西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

上节课要点复习

□ 典型试验信号

阶跃信号、斜坡信号、等加速度信号

脉冲信号、正弦信号

□ 时域响应的构成

暂态响应（自由分量）+稳态响应（强迫分量）

□ 系统性能指标（暂态）

超调量、延迟时间、上升时间、调节时间

□ 一阶系统的时域分析

单位阶跃响应、单位斜坡响应、单位加速度响应、单位脉冲响应

传递函数的极点和零点对系统时域响应的影响

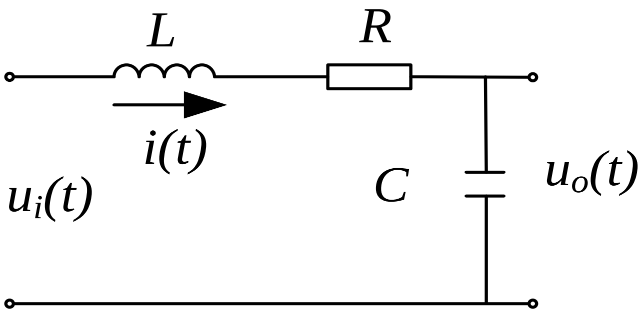
- 传递函数极点，是系统的特征根，决定了系统固有运动模态（暂态响应）。

极点类型	模态
单重实极点 p	e^{pt}
单重共轭复极点$\alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$
r重实极点 p	$e^{pt}, te^{pt}, \ldots, t^{r-1}e^{pt}$
r重共轭复极点$\alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots,$ $t^{r-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{r-1}e^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots,$

- 传递函数零点，影响各个模态在系统响应中的“比重”。零点会削弱极点所产生的模态在系统响应中所占的比重；且距离越近，削弱越大；零极点重合，则该极点所产生的模态为零。

3.3 二阶系统的时域分析

- 用二阶微分方程描述的系统，称为二阶系统。
- 它是控制系统的一种基本组成形式，许多高阶系统在一定条件下常近似地用二阶系统来表征。



$$i(t)=C\frac{du_o(t)}{dt} \qquad \frac{di(t)}{dt}=C\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+RC\frac{du_o(t)}{dt}+u_o(t)=u_i(t)$$

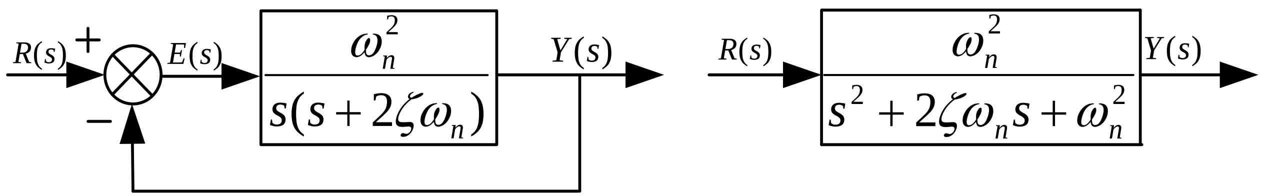
电路复阻抗方式也可获得传递函数

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

3.3 二阶系统的时域分析

二阶系统的单位阶跃响应



标准形式

传递函数为：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ω_n — 无阻尼自然角频率

ζ (Zeta) — 阻尼比或阻尼系数

输入为： $R(s)=\dfrac{1}{s}$

输出为：

$$Y(s)=W(s)R(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}]$$

3.3 二阶系统的时域分析

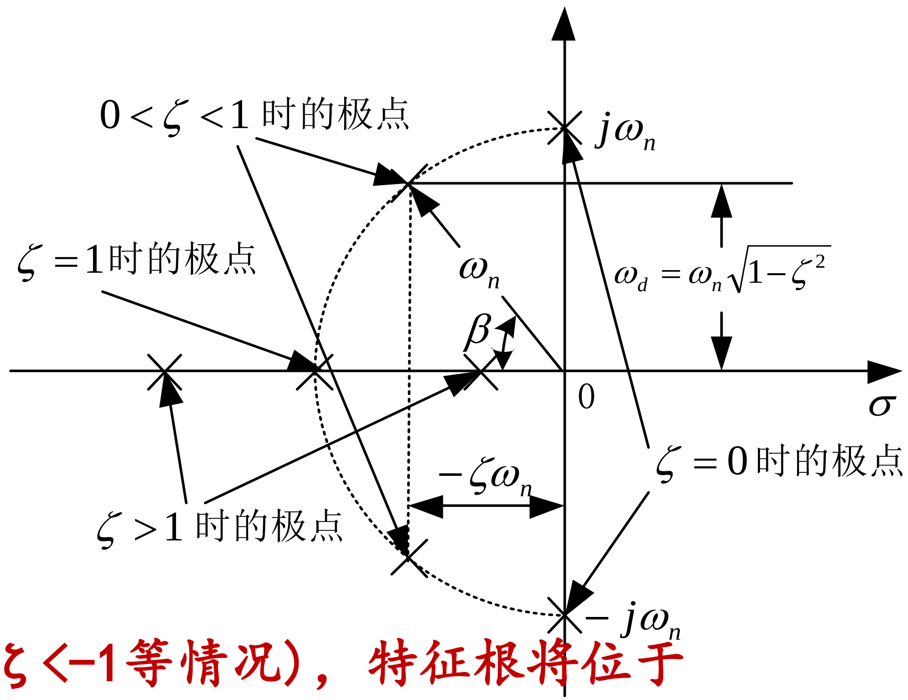
$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

