XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
西安交通大學

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

上节课要点复习

□ 线性系统信号流图的定义、构成

节点（源点、汇点、混合节点）、支路、增益、通路

□ 信号流图的绘制

方框图➜信号流图（注意相邻比较点、引出点转换为两节点）

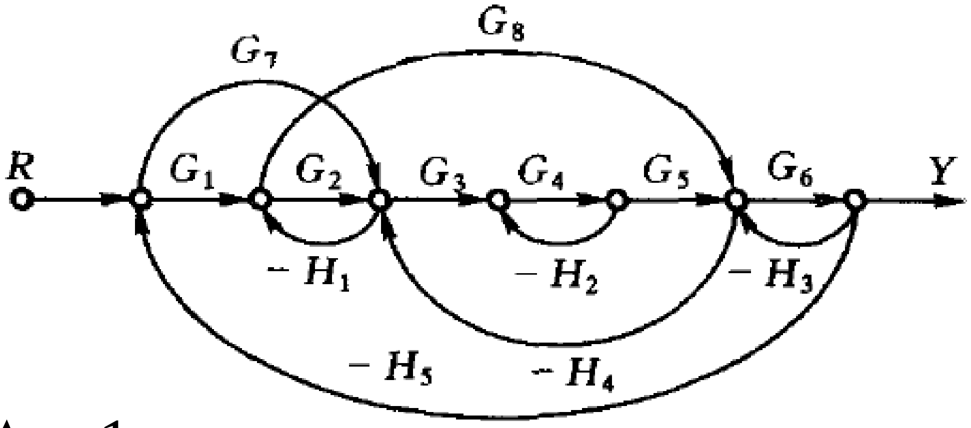
□ 信号流图求传递函数（梅逊增益公式）

前向通道、前向通道增益、回环、回环增益，不接触回环、系统特征式、残余流图

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

□ 线性控制系统数学模型的建立过程及非线性化（了解）

习题2.14(d)试用梅逊增益公式求系统信号流图的传递函数Y(s)/R(s)



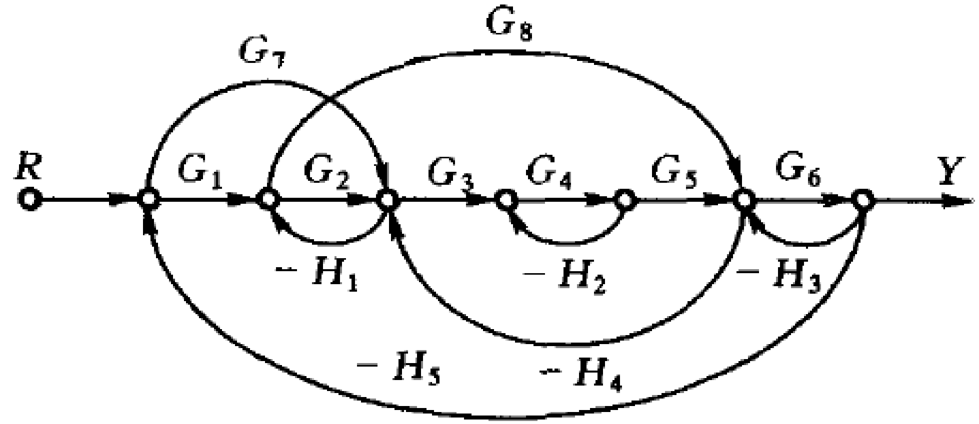
解：前向通道 $P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6$　　$\Delta_1 = 1$

$P_2 = G_7G_3G_4G_5G_6$　　$\Delta_2 = 1$

$P_3 = -G_7H_1G_8G_6$　　$\Delta_3 = 1 + G_4H_2$

$P_4 = G_1G_8G_6$　　$\Delta_4 = 1 + G_4H_2$

习题2.14(d) 试用梅逊增益公式求系统信号流图的传递函数Y(s)/R(s)



解：单独回环

$-G_2H_1$ $-G_4H_2$ $-G_6H_3$

$-G_3G_4G_5H_4$ $-G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_5$

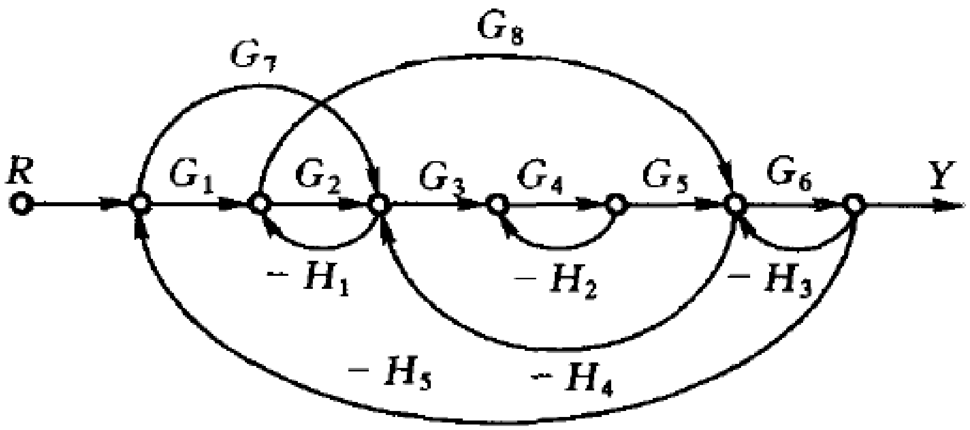
$-G_7G_3G_4G_5G_6H_5$ $-G_1G_8G_6H_5$

$G_7H_1G_8G_6H_5$ $G_8H_4H_1$

$$\sum L_1 = -G_2H_1 - G_4H_2 - G_6H_3 - G_3G_4G_5H_4 - G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_5 - G_7G_3G_4G_5G_6H_5$$
$$-G_1G_8G_6H_5 + G_7H_1G_8G_6H_5 + G_8H_4H_1$$

2 上节课要点复习

习题2.14(d) 试用梅逊增益公式求系统信号流图的传递函数Y(s)/R(s)



