西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

1 上节课要点复习

- 自动控制系统的基本组成（术语）
- 自动控制系统的基本控制方式：开环/闭环
- 自动控制系统的基本类型

　　按给定量的变化规律:恒值控制系统/随动控制系统/程序控制系统;

　　按输入输出量是否连续:连续控制系统/离散控制系统/采样控制系统;

　　按输入输出量的数目:单输入单输出控制系统/多输入多输出控制系统;

　　按输入输出特性:线性控制系统/非线性控制系统;

- 对控制系统的基本要求（稳、准、好）

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

线性系统的数学模型 02

- □ 线性系统的输入-输出函数描述
- □ 建立机电系统数学模型的机理分析法
- □ 传递函数的定义与物理意义
- □ 典型环节的数学模型
- □ 结构图及化简方法
- □ 信号流图与梅逊公式应用
- □ 非线性数学模型的小范围线性化

2 线性系统的数学模型

- **物理模型**——任何元件或系统实际上都是很复杂的，难以对它作出精确、全面的描述，必须进行简化或理想化。简化后的元件或系统称为该元件或系统的物理模型。简化是有条件的，要根据问题的性质和求解的精确要求来确定出合理的物理模型。

- **数学模型**——物理模型的数学描述。是指描述系统输入、输出以及内部各变量之间动态关系的数学表达式。

- **数学建模**——从实际系统抽象出系统数学模型的过程。

2.1 引言

- 在控制系统的分析和设计中，首先要建立系统的数学模型。——进行分析和设计的依据
- **控制系统的数学模型：**描述系统内部物理量（或变量）之间关系的数学表达式（方程）。
- **静态数学模型：**在静态条件下（即变量各阶导数为零），描述变量之间关系的代数方程。
- **动态数学模型：**描述变量各阶导数之间关系的微分方程。
- 建立系统的数学模型是分析和设计控制系统的首要工作。

物理系统分析 →建模→化简→控制系统分析设计

建立控制系统的数学模型的方法（建模）：

分析法（机理法）

实验法（测试法）

- **分析法：** 对系统各部分的运动机理进行分析，根据他们所依据的主要物理或化学规律分别列写相应的运动方程。
- **实验法：** 给系统施加某种测试信号，记录其输出响应，并用适当的数学模型去逼近--系统辨识--已发展为独立学科分支。
- **本课程仅研究用分析法建立系统数学模型的方法**

数学模型的形式

☐ 按建模方式分类：

输入—输出模型

状态空间模型（输入—状态—输出）

☐ 按域（范畴）分类：

时域模型：微分方程、差分方程和状态方程

复域模型：传递函数

频域模型：频率特性

图形化模型：结构图、信号流图等

控制系统模型的相似性---前提

物理系统千差万别，各自具有不同的物理运行规律。但为其建立的数学模型，若去除参数的物理背景后却具有高度一致性。

不仅数学模型形式一致，其在相同输入信号下的响应—数学模型的解的规律—也是一致的。（相似性）

仅在建立系统数学模型时，需要了解控制系统的具体物理背景，其他环节，可充分利用相似性，以抽象数学模型为研究对象，这是自动控制理论课程能够研究自动控制共同规律的前提。自动控制理论的建立和学习的必要性。

2.2 典型环节的微分方程

分析法（机理法）

目的：建立输入--输出关系（模型）已知…, 求…

步骤：

① 环节划分；

② 列各环节方程（必要时引入中间变量）；

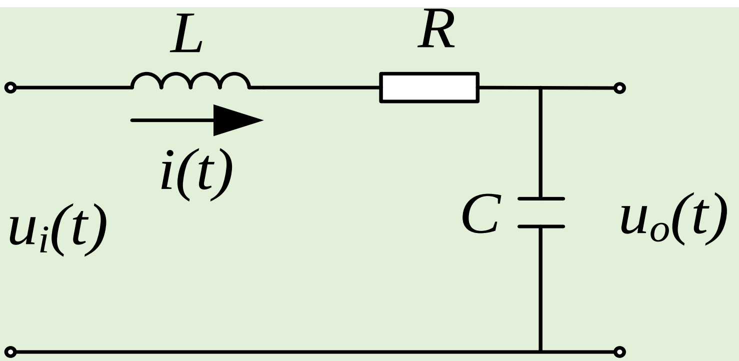
③ 消去中间变量；

④ 整理，得到微分方程；

⑤ 方程写法（规范）。

2.2 典型环节的微分方程

例2.1 列写图所示RLC无源网络的微分方程，以$u_i(t)$为输入，$u_o(t)$为输出.