特征方程式与解的对应关系

二阶系统的特征方程式： $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$$s_{1,2}=\begin{cases}\pm j\omega_n, & \zeta=0\\ -\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, & 0<\zeta<1\\ -\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}, & \zeta\geq 1\end{cases}$$



当ξ<0（对应的有−1<ξ<0，ξ=−1，ξ<−1等情况），特征根将位于右半平面（实部为正），对应系统不稳定，不予考虑。

当ξ不同时，特征根有不同的形式，系统的阶跃响应形式也将不同。

3.3 二阶系统的时域分析

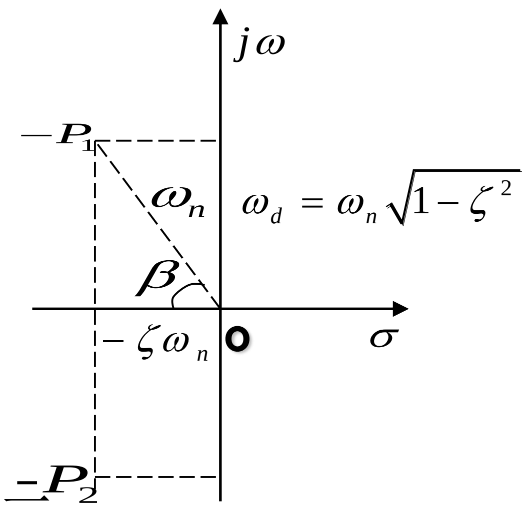
$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的单位阶跃响应

1. $0 < \xi < 1$，欠阻尼

系统在 *S* 平面的左半部有一对共轭复数极点：

$$\begin{cases} -p_1=-\zeta\omega_n+j\omega_d \\ -p_2=-\zeta\omega_n-j\omega_d \end{cases}$$



ω_d和$\zeta\omega_n$与系统参数ω_n和ζ的关系如图所示

$$\beta=\arccos\zeta$$

$$\beta=arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\cos\beta=\zeta$$

阻尼振荡角频率 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

阻尼常数 $\zeta\omega_n$

3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

1. 0 < ξ < 1，欠阻尼

单位阶跃响应为（注意公式零极点与取值之间的正负号关系）：

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s+p_1)(s+p_2)}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^{\ 2}}-\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^{\ 2}}$$

$\pounds^{-1}$ $e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$

$\pounds^{-1}$ $e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t+\zeta\sin\omega_d t)$$

$\sin\beta=\sqrt{1-\zeta^2}$ $\qquad$ $\cos\beta=\zeta$

$\beta=arctg\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $\qquad$ $\beta=\arccos\zeta$

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

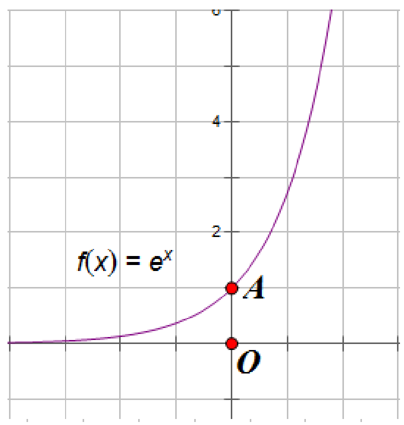
暂态响应为衰减振荡，系统欠阻尼

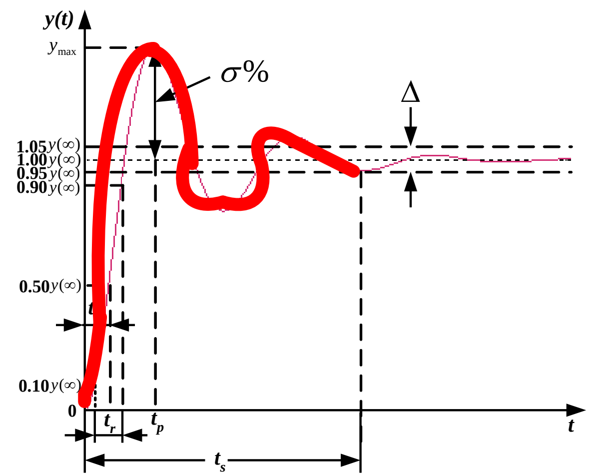
3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

1.　0 < ξ < 1，欠阻尼

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$





当$0<\zeta<1$时，特征方程有一对实部为负的共轭复根，称为欠阻尼系统，系统的阶跃响应为衰减的振荡过程

3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

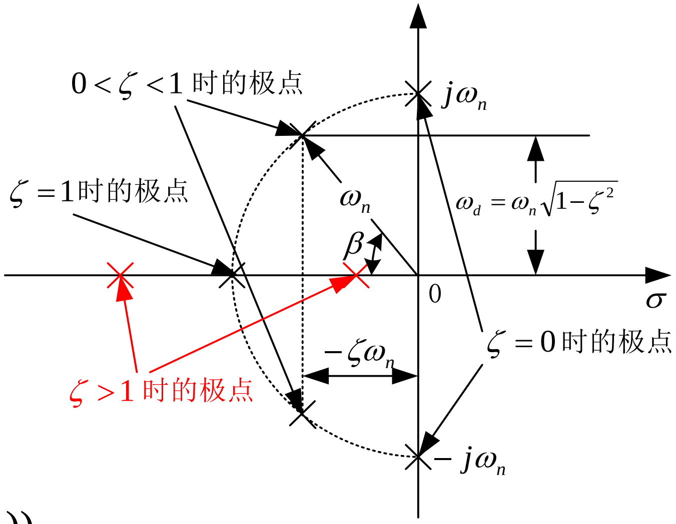
二阶系统的单位阶跃响应

2. ξ ＞ 1，过阻尼

系统有两个负实数极点：
$$\begin{cases}-p_1=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\\ -p_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\end{cases}$$