解：两两不接触回环

$-G_2H_1 \quad -G_4H_2$

$-G_2H_1 \quad -G_6H_3$

$-G_4H_2 \quad -G_6H_3$

$-G_1G_8G_6H_5 \quad -G_4H_2$

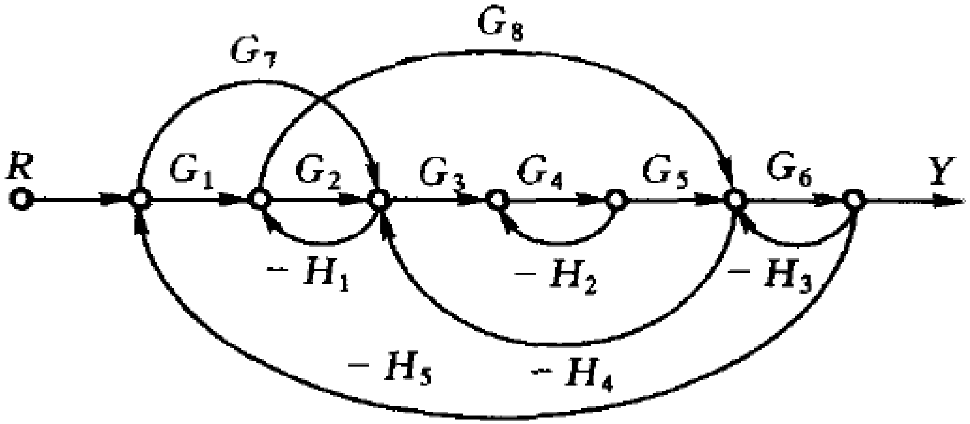
$G_7H_1G_8G_6H_5 \quad -G_4H_2$

$G_8H_4H_1 \quad -G_4H_2$

$$\sum L_2 = (-G_2H_1)*(-G_4H_2)+(-G_2H_1)*(-G_6H_3)+....$$

上节课要点复习

习题2.14(d)试用梅逊增益公式求系统信号流图的传递函数Y(s)/R(s)



解：三个互不接触回环

$$-G_2H_1 \qquad -G_4H_2 \qquad -G_6H_3$$

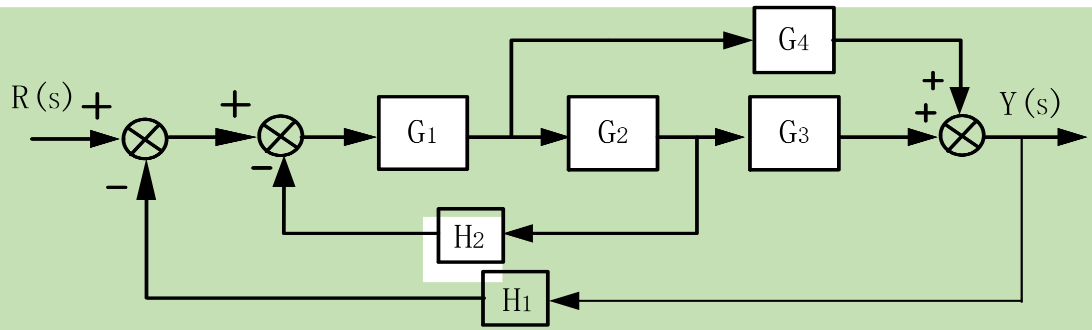
$$\sum L_3 = (-G_2H_1)*(-G_4H_2)*(-G_6H_3)$$

传递函数为

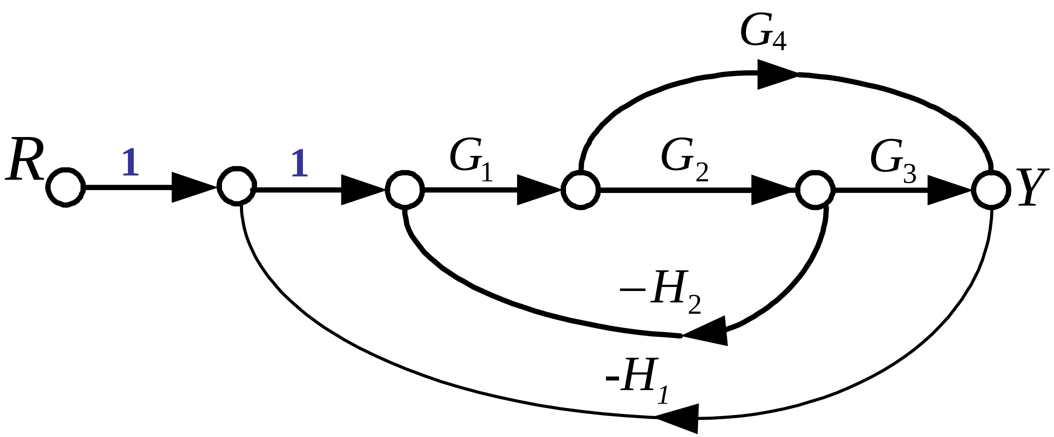
$$\frac{Y}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{4} P_k\Delta_k}{\Delta}$$