①根据基尔霍夫电压定律可得

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+u_o(t)=u_i(t)$$

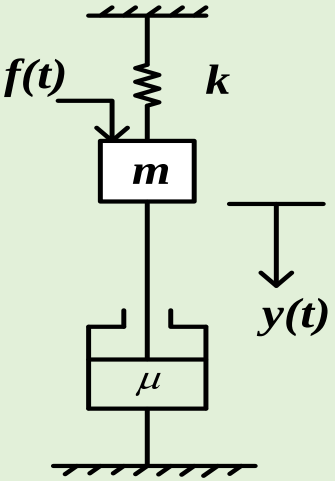
②消去中间变量i(t) $i(t)=C\dfrac{du_o(t)}{dt}$ $\dfrac{di(t)}{dt}=C\dfrac{d^2u_o(t)}{dt^2}$

③整理得到描述输入输出关系的微分方程为

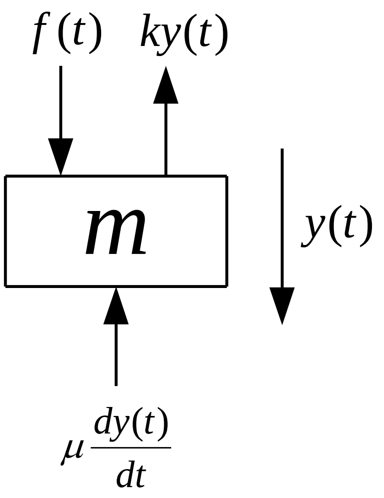
$$LC\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+RC\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)=u_i(t)$$

2.2 典型环节的微分方程

例2.2 含有弹簧、运动部件、阻尼器的机械位移装置. k是弹簧系数、m是物体质量，μ 是阻尼器阻尼系数（粘性摩擦系数）



①分析系统如右图：外力、弹簧拉力、阻尼器阻力，输入量、输出量。



②根据牛顿第二定律，列写运动方程

$$\sum F = f(t) - ky(t) - \mu\frac{dy(t)}{dt} = ma = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$$

2.2 典型环节的微分方程

例2.1 RLC无源网络

$$LC\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+RC\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)=u_i(t)$$