单位阶跃响应为：

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+p_1)(s+p_2)}=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+p_1}+\frac{A_2}{s+p_2}$$



式中：
$$\begin{cases}A_0=[Y(s)\cdot s]_{s=0}=1\\ A_1=[Y(s)\cdot(s+p_1)]_{s=-p_1}=\omega_n\big/(2\sqrt{\zeta^2-1}\cdot(-p_1))\\ A_2=[Y(s)\cdot(s+p_2)]_{s=-p_2}=-\omega_n\big/(2\sqrt{\zeta^2-1}\cdot(-p_2))\end{cases}$$

3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的单位阶跃响应

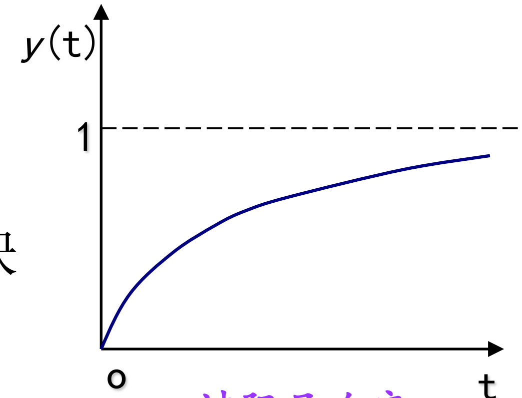
2.　ζ ＞ 1，过阻尼

$$|p_1|<|p_2|$$

$$y(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-p_1 t}}{p_1}-\frac{e^{-p_2 t}}{p_2}\right)$$

$$=1-\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}+\frac{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

$e^{-p_2 t}$比$e^{-p_1 t}$衰减更快



稳态分量为1，瞬态分量包含两个衰减指数项，曲线单调上升。

分析：当 ζ >>1 时，极点$-p_2$比$-p_1$距虚轴远得多，故 $e^{-p_2 t}$ 比$e^{-p_1 t}$衰减快的多，可将二阶系统近似成一阶系统来处理。

当ζ＞1时，特征方程有一对不等的实根，称为过阻尼系统，系统的单位阶跃响应为非振荡过程，无超调，无稳态误差。

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的单位阶跃响应

3. ζ = 1，临界阻尼

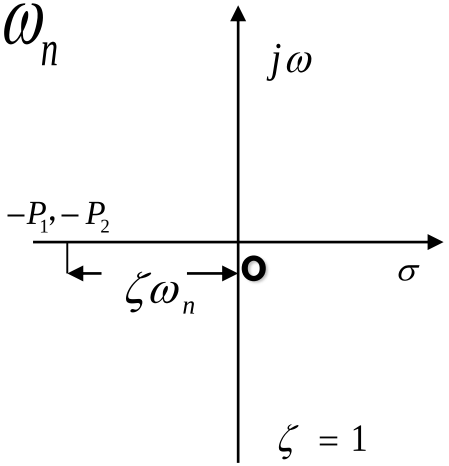
系统有两个相等的负实数极点(重极点)：$-p_{1,2}=-\omega_n$

单位阶跃响应为：

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+\omega_n}+\frac{A_2}{(s+\omega_n)^2}$$

式中：

$$\begin{cases} A_0=[Y(s)\cdot s]_{s=0}=1 \\ A_1=\{\frac{d}{ds}[Y(s)(s+\omega_n)^2]_{s=-\omega_n}=-1 \\ A_2=[Y(s)\cdot(s+\omega_n)^2]_{s=-\omega_n}=-\omega_n \end{cases}$$



临界阻尼时的极点分布

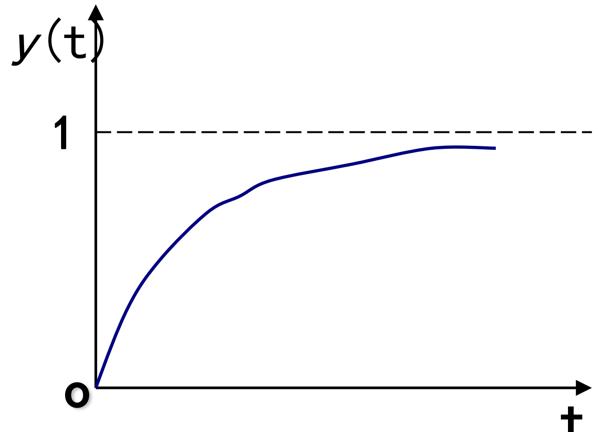
3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的单位阶跃响应

3. ζ = 1，临界阻尼

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}-\omega_n te^{-\omega_n t}$$
$$=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$