2 上节课要点复习

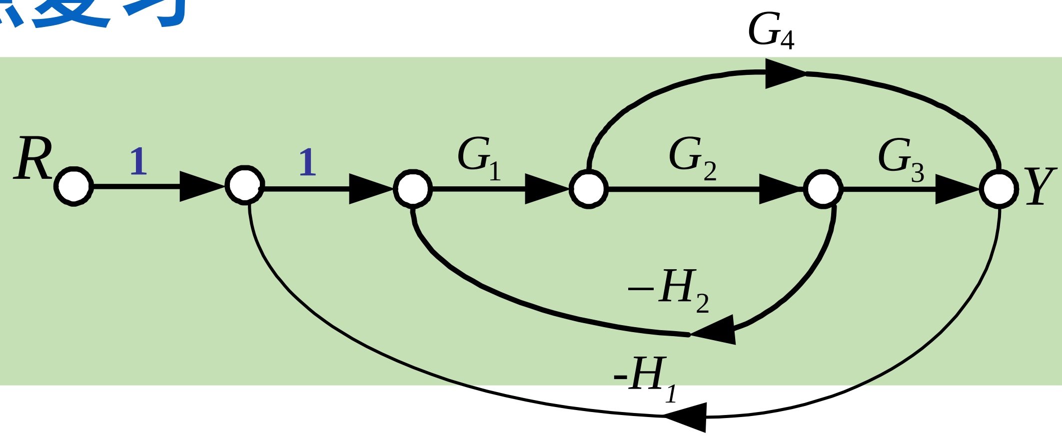
绘制右图所示系统结构图对应的信号流图，并利用梅逊增益公式求系统的传递函数



解：信号流图



绘制右图所示系统结构图对应的信号流图，并利用梅逊增益公式求系统的传递函数



解：前向通道 $P_1 = G_1G_2G_3$ $\Delta_1 = 1$

$P_2 = G_1G_4$ $\Delta_2 = 1$

回环 $L_1 = -G_1G_2G_3H_1$ $L_2 = -G_1G_2H_2$ $L_3 = -G_1G_4H_1$

信号流图特征式 $\Delta = 1 + G_1G_2H_2 + G_1G_2G_3H_1 + G_1G_4H_1$

传递函数
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{2} P_k\Delta_k = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_2 + G_1G_2G_3H_1 + G_1G_4H_1}$$

线性系统的时域分析 03

- 典型试验信号
- 系统性能指标
- 一阶系统的时域分析（单位阶跃、斜坡、脉冲响应）
- 二阶系统的时域分析（与根位置关系、性能指标计算）
- 劳斯稳定判据
- 线性系统的稳态误差计算（不同型数系统的稳态误差系数及稳态误差计算）

3 线性系统的时域分析

- 分析和设计控制系统的首要工作是建立系统的数学模型（CH2已获得传递函数形式的数学模型）。在获得系统的数学模型后，就可以采用不同的数学方法去分析系统的性能。

- 控制系统的主要分析方法

  时域分析法（CH3）：系统时域性能的分析与确定，稳定性的判断，动静态性能指标的确定。

  根轨迹分析法(CH4)：通过求取闭环系统特征方程的特征根的图解法。

  频域（率）分析法(CH5)：通过频域分析系统稳定性、及各种性能指标。

3 线性系统的时域分析

- 时域分析是指控制系统在一定的输入下，根据输出量的时域表达式，分析系统的稳定性、瞬态和稳态性能
- 时域法是一种直接又比较准确的分析方法，它通过拉氏反变换求出系统输出量的表达式（也可由微分方程得到），提供系统时间响应的全部信息。
- 时域分析的实质：系统的时域响应由瞬态（暂态）响应和稳态响应构成。系统达到稳态过程之前的过程称为瞬态过程。瞬态分析是分析瞬态过程中输出响应的各种运动特性。
- 时域分析法得到的结果直观，但其计算量随系统阶次的升高而急剧增加。

3.1 典型试验信号与系统性能指标

- 典型试验信号的特点（3个）

①应能反映系统的实际工作情况（包括可能遇到的恶劣工作条件）；②应具有简单数学模型并易于通过实验获得；③应具备控制系统实际输入信号的时变性、随机性，或者经过混叠至少能够合成任意输入信号。

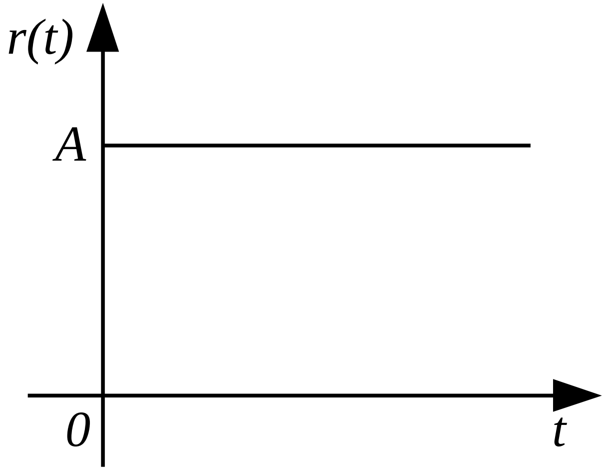
- 常用的典型试验信号有以下5种

阶跃信号、斜坡信号、等加速度信号

脉冲信号、正弦信号

1．阶跃信号

阶跃输入信号表示参考输入量的一个瞬间突变过程（瞬时跃变）。



$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ A, & t\geq 0\end{cases}$$

*A*是常量

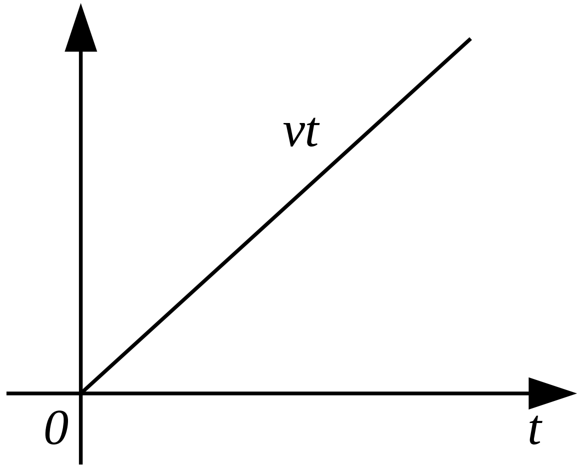
若**A=1**，则称为**单位阶跃输入信号**，也表示为**1(t)**，其拉氏变换为**1/s**。