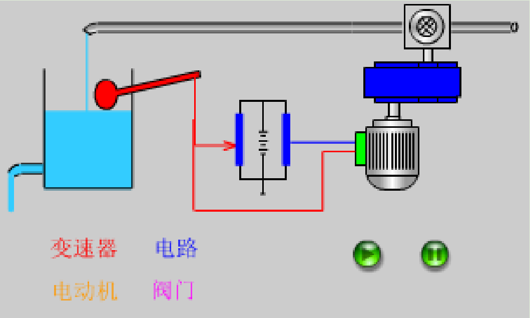
例2.2 机械位移装置

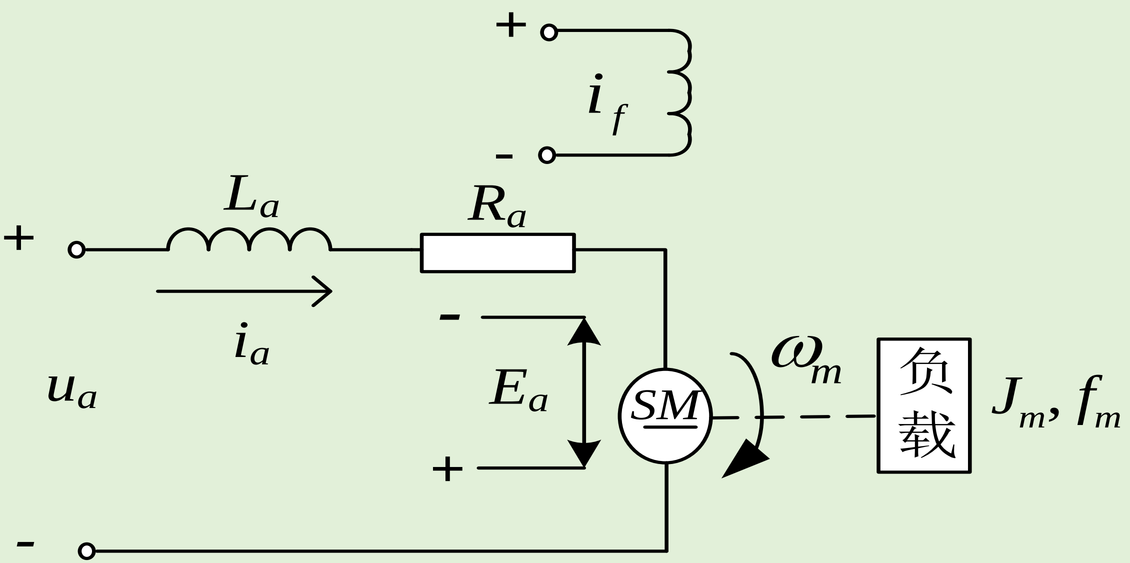
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\mu\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=f(t)$$

两个不同的物理系统具有相同的运动方程，即具有相同的数学模型。—— 模型的相似性

2.2 典型环节的微分方程

例2.3 列写图所示电枢控制直流电动机的微分方程，其中电枢电压$u_a(t)$为输入量，电动机转速$w_m(t)$为输出量。





$u_a(t)$ —— 电枢电压

L_a —— 电感

R_a —— 电阻

i_a —— 电枢电流

$\omega_m(t)$ —— 电动机转速

E_a —— 电枢反电势

M_c —— 为折合到电动机轴上的总负载转矩

J_m —— 电动机和负载折合到电动机轴上的转动惯量

f_m —— 电动机和负载折合到电动机轴上的粘性摩擦系数

2.2 典型环节的微分方程

输入量 $u_a(t)$ M_c **输出量** $\omega_m(t)$

电枢回路电压平衡方程： $u_a(t)=L_a\dfrac{di_a(t)}{dt}+R_a i_a(t)+E_a$ （1）

电枢反电势（反电势系数C_e）： $E_a=C_e\omega_m(t)$ （2）

电磁转矩（电动机转矩系数C_m）： $M_m(t)=C_m i_a(t)$ （3）

电动机轴上的转矩平衡方程： $J_m\dfrac{d\omega_m(t)}{dt}=M_m(t)-M_c(t)-f_m\omega_m(t)$ （4）

（3）代入（4）得： $C_m i_a(t)=J_m\dfrac{d\omega_m(t)}{dt}+f_m\omega_m(t)+M_c(t)$

进而求出: $i_a(t)$，$\dfrac{di_a(t)}{dt}$ 代入（1），（2）也代入（1）得：

$$L_aJ_m\frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}+(L_af_m+R_aJ_m)\frac{d\omega_m(t)}{dt}+(R_af_m+C_mC_e)\omega_m(t)$$

$$=C_mu_a(t)-L_a\frac{dM_c(t)}{dt}-R_aM_c(t) \qquad (2.6)$$

2.2 典型环节的微分方程

在工程应用中，由于电枢电路电感 L_a 较小，通常忽略不计，因而式（2.6）可简化为

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_c(t) \qquad (2.7)$$

电动机机电时间常数—— $T_m = R_a J_m / (R_a f_m + C_m C_e)$

电动机传递系数—— $K_1 = C_m / (R_a f_m + C_m C_e)$

$K_2 = R_a / (R_a f_m + C_m C_e)$

如果电枢电阻R_a和电动机的转动惯量J_m都很小可忽略不计时，式（2.7）还可进一步简化为：

$$C_e \omega_m(t) = u_a(t) \qquad (2.8)$$

这时，电动机的转速 $\omega_m(t)$ 与电枢电压$u_a(t)$成正比，于是，

电动机可作为测速发电机使用。

2.2 典型环节的微分方程

分析法（机理法）

目的：建立输入--输出关系（模型）已知…, 求…）

步骤：

① 环节划分；

② 列各环节方程（必要时引入中间变量）；

③ 消去中间变量；

④ 整理，得到微分方程；

⑤ 方程写法（规范）。

2.3 典型环节的传递函数

传递函数（Transfer Function）：线性系统**在零初始条件**下，输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比称为系统的传递函数。