临界阻尼响应

系统输出响应无超调、无振荡，由零开始单调上升，最后达到稳态值1，不存在稳态误差。

当$\zeta=1$时，特征方程有一对相等的实根，称为临界阻尼系统，系统的阶跃响应为非振荡过程，ζ=1是输出响应的单调和振荡过程的分界。

二阶系统的单位阶跃响应

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

4. ζ = 0，无阻尼

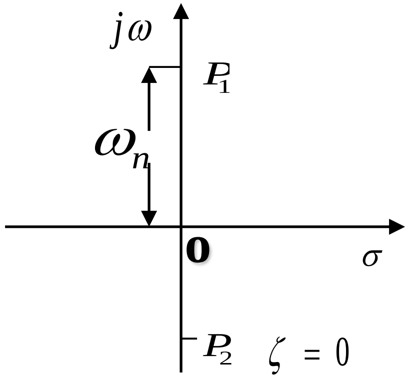
系统有一对共轭纯虚数极点：$-p_{1,2}=\pm j\omega_n$

将ζ=0代入，则：

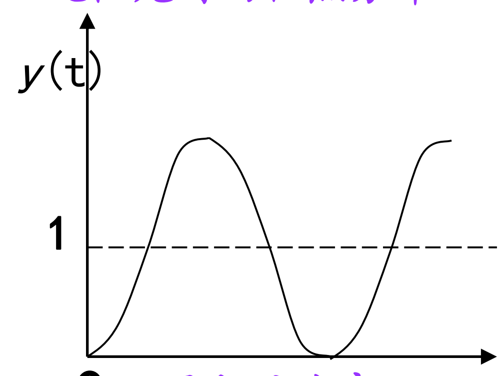
$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

$$=1-\cos\omega_n t$$

系统的输出响应是无阻尼的等幅振荡过程，其振荡频率为 ω_n。



无阻尼时的极点分布



无阻尼响应

当ζ＝0时，特征方程有一对共轭的虚根，称为零(无)阻尼系统，系统的阶跃响应为持续的等幅振荡，ζ=0是系统稳定与不稳定的分界。

3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

二阶系统的单位阶跃响应

5. ζ ＜ 0

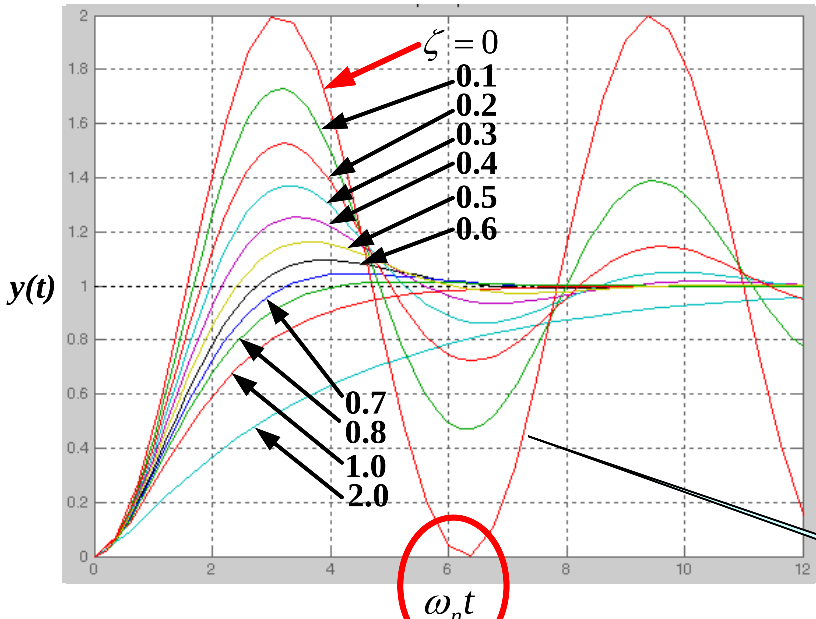
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad -\zeta\omega_n > 0$$

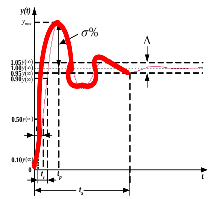
当ζ＜0时，系统两个极点均在右半平面，也就意味着在拉氏反变换的过程中指数上会出现实部为正的次幂，系统的输出值会随着时间的推移呈指数增长，因此系统不稳定。

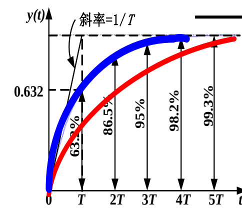
二阶系统的单位阶跃响应

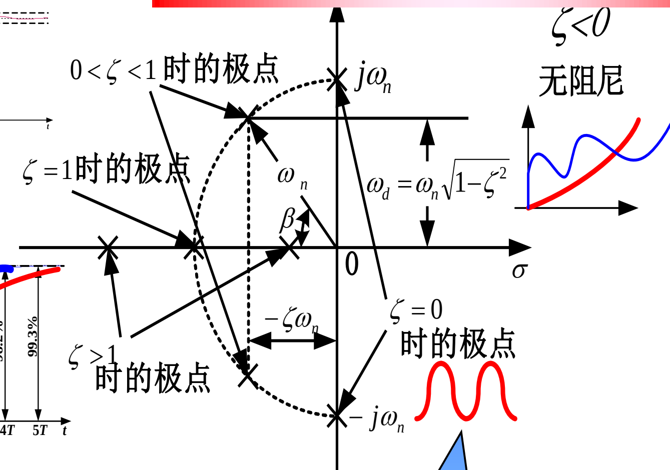
$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ξ ≤ 0系统将不稳定。这里仅讨论ξ > 0的情况









可以看出，阻尼比ξ决定系统响应的模式。

- ξ越小，响应振荡越剧烈，反之响应越显呆滞；
- ξ一定，令T=1/ ω_n ，则T越大，ω_n越小，所需要的t越大，也即 暂态过程越长，所以 T 可以看成为系统的时间常数。

临界稳定实际不能保持长久，属于不稳定范畴

二阶系统的单位阶跃响应

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶无阻尼、欠阻尼、临界阻尼和过阻尼系统。其阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应关系表