2. 斜坡信号（等速度信号）

斜坡输入信号表示由零值开始随时间作线性增加的信号。

$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ vt, & t\geq 0\end{cases}$$

v是常量

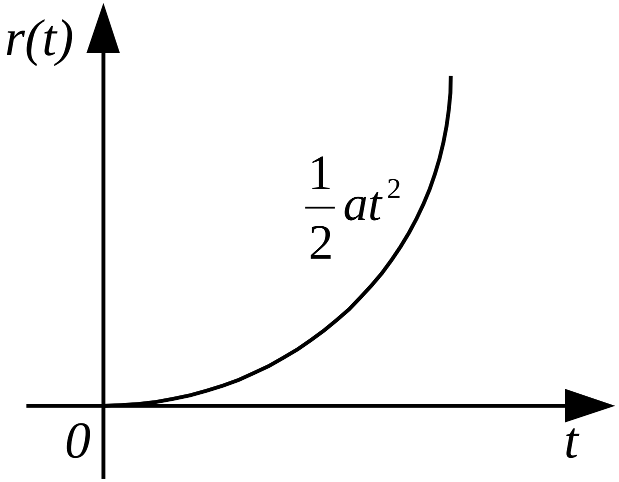


因为其一阶导数为常数v，故也称为等速度输入信号；

若$v=1$，则称为单位斜坡信号，其拉氏变换为$1/s^2$。

3. 等加速度信号（抛物线信号）

等加速度信号是一种抛物线函数 。



$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{2}at^2, & t\geq 0\end{cases}$$

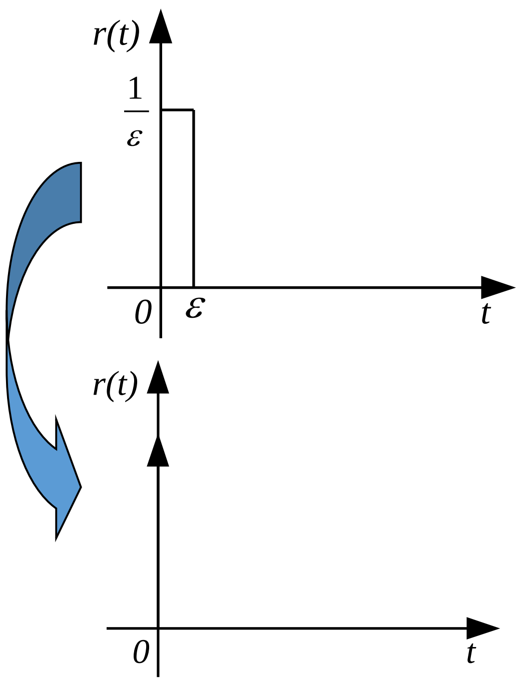
*a*是常量

函数值随时间等加速度增加；

若*a*=1，则称为单位等加速度信号 ，其拉氏变换为$1/s^3$。

4. 脉冲信号

脉冲信号是一种持续时间极短而幅值极大的信号。



$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0, t>\varepsilon\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\le t<\varepsilon\end{cases}$$

ε 是脉冲宽度

脉冲面积为1

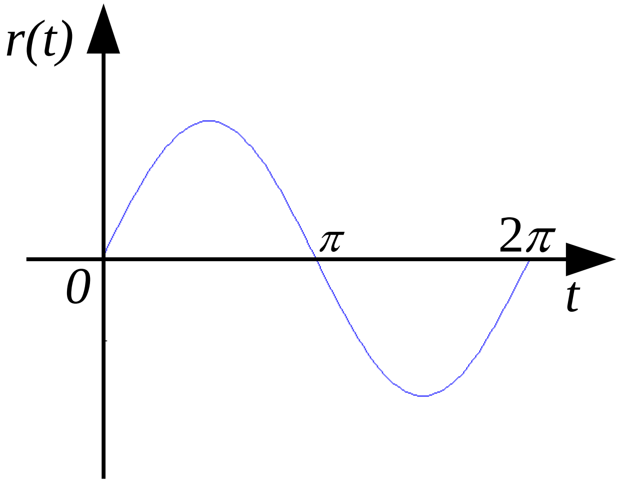
若 ε 取值趋于零,则: $\delta(t)=r(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

称其为单位理想脉冲信号，也称δ函数，其拉氏变换为1。实际中无法获得，当ε远小于被控对象时间时近似为理想脉冲。

5. 正弦信号

正弦信号主要用于求取系统的频率特性。



$$r(t) = A\sin\omega t$$

A是振幅

ω是角频率

其拉氏变换为：

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

3.1 典型试验信号与系统性能指标

在分析控制系统时，选用哪种输入信号作为系统的试验信号，应视所研究系统的实际输入信号而定。

- 如果作用到系统的输入信号大多具有突变性质时，则选用阶跃函数较合适（例如模拟设定量改变）。
- 如果控制系统的实际输入大部分是随时间逐渐增加的信号，则选用斜坡函数较合适；
- 如果控制系统的输入信号是一个瞬时冲击的函数，则应选取脉冲信号较合适（例如模拟干扰信号）。

3.1 典型试验信号与系统性能指标

- 需要注意的是，不管采用何种典型输入型号，对同一系统来说，其过渡过程所反应出的系统特性应是统一的。
- 采用同一种典型试验信号，便有可能在同一基础上去比较各种控制系统的性能。
- 在选取试验信号时，考虑因素①能够尽可能反映实际输入；②尽可能简单、以便于分析处理外，③还应选择那些能使系统工作在最不利的情况下的输入信号作为典型实验信号。

本章主要讨论控制系统在阶跃函数、斜坡函数、脉冲函数输入信号作用下的输出响应。

时域响应的构成

方程：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)$$

$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

初始条件：

$$y(0),\dot{y}(0),\ddot{y}(0),\cdots y^{(n-1)}(0) \qquad u(0),\dot{u}(0),\ddot{u}(0),\cdots u^{(m-1)}(0)$$

解的结果：

$$y(t)=y_t(t)+y_{ss}(t)$$

暂态响应（自由分量） 稳态响应（强迫分量）

时域响应的构成

- 对于一个稳定的线性控制系统，其暂态响应随时间推移将趋向于零，即：

$$\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$$

- 暂态响应的幅值、振荡剧烈程度和持续时间都是系统分析和设计中要考虑的问题。
- 稳态响应是指控制系统在输入作用下，经过较长一段时间后的输出信号的变化规律。
- 响应构成与系统性能（稳、准、好）