例：RLC无源网络---微分方程

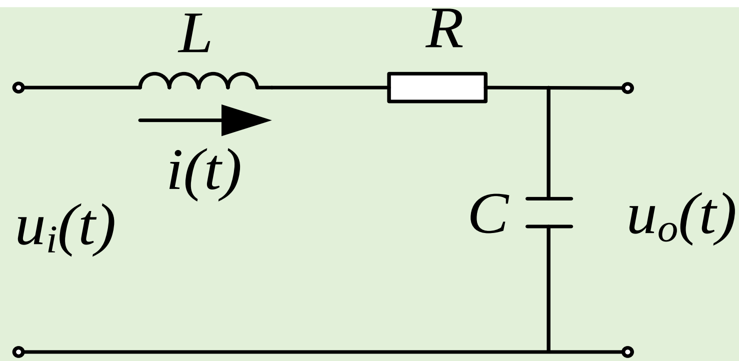
$$LC\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+RC\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)=u_i(t)$$ 时域

两边取拉氏变换： $(LCs^2+RCs+1)U_o(s)=U_i(s)$ 复域

传递函数： $$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

2.3 典型环节的传递函数

求图所示RLC无源网络的传递函数，以$u_i(t)$为输入，$u_o(t)$为输出. 直接求传递函数



电感电容复阻抗：

$$L \to sL$$

$$C \to \frac{1}{sC}$$

分压计算：

$$U_o(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC} + SL} U_i(s)$$

传递函数：

$$G(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC} + SL} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2.3 典型环节的传递函数

拉氏变换的定义 $L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

拉氏变换的微分定理

$$\boxed{g(t) = \frac{df(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad G(s) = sF(s) - f(0)}$$

$$g(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

$$G(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\boxed{g(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad G(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

2.3 典型环节的传递函数

课本p22错误

设线性定常系统的微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

零初始条件下，输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比即为系统的传递函数。

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

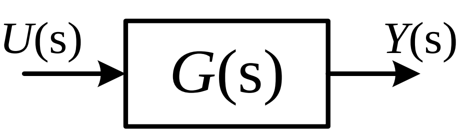
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

零初始条件

$$y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=\cdots\cdots y^{(n-1)}(0)=0$$
$$u(0)=\dot{u}(0)=\ddot{u}(0)=\cdots\cdots u^{(n-1)}(0)=0$$

$u(t)\rightarrow U(s)$

$y(t)\rightarrow Y(s)$



$$Y(s)=G(s)U(s)$$

2.3 典型环节的传递函数

拉氏变换将数学模型从时域转换到了频域

- 频率特性虽然是一种稳态特性，但它不仅仅反映系统的稳态性能，还可以用来研究系统的稳定性和瞬态性能，而且不必解出特征方程的根。
- 频率特性与二阶系统的过渡过程性能指标有着确定的对应关系，从而可以较方便地分析系统中参量对系统瞬态响应的影响。
- 线性系统的频率特性可以非常容易地由解析法得到。
- 许多元件和稳定系统的频率特性都可用实验的方法来测定，这对于很难从分析其物理规律着手来列写动态方程的元件和系统来说，具有特别重要的意义
- 频域分析法不仅适用于线性系统，也可以推广到某些非线性系统的分析研究中。

传递函数的性质和特点

- 传递函数反映了系统对输入信号的传递能力，是系统本身固有特性，与输入信号和初始条件无关。
- 传递函数可以是不反映任何物理结构的抽象模型。
- 相似系统的传递函数形式相同。
- 传递函数分母的阶次大于分子，即 $n>m$ （惯性）
- 传递函数的分子多项式的根称为零点，分母多项式的根称为极点。

