

J 叫做约当形矩阵，J_i 为约当块。

单位阵：单位矩阵是个方阵，从左上角到右下角的对角线（称为主对角线）上的元素均为 1，除此以外全都为 0。根据单位矩阵的特点，任何矩阵与单位矩阵相乘都等于本身。

非奇异矩阵即为可逆矩阵，非奇异线性变换即可逆线性变换，定义：设σ 是线性空间 V 的一个线性变换，如果存在 V 的另一个变换τ，使得：$\sigma\tau=\tau\sigma=I_V$，则称σ为可逆线性变

换的，并称τ为σ的逆，记作σ^{-1}。

20.标量微分方程的解与指数函数的关系

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t)\\ x(t)|_{t=0}=x(0)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}dt=\int adt\Rightarrow\ln x(t)=at+c\Rightarrow\ln x(0)=c$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{at+c}=e^{at}x(0)$$

21. 向量微分方程的解

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})=a\mathbf{x}(\mathbf{t})\\ \mathbf{x}(\mathbf{t})|_{t=0}=\mathbf{x}(\mathbf{0})=\mathbf{b_0}\end{cases}，\ \mathbf{x}(\mathbf{t})=\mathbf{b_0}+\mathbf{b_1}\mathbf{t}+\mathbf{b_2}\mathbf{t}^2+\cdots+\mathbf{b_k}\mathbf{t^k}+\cdots$$

其中$\mathbf{x}(\mathbf{t})$，$\mathbf{b_0}$，$\mathbf{b_1}$，$\mathbf{b_k}$都是n维向量

$$\Rightarrow\mathbf{x}(\mathbf{t})=(I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots)\mathbf{x}(0)$$

$$\because e^{At}=I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

$$\therefore\mathbf{x}(t)=e^{At}\mathbf{x}(0)$$