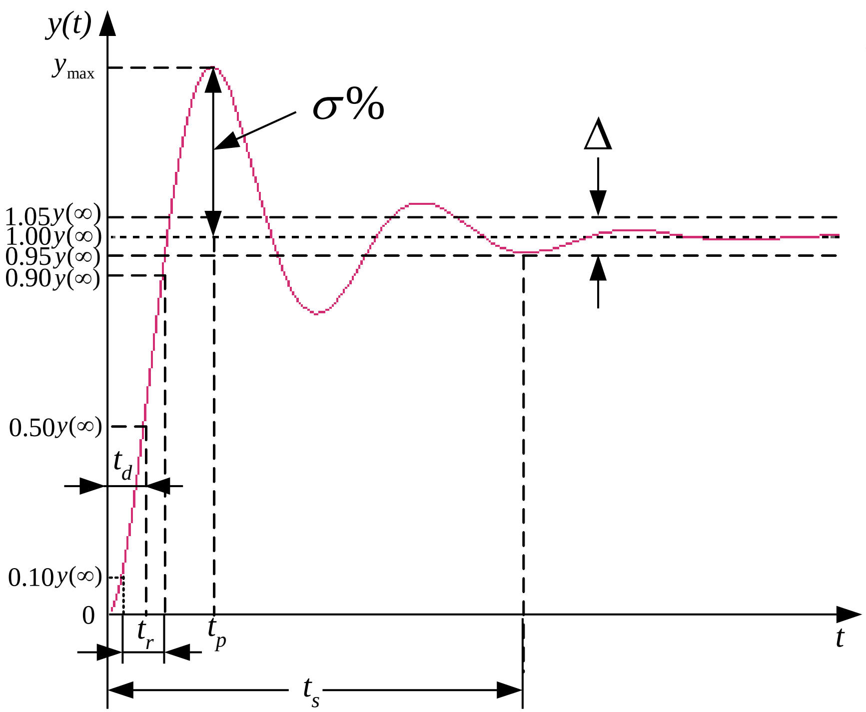
3.1 典型试验信号与系统性能指标

系统性能指标

- 控制系统除满足稳态性能要求外，还必须具有良好的动态特性，从而使系统迅速跟踪参考输入信号，并且不产生剧烈的振荡。对系统动态性能进行分析，改善动态响应是自动控制理论研究的核心工作。