2.3 典型环节的传递函数

传递函数的物理意义

在零初始条件下，若线性定常系统的输入的拉氏变换为R(s)，则系统输出的拉氏变换为：

$$C(s)=G(s)R(s)$$

系统的输出为 ：

$$c(t)=L^{-1}\{C(s)\}=L^{-1}\{G(s)R(s)\}$$

单位脉冲输入信号的拉氏变换为：

$$R(s)=L\{\delta(t)\}=1$$

则单位脉冲输入作用下系统输出的拉氏变换为：

$$C(s)=G(s)$$

传递函数的物理意义

单位脉冲输入信号下系统输出为g(t)，则：

$$g(t)=L^{-1}\{C(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}$$

可见，系统传递函数的拉氏反变换即为单位脉冲输入信号下系统的输出。

因此，系统的单位脉冲输入信号下系统的输出完全描述了系统动态特性，所以也是系统的数学模型，通常称为脉冲响应函数。

2.3 典型环节的传递函数

传递函数的物理意义

系统实际存在的损耗、阻尼、摩擦等，使其能量逐渐衰减，这种现象统称为“惯性”。

惯性系统传递函数的分母阶次必高于分子阶次。由式（2.25）、（2.26）可见， 当n>m时才会出现所谓惯性现象，否则系统将存在能量自激。

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad (2.25)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} \qquad (2.26)$$

传递函数的几种形式

多项式形式：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

零极点形式

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

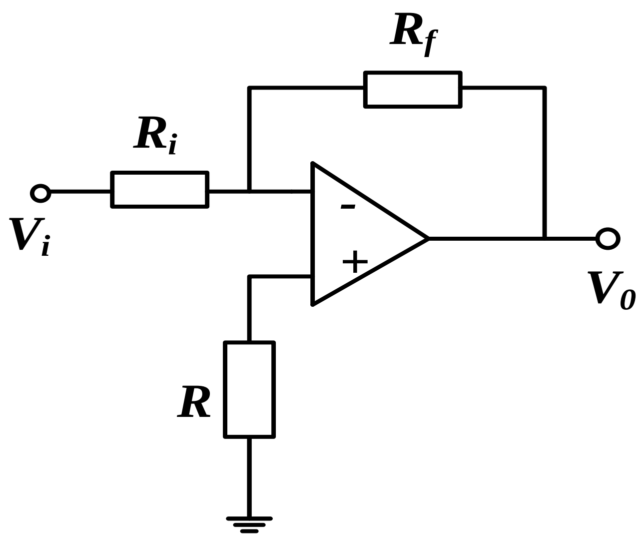
时间常数形式

$$K`=K\frac{\prod_{j=1}^{m} z_j}{\prod_{i=1}^{n} p_i}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K'\prod_{j=1}^{m}(T_j s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$$