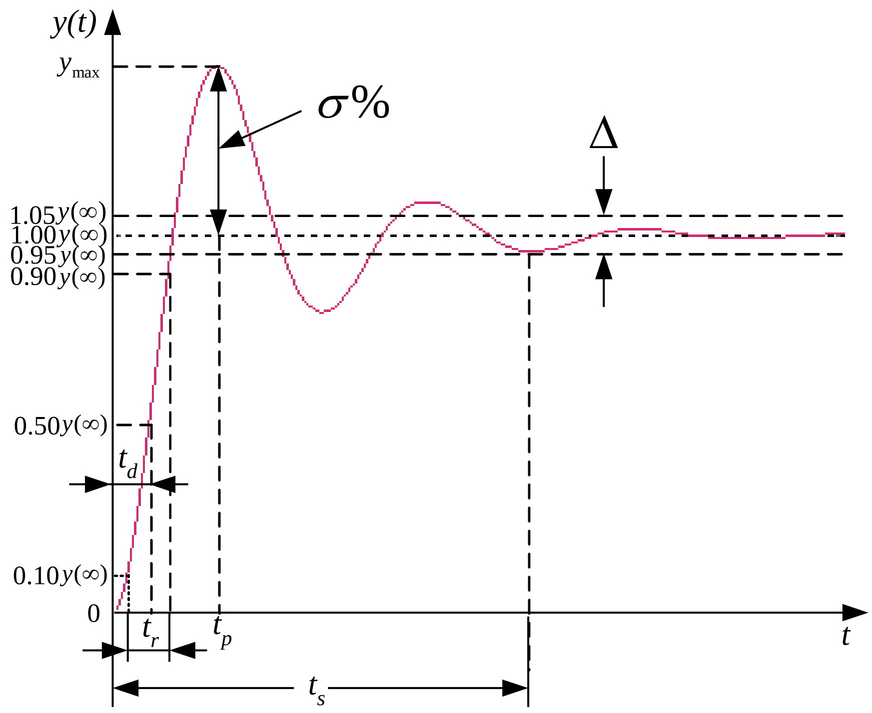
阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta=0$,无阻尼	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$o<\zeta<1$,欠阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta=1$,临界阻尼	$s_{1,2}=-\omega_n$(重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta>1$,过阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\mp\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升

3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

虽然过阻尼和临界阻尼时系统不会发生振荡，但系统达到稳态所需的时间太长。下面针对欠阻尼（0 ＜ ξ ＜ 1）的情况，定量地讨论系统的动态性能指标。



$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

1. 峰值时间 t_p

动态响应第一次出现峰值的时间称为峰值时间。

将式（3.26）对t求导，并令其导数等于0，得：

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta) \quad (3.26)$$

$$\beta=arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\beta=\arccos\zeta$$

$$tg(\omega_d t_p+\beta)=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}=tg\beta$$

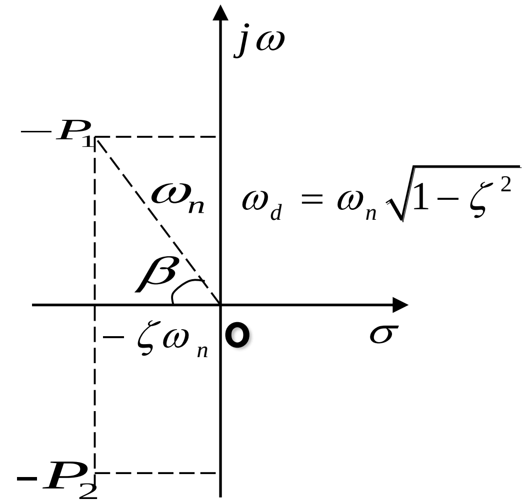
$\omega_d t_p=0$、π、2π、…… 时，上式成立。系统最大的峰值出现在 $\omega_d t_p=\pi$（对应第一个峰值）处，因而得：

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

1. 峰值时间 t_p

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



可见，当ζ一定时，ω_n越大，t_p越小，反应速度越快；反之，ω_n越小，t_p越大，反应速度越慢。由于ω_d是闭环极点虚部的数值，ω_d越大，则闭环极点到实轴的距离越远，因此，也可以说峰值时间t_p与闭环极点到实轴的距离成反比。

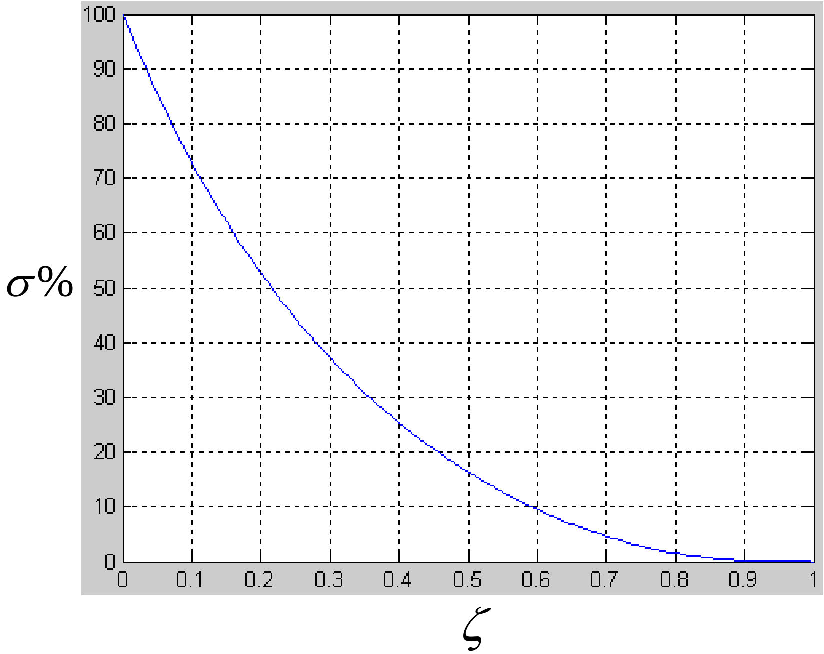
3.3 二阶系统的时域分析

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

2. 超调量 σ

又称最大超调量，反映系统响应振荡的剧烈程度。



将 t_p 代入式（3.26）得 y_{max}，

且 $y(\infty)=1$，则：

$$\sigma=\frac{y_{\max}-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100\%$$