- 为了衡量系统的动态性能，同时便于对不同系统性能进行比较，通常采用单位阶跃函数作为测试试验信号，相应的系统响应称为单位阶跃响应。

系统性能指标



控制系统单位阶跃响应和动态性能指标

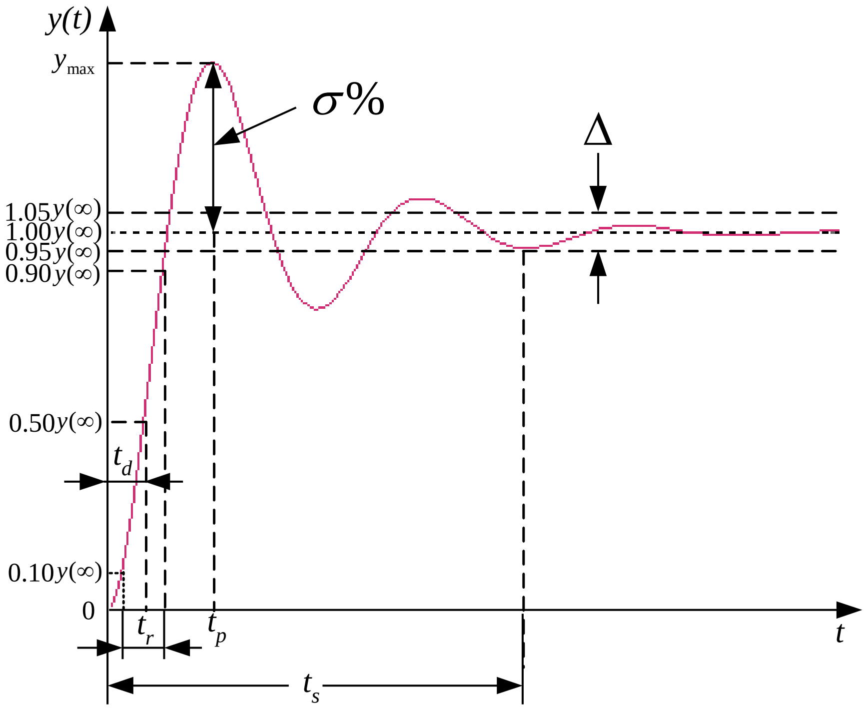
（1）**超调量**：又称最大超调量，反映系统响应振荡的剧烈程度，它定义为：

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\%$$

$$= \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

（2）**延迟时间** t_d：系统阶跃响应达到稳态值的50%所需的时间。

系统性能指标



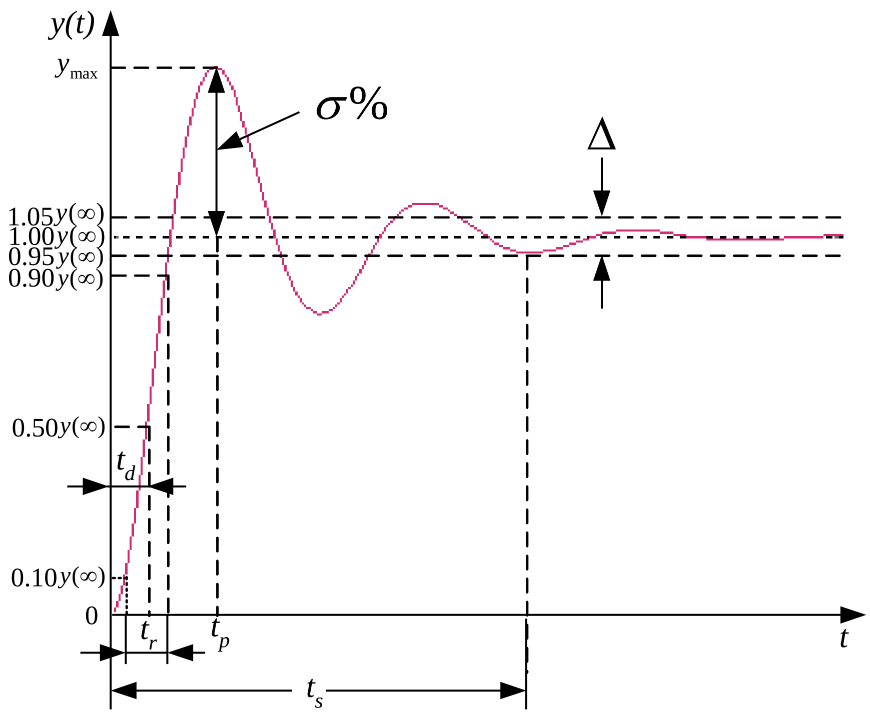
控制系统单位阶跃响应和动态性能指标

（3）上升时间 t_r ：系统阶跃响应从稳态值的10%第一次达到稳态值的90%所需的时间。

（4）调节时间 t_s ：系统阶跃响应 $y(t)$ 和稳态值 $y(\infty)$ 之间误差达到规定允许值，且以后不再超过允许值所需的最短时间，即当 $t > t_s$ 时，

$$\left|\frac{y(t)-y(\infty)}{y(\infty)}\right| \le \Delta$$

系统性能指标



控制系统单位阶跃响应和动态性能指标

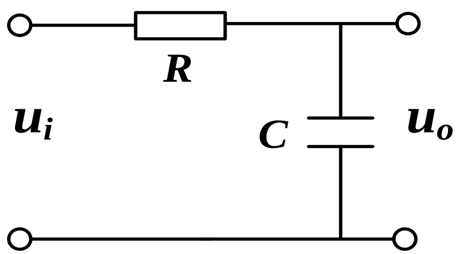
4个指标中，超调量和调节时间反映了对系统动态性能最重要的要求——相对稳定性和快速性；

而上升时间和延迟时间也不同侧面反映了系统响应的快慢程度。

3 3.2 一阶系统的时域分析

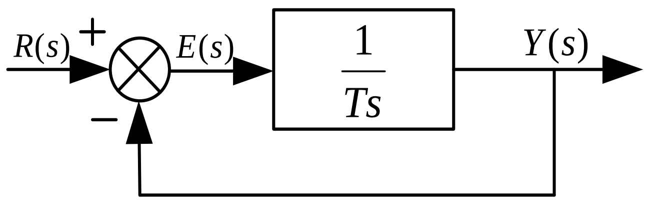
用**一阶微分方程**描述的控制系统称为**一阶系统**

例：

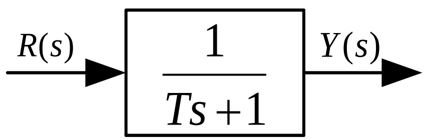


$$RC\frac{du_o}{dt}+u_o=u_i \quad\Longrightarrow\quad (RCs+1)U_o(s)=U_i(s)$$

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$



(a) 一阶系统的框图



(b) 等效框图

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

一阶系统的单位阶跃响应

输入为： $R(s)=\dfrac{1}{s}$

输出为： $Y(s)=R(s)W(s)=\dfrac{1}{s(Ts+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{T}{Ts+1}$

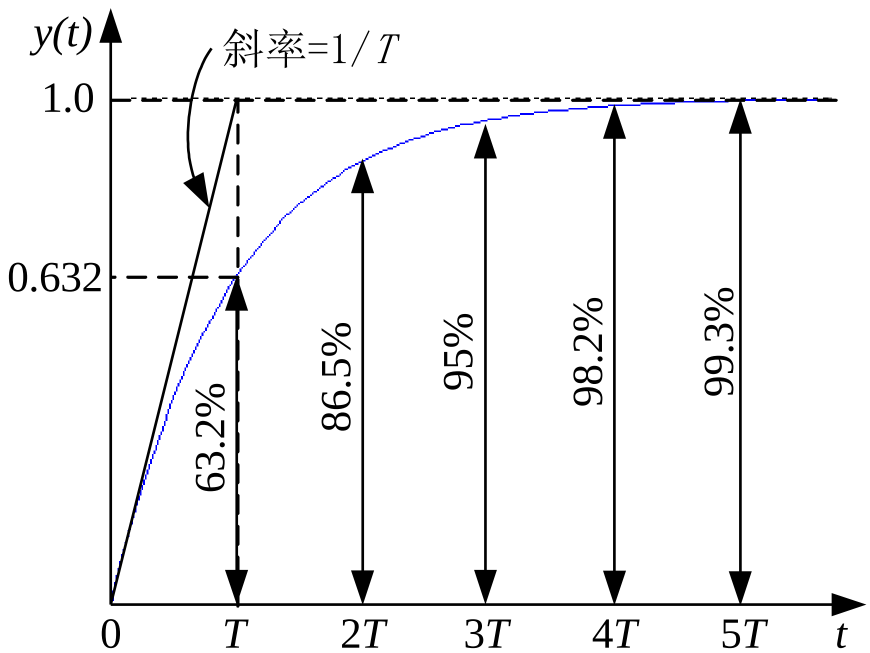
$$y(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}=e^{0t}-e^{-\frac{1}{T}t}$$ 惯性系统

输入信号极点（0）是形成系统响应的稳态分量（强迫分量），系统闭环传递函数极点（-1/T）是产生系统响应的暂态（瞬态）分量。

该结论不仅适用于一阶线性定常系统，而且也适用于高阶线性定常系统。

一阶系统的单位阶跃响应

$$y(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$$



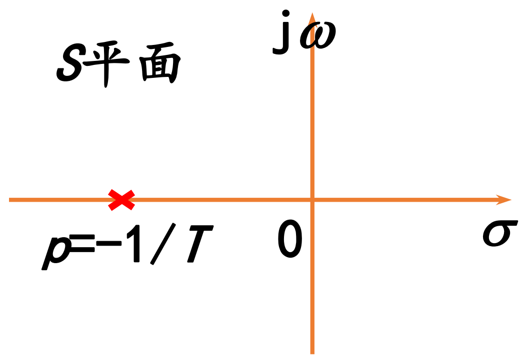
一阶系统的单位阶跃响应

- $t\to\infty$时，$y(t)=1$，即阶跃输入时的稳态误差为0。
- $t=T$ 时，$y(t)=0.632$，即响应达到63.2%的时间是该系统的时间常数T。
- 响应曲线$t=0$时的斜率为$1/T$，若系统输出响应的速度恒为$1/T$，只要$t=T$，输出$y(t)$就能达到其最终值(1)。