2.3 典型环节的传递函数

1. 比例环节



运放构成的纯比例电路

$$\frac{V_o(t)}{V_i(t)} = -\frac{R_f}{R_i} = K$$

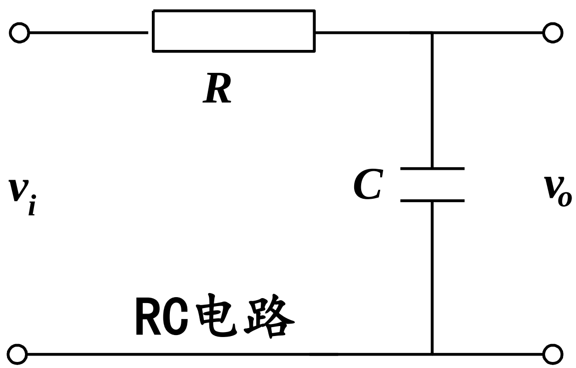
传递函数：

$$G(s) = K$$

输出量无延迟、无失真地反映输入量的变化

2.3 典型环节的传递函数

2. 惯性环节

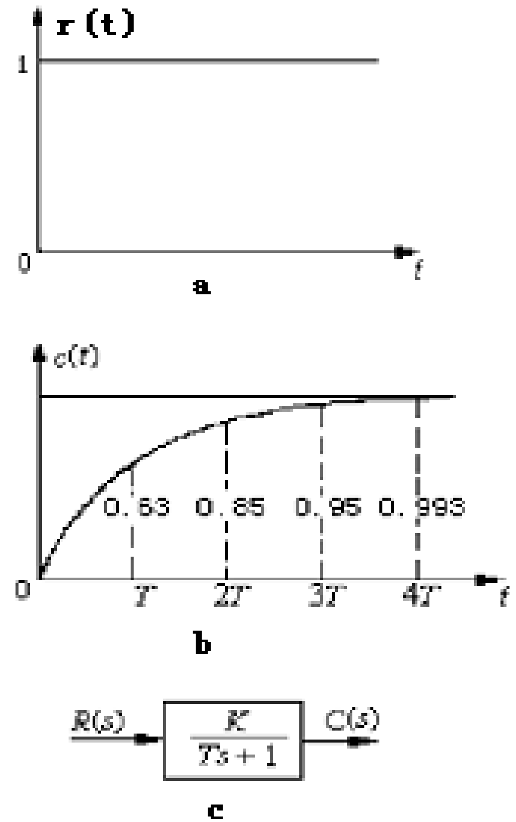


RC电路

$$G(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{RCs+1}$$

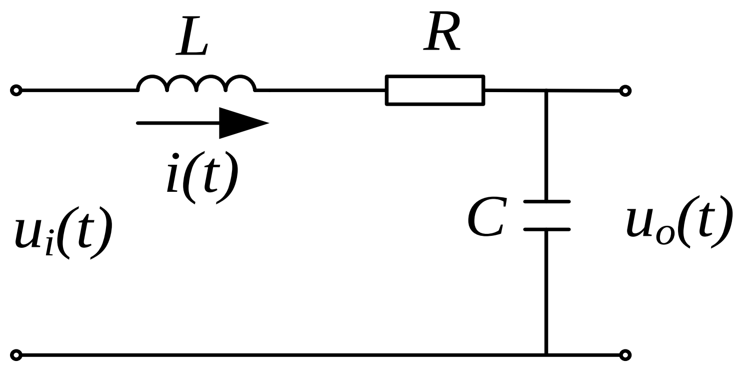
传递函数：

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$



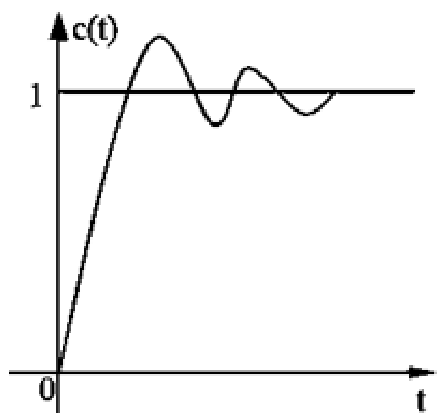
输出量变化落后于输入量的变化

3. 振荡环节



$$G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

$$G(s)=\frac{K}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



K=1， T=$\sqrt{LC}$， $\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2C}{L}}$

$\omega_n=1/T$

有两种储能元件，所储能量相互转换

例2.3 电枢控制直流电动机

$$L_a J_m \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m)\frac{d\omega_m(t)}{dt} + (R_a f_m + C_m C_e)\omega_m(t) \qquad (2.6)$$
$$= C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

对式（2.6）进行拉氏变换可得输出为（课本P24表达有误）

$$\Omega_m(s) = \frac{C_m U_a(s) - (L_a s + R_a) M_c(s)}{L_a J_m s^2 + (L_a f_m + R_a J_m)s + (R_a f_m + C_m C_e)} \qquad (2.31)$$
$$= G_u(s) U_a(s) + G_m(s) M_c(s)$$