$$=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$$

最大超调量仅与阻尼系数ξ有关

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

3. 调节时间 t_s

响应y(t)和稳态值y(∞)之间误差达到规定允许值Δ，且以后不再超过Δ所需的最短时间。

$$\left|\frac{y(t_s)-y(\infty)}{y(\infty)}\right|=\Delta \xrightarrow{y(\infty)=1} \left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t_s+\beta)\right|=\Delta$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_s}=\Delta$$

$$\Rightarrow t_s=\frac{-\ln(\Delta\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} t_s\approx\dfrac{3}{\zeta\omega_n} & \Delta=0.05 \\ t_s\approx\dfrac{4}{\zeta\omega_n} & \Delta=0.02 \end{array}}$$

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

4. 上升时间 tr

阶跃响应从稳态值10%第一次达到稳态值90%所需的时间。

精确定义，近似计算，公式难记。

$$t_r \approx \frac{0.8+2.5\zeta}{\omega_n} \quad \text{（一阶近似）}$$

$$t_r \approx \frac{1-0.4167\zeta+2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad \text{（二阶近似）}$$

阶跃响应第一次达到稳态值时所需的时间。

近似定义，精确计算，公式好记。

$$t_r=\frac{\pi-arctg\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

二阶系统的性能指标计算

5. 延迟时间 td

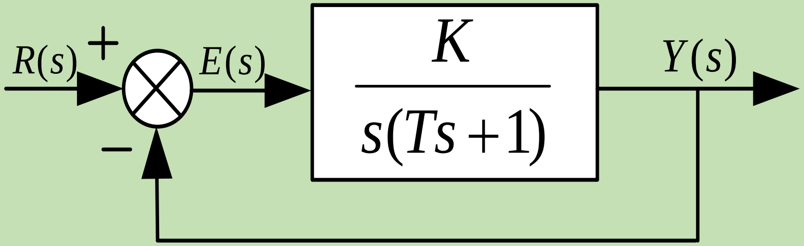
系统阶跃响应达到稳态值的50%所需的时间。

$$t_d \approx \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} \quad \text{（一阶近似）}$$

$$t_d \approx \frac{1.1+0.125\zeta+0.469\zeta^2}{\omega_n} \quad \text{（二阶近似）}$$

增大阻尼比 ζ 将会使上升时间 t_r 和延迟时间 t_d 延长，系统响应的起始部分趋于缓慢。

例3.1： 已知系统结构图，



求①系统参数 ω_n 和 ζ

②动态性能指标（△=0.02）

③采用速度反馈，反馈通道传递函数H(s)=1+0.0625s，重复计算以上内容。

K=16 s^{-1} T=0.25 s

解：

系统闭环传递函数

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

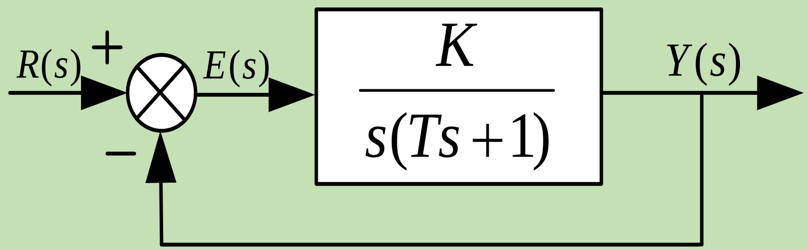
$$W(s)=\frac{K}{Ts^2+s+K}=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$$

例3.1： 已知系统结构图，

求①系统参数 ω_n和ζ

②动态性能指标（△=0.02）

③采用速度反馈，反馈通道传递函数H(s)=1+0.0625s，重复计算以上内容。



$K=16\ s^{-1}$

$T=0.25\ s$

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$W(s)=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$$

①系统参数

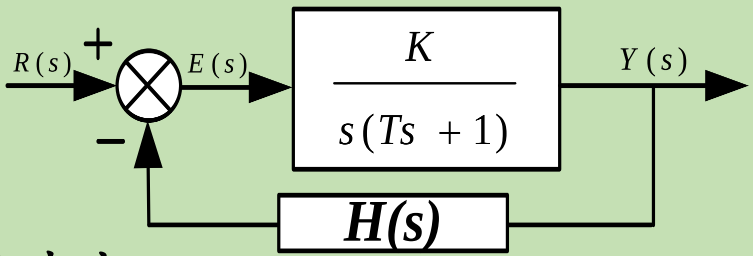
$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n=\dfrac{1}{T} \\ \omega_n^2=\dfrac{K}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{T}}=\sqrt{\dfrac{16}{0.25}}=8\ rad/s \\ \zeta=\dfrac{1}{2\sqrt{KT}}=\dfrac{1}{2\sqrt{16\times 0.25}}=0.25 \end{cases}$$