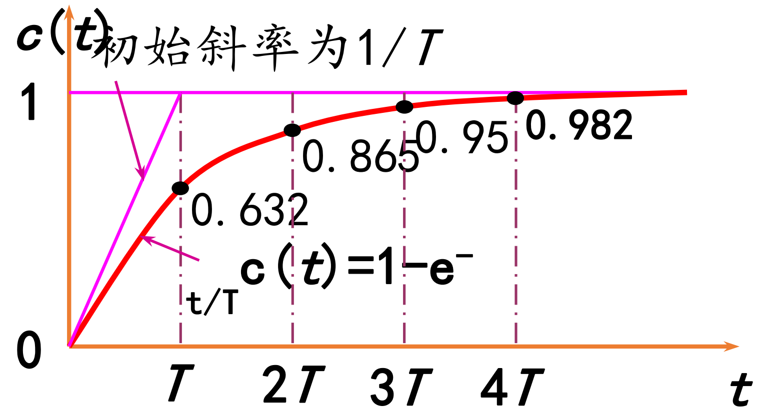
惯性系统，时间常数T $W(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

3.2 一阶系统的时域分析

一阶系统的单位阶跃响应 $W(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ $c(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}\ (t\geq 0)$



(a) 零极点分布



(b) 单位阶跃响应曲线

特点： 1）可以用时间常数去度量系统的输出量的数值；

2）初始斜率为1/*T*;

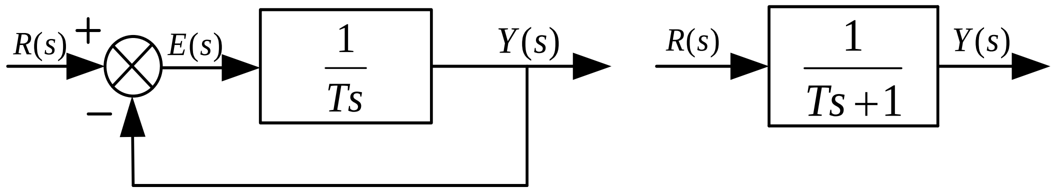
3）无峰值时间，无超调；稳态误差e_{ss}=0 。

性能指标： 延迟时间：$t_d=0.69T$

上升时间：$t_r=2.20T$

调节时间：$t_s=3T$（△=0.05）或 $t_s=4T$（△=0.02）

一阶系统的单位斜坡响应

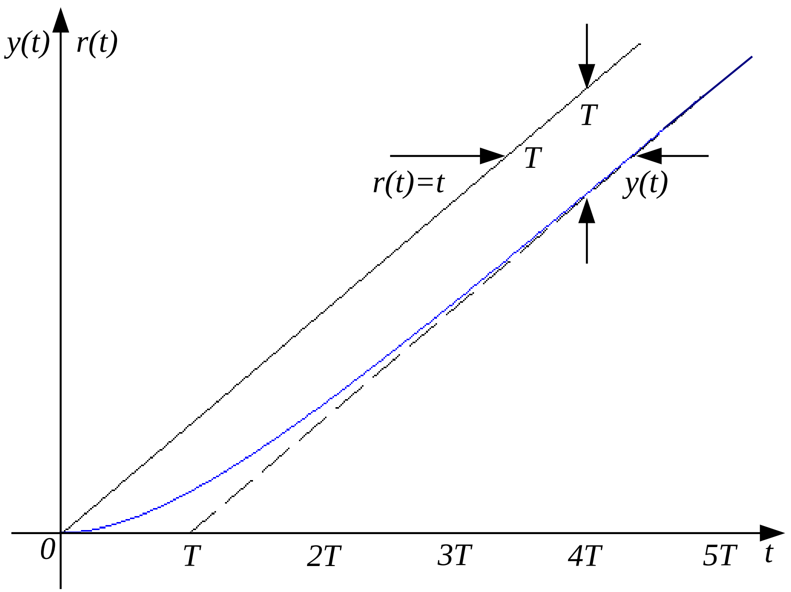


输入为： $r(t)=t \quad \Longrightarrow \quad R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

输出为： $$Y(s)=\frac{1}{s^2(Ts+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}=\frac{1}{s^2}\text{-}T\left(\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}\right)$$

$$y(t)=t-T\left(1-e^{-\frac{1}{T}t}\right)$$

一阶系统的单位斜坡响应



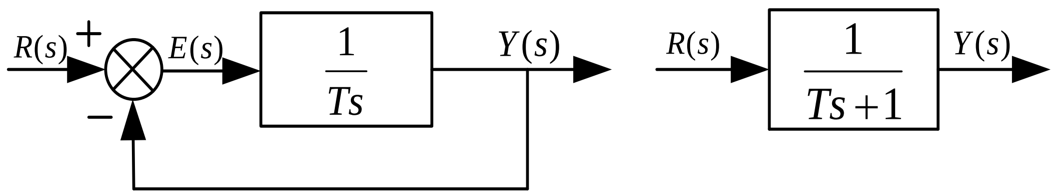
$$e(t)=r(t)-y(t)=T(1-e^{-\frac{1}{T}t})$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=T$$

- 由于系统存在惯性，输出信号滞后于输入信号一个常量*T*，这就是稳态误差产生的原因。

- 显然，减小时间常数T不仅可以加快系统瞬态响应的速度，而且还能减小系统跟踪斜坡输入信号的稳态误差。

一阶系统的单位加速度响应



输入为： $r(t)=\dfrac{1}{2}t^2 \Rightarrow R(s)=\dfrac{1}{s^3}$

输出为：

$$Y(s)=\frac{1}{s^3(Ts+1)}=\frac{1}{s^3}-\frac{T}{s^2}+\frac{T^2}{s}-\frac{T^3}{Ts+1}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2(1-e^{-\frac{1}{T}t})$$