两输入单输出振荡环节。根据传递函数定义，只能分别写出输出对两个输入的独立传递函数，即

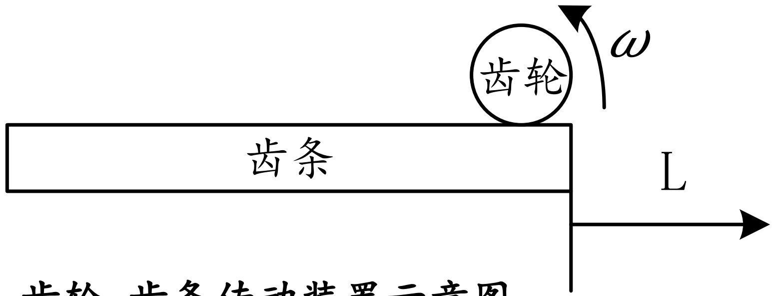
$$\frac{\Omega_m(s)}{M_C(s)} = G_m(s)\Big|_{U_a=0}, \quad \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = G_u(s)\Big|_{M_C=0}$$

线性系统可用叠加定理，即允许这样处理。

或者以矩阵形式表示：$\Omega_m = \begin{bmatrix} G_u(s) & G_m(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a(s) \\ M_c(s) \end{bmatrix} = G(s)R(s)$

4. 积分环节

设齿轮轴位置固定，齿轮转速$\boldsymbol{\omega(t)}$为输入量，齿条平移距离$\boldsymbol{l(t)}$为输出量，$\boldsymbol{r}$为齿轮半径，忽略间隙影响。



齿轮–齿条传动装置示意图

$$l(t)=r\theta(t)=r\int\omega(t)$$

$\boldsymbol{\omega(t)}$单位为rad/s，$\boldsymbol{l(t)}$和$\boldsymbol{r}$单位为cm

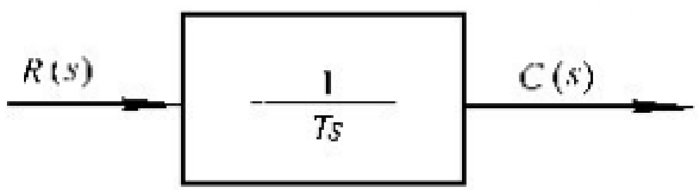
$$G(s)=\frac{L(s)}{\Omega(s)}=\frac{1}{\frac{1}{r}s}=\frac{1}{Ts}$$