②动态性能指标

$$\sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=e^{-\frac{3.14\times 0.25}{\sqrt{1-0.25^2}}}\times 100\%=44.5\%$$

$$t_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.25\times 8}=2.0s \qquad (\Delta=0.02)$$

例3.1： 已知系统结构图，
求①系统参数 ω_n和ζ
②动态性能指标（△=0.02）
③采用速度反馈，反馈通道传递
函数H(s)=1+0.0625s，重复计算以上内容。



K=16 s^{-1}

T=0.25 s

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

③采用速度反馈

$$H(s)=1+hs,\qquad h=0.0625$$

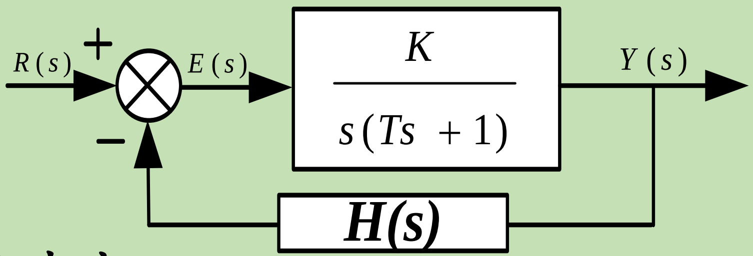
系统闭环传递函数

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{K}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{K}{s(Ts+1)}(1+hs)}$$

$$=\frac{K}{Ts^2+(1+Kh)s+K}=\frac{K/T}{s^2+\dfrac{(1+Kh)}{T}s+K/T}$$

3.3 二阶系统的时域分析

例3.1： 已知系统结构图，
求①系统参数 ω_n和ζ
②动态性能指标（△=0.02）
③采用速度反馈，反馈通道传递
函数H(s)=1+0.0625s，重复计算以上内容。



$K=16\ s^{-1}$

$T=0.25\ s$

③采用速度反馈

$$W(s)=\frac{K/T}{s^2+\frac{(1+Kh)}{T}s+K/T}$$

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

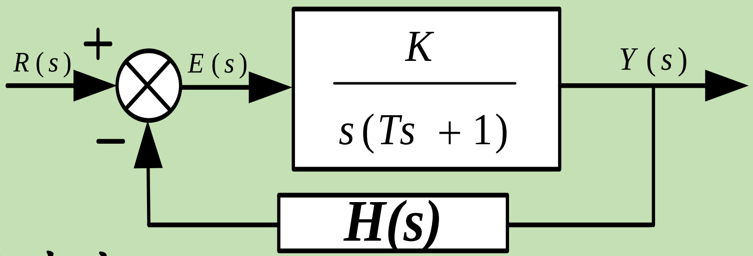
$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}}=\sqrt{\frac{16}{0.25}}=8rad/s$$

$$\zeta=\frac{1+Kh}{2\omega_n T}=\frac{1+16\times0.0625}{2\times8\times0.25}=0.5$$

$$\sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=e^{-\frac{3.14\times0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}}\times100\%=16.3\%$$

$$t_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.5\times8}=1.0s \qquad (\Delta=0.02)$$

例3.1： 已知系统结构图，
求①系统参数 ω_n和ζ
②动态性能指标（△=0.02）
③采用速度反馈，反馈通道传递函数H(s)=1+0.0625s，重复计算以上内容。



$K=16\ s^{-1}$

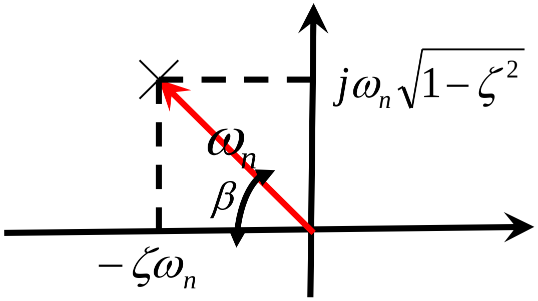
$T=0.25\ s$

单位反馈		采用速度反馈	
$\omega_n = 8\ rad/s$	$\sigma = 44.5\%$	$\omega_n = 8\ rad/s$	$\sigma = 16.3\%$
$\zeta = 0.25$	$t_s \approx 2.0s$	$\zeta = 0.5$	$t_s \approx 1.0s$

速度反馈不改变系统的自然角频率，但却使系统阻尼比增加，起到了降低超调量和减小调节时间、改善系统动态性能的作用。

二阶系统的性能指标计算---说明与总结

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



$\beta=\arccos\zeta$

- 最佳二阶系统：$\zeta=0.707$ $\sigma=4.3\sim4.6\%$

  $$t_s=6T \qquad \Delta=0.02$$

- $\zeta\geq1$，$t_s=(3\sim4)T\approx(3\sim4)/\omega_n$ 过（临界）阻尼， $s_{1,2}$位于负实轴，响应曲线单调收敛，必要时可降为一阶系统处理。

- $0<\zeta<1$，欠阻尼，$s_{1,2}$位于左半S平面，响应曲线振荡收敛，其中超调量和调节时间是两个主要的动态性能指标 。

- $\zeta=0$，无阻尼， $s_{1,2}$位于虚轴，理论上临界稳定，保持等幅振荡，实际不稳定，很快发散。

3.3 二阶系统的时域分析

二阶系统的性能指标计算---说明与总结

阻尼比 ζ 和无阻尼自然角频率 ω_n 是二阶系统两个重要特征参数，它们对系统的性能具有决定性的影响。

- 当保持 ζ 不变时，提高 ω_n 可使 t_r 、t_p、t_s 下降，从而提高系统的快速性，同时保持 σ 不变。
- 当保持 ω_n 不变时，增大 ζ 可使 σ 和 t_s 下降($0 < \zeta < 0.8$)，但使 t_r 和 t_p 上升，显然在系统的振荡性能和快速性之间是存在矛盾的。