一阶系统的单位加速度响应

相应的系统输入、输出间的误差为：

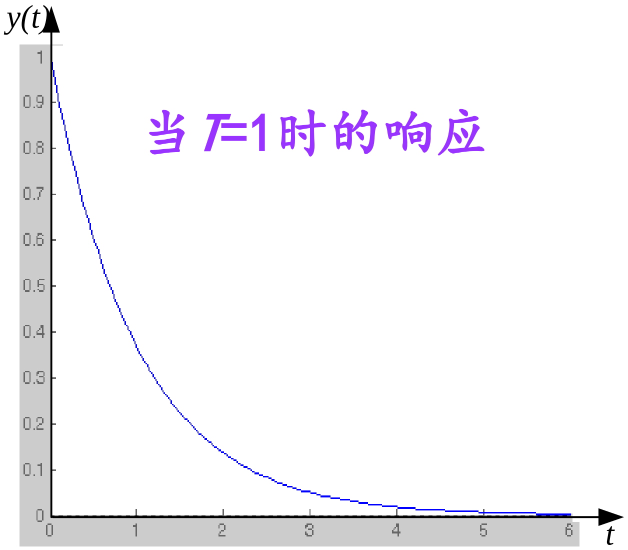
更正教材

$$e(t)=r(t)-y(t)=Tt-T^2(1-e^{-\frac{1}{T}t}) \qquad (3.21)$$

$$\begin{cases} t=0 & \rightarrow \quad e(0)=0 \\ t=\infty & \rightarrow \quad e(\infty)=\infty \end{cases}$$

- 一阶系统不能跟踪加速度输入信号。
- 并不说明稳定性。

一阶系统的单位脉冲响应



输入为： $r(t)=\delta(t) \longrightarrow R(s)=1$

输出为： $Y(s)=W(s)=\dfrac{1}{Ts+1}=\dfrac{1/T}{s+1/T}$

$$y(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$$

鉴于工程上理想单位脉冲函数不可能得到，而是以具有一定脉宽和有限幅度的脉冲来代替。因此，为了得到近似精度较高的脉冲过渡函数，**要求实际脉冲函数的宽度ε与系统的时间常数相比应足够小，一般要求ε<0.1T。**

本节课小结

□ 典型试验信号

阶跃信号、斜坡信号、等加速度信号

脉冲信号、正弦信号

□ 时域响应的构成

暂态分量（自由分量）+稳态分量（强迫分量）

□ 系统性能指标

超调量、延迟时间、上升时间、调节时间

□ 一阶系统的时域分析

单位阶跃响应、单位斜坡响应、单位脉冲响应

习题3.1 设温度计为一阶惯性环节，把温度计放入被测物体内要求在1min时指示响应的98%，求温度计的时间常数。

解：一阶惯性环节的传递函数为 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

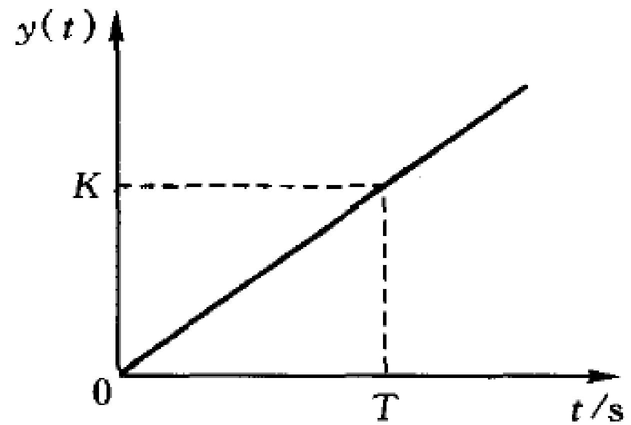
其单位阶跃响应函数为

$$y(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$$

令t=1min，则 $y(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}=0.98$

解得：T=0.256min=15.36s

习题3.2 系统在零初始条件下的脉冲响应函数图如右所示，求它的传递函数。



解：从响应图可知系统的响应函数为

$$y(t)=\frac{k}{T}t$$

传递函数的拉氏反变换即为该系统的脉冲响应函数

因此

$$G(s)=L[y(t)]=\frac{k}{Ts^2}$$

3 补充材料-部分分式展开法

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n}$$

若n＞m，则为真分式。真分式用部分分式展开，需要对分母多项式作因式分解，求出D(s)=0的根。D(s)=0的根可以是单根、共轭复根、重根三种情况。

1 D(s)=0具有单根的情况

如果D(s)=0有n个单根，设n个单根分别是p_1、p_2、…、p_n。于是F(s)可以展开为

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

将上式两边都乘以(s-p1)，得 $(s-p_1)F(s)=K_1+(s-p_1)(\frac{K_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-p_n})$

令 s=p1，得

$K_1=[(s-p_1)F(s)]_{s=p_1}$

同理可求得 K_2、K_3、…、K_n

确定待定系数的公式为

$$K_i=[(s-p_1)F(s)]_{s=p_i}$$

补充材料-部分分式展开法

2 D(s)=0的具有共轭复根的情况

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$p_1=a+j\omega$

$p_2=a-j\omega$

$K_1=[(s-a-j\omega)F(s)]_{s=a+j\omega}$

$K_2=[(s-a+j\omega)F(s)]_{s=a-j\omega}$

3 补充材料-部分分式展开法

3、D(s)=0具有重根的情况

$D(s)$应含$(s-p_1)^n$的因式

现设$D(s)$中含有$(s-p_1)^3$的因式，p_1为$D(s)=0$的三重根，其余为单根，$F(s)$可分解为

$$F(s)=\frac{K_{13}}{s-p_1}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^2}+\frac{K_{11}}{(s-p_1)^3}+\sum_{i=2}^{n}\frac{K_i}{(s-p_i)}$$

$$K_{11}=\left[(s-p_1)^3F(s)\right]_{s=p_1}$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^3F(s)\right]_{s=p_1}$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^3F(s)\right]_{s=p_1}$$