$T=\frac{1}{r}$ 积分时间常数

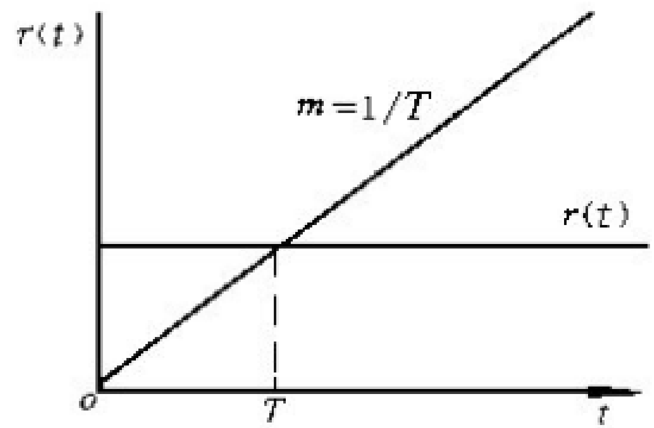
2.3 典型环节的传递函数

4. 积分环节

$$G(s)=\frac{1}{Ts} \qquad G(s)=\frac{K}{s}$$



功能框图



单位阶跃响应

典型积分环节如：有源积分电路、齿轮-齿条传动装置、流量与累积量等

5. 微分环节

例2.3 忽略Ra, Jm, La时，电枢控制直流电动机可作为测速发电机使用。

$$C_e\omega_m(t)=u_a(t)$$

$$\frac{U_a(s)}{\Omega_m(s)}=C_e \qquad \frac{U_a(s)}{\theta(s)}=sC_e$$

$\Omega_m(s)$ 是被测转速的拉氏变换　　$\theta(s)$ 是被测转角的拉氏变换

当被测量是转速时，测速发电机是比例环节，当被测量为转角时，测量发电机为理想微分环节，即为G(s)=Ks

5. 微分环节

理想微分环节

$$G(s) = Ks$$

实际微分环节

$$G(s) = \frac{KTs}{Ts+1}$$

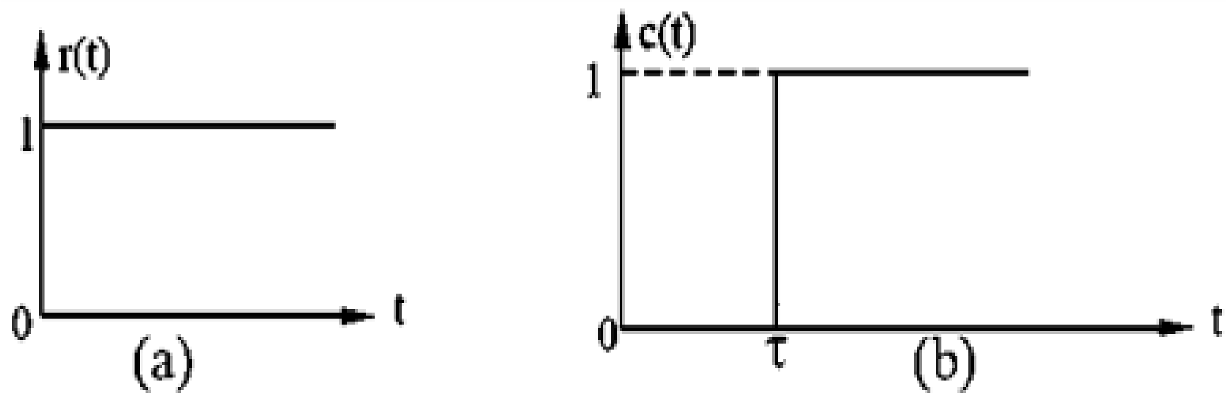
2.3 典型环节的传递函数

6. 延迟环节

$$G(s)=Ke^{-\tau s}$$

输出量经过延迟τ后，才复现输入量，即

$$y(t)=Ku(t-\tau) \qquad G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Ke^{-\tau s}U(s)}{U(s)}=Ke^{-\tau s}$$



典型延迟环节如：含有管道、传输带的系统

2.3 典型环节的传递函数

环节名称	传递函数	特点	实例
比例环节（放大环节）	K	输出量无延迟、无失真地反映输入量变化	电位器（输入电压–输出电压） 晶体管放大器(输入电压–输出电压) 测速机（转速–电压） 齿轮箱（主动轴转速–从动轴转速）
惯性环节（非周期环节）	$\dfrac{K}{Ts+1}$	输出量变化落后于输入量的变化	它激直流发电机（激磁电压–电势） *RC*滤波器（电源电压–电容电压）
振荡环节	$\dfrac{K}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$ $0<\zeta<1$	有两种储能元件，所储能量相互转换	*RLC* 振荡电路（输入电压–输出电压）
积分环节	$\dfrac{K}{s}$	输出量正比于输入量的积分	传动轴（转速–转角） 积分器 （输入电压–输出电压）
理想微分环节 实际微分环节	Ks $\dfrac{KTs}{Ts+1}$	输出量正比于输入量的微分（导数）	直流测速机（转角–电势） *RC*串联微分电路（电源电压–电阻电压）
延迟环节（时滞环节）	$Ke^{-\tau s}$	输出量经过延迟 τ 后，才复现输入量	晶闸管整流装置（控制电压–输出电压） 传输带（输入流量–输出流量）

2 本节课小结

- □控制系统的数学模型：定义、种类（动态、静态）；
- □输入—输出模型：微分方程的建立（分析法、步骤）；
- □传递函数的定义、性质和特点；
- □传递函数的三种形式（多项式、零极点、时间常数）
- □典型系统的传递函数（6种：比例、惯性、振荡、积分、微分、延迟）。

- 2.3（b）改为求传递函数

写清题号，不用抄题；