要使二阶系统具有满意的动态性能，必须选取合适的阻尼比和无阻尼自振频率。通常可根据系统对超调量限制要求选定 ζ ，然后再根据其它要求来确定 ω_n 。

3.4 高阶系统的时域分析

高阶系统闭环传递函数的一般形式为：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\qquad n\geq m$$

分子分母分解为因式，改写为零、极点形式

$$=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

系统的单位阶跃响应：

$$Y(s)=W(s)R(s)=W(s)\frac{1}{s}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{s\prod_{i=1}^{q}(s+p_i)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2)}$$

式中**$n=q+2r$**，**q**是实极点的个数，**r**是复极点的个数。

用部分分式展开：

$$Y(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{q}\frac{A_i}{s+p_i}+\sum_{k=1}^{r}\frac{B_k(s+\zeta_k\omega_{nk})+C_k\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_{nk}s+\omega_{nk}^2}\qquad A_0=\frac{Kz_1z_2\cdots z_m}{p_1p_2\cdots p_n}$$

3.4 高阶系统的时域分析

输入信号极点对应稳态分量

一阶惯性环节暂态分量

二阶振荡环节暂态分量

系统的单位阶跃响应：

$$y(t)=A_0+\sum_{i=1}^{q}A_i e^{-p_i t}+\sum_{k=1}^{r}B_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cos\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t+\sum_{k=1}^{r}C_k e^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin\omega_{nk}\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t$$

（1）高阶系统时域响应的暂态分量通常由一阶惯性环节和二阶振荡环节的响应分量合成。其中输入信号极点对应的拉氏反变换为系统响应的稳态分量，传递函数极点所对应的拉氏反变换为系统响应的暂态分量。

（2）系统暂态分量的形式由闭环极点性质决定，而系统调节时间的长短与闭环极点负实部绝对值$|\zeta\omega_n|$的大小有关。如闭环极点远离虚轴，则相应的暂态分量就衰减的快，系统调节时间也就较短。而闭环零点只影响系统暂态分量幅值的大小（比重）和符号。

3.4 高阶系统的时域分析

（3）如果闭环传递函数中有一极点$-p_k$ 距坐标原点很远，即有：

$$|-p_k| >> |-p_i| \ , \quad |-p_k| >> |-z_i|$$

则该极点对应的暂态分量不仅持续时间很短，而且其对应的幅值也很小，因而它产生的暂态分量可略去不计。这样可对系统传递函数进行降阶处理，系统降阶时应保持其稳态增益不变。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

降阶

$$W_1(s) = \boxed{\frac{K}{p_k}} \frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n}(s+p_i)}$$

3 3.4 高阶系统的时域分析

如果闭环传递函数中有一极点 p_k 与某一零点 $-z_r$ 十分靠近，即有：

$$\left|-p_k+z_r\right| << \left|-p_i+z_r\right|$$

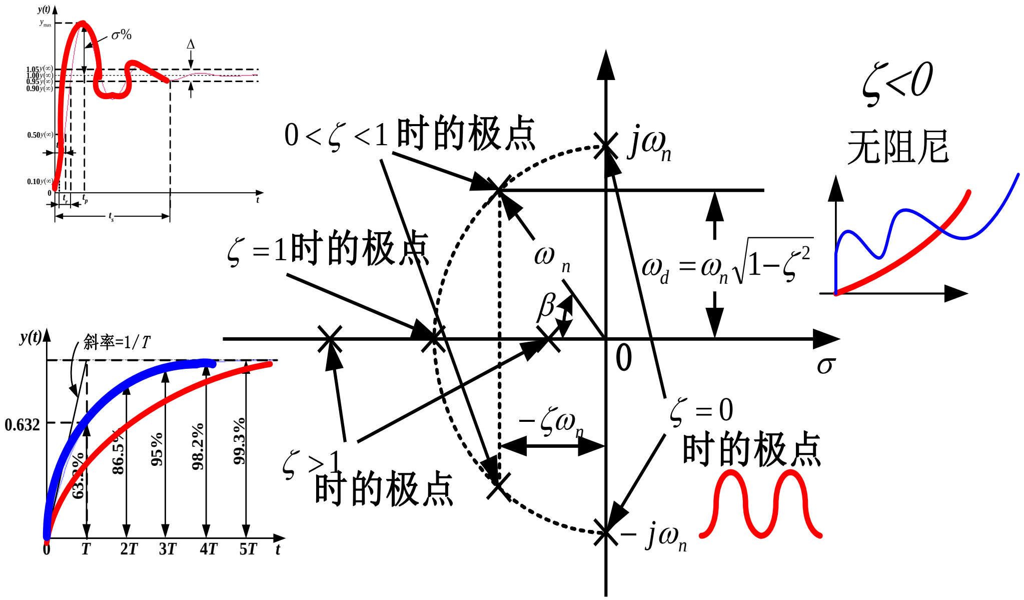
则该极点所对应的暂态分量的幅值很小，因而它在系统响应中所占的比例很小，可忽略不计。同样可对系统传递函数进行降阶处理（同时去掉该零极点对应的部分），系统降阶时保持其稳态增益不变。

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

降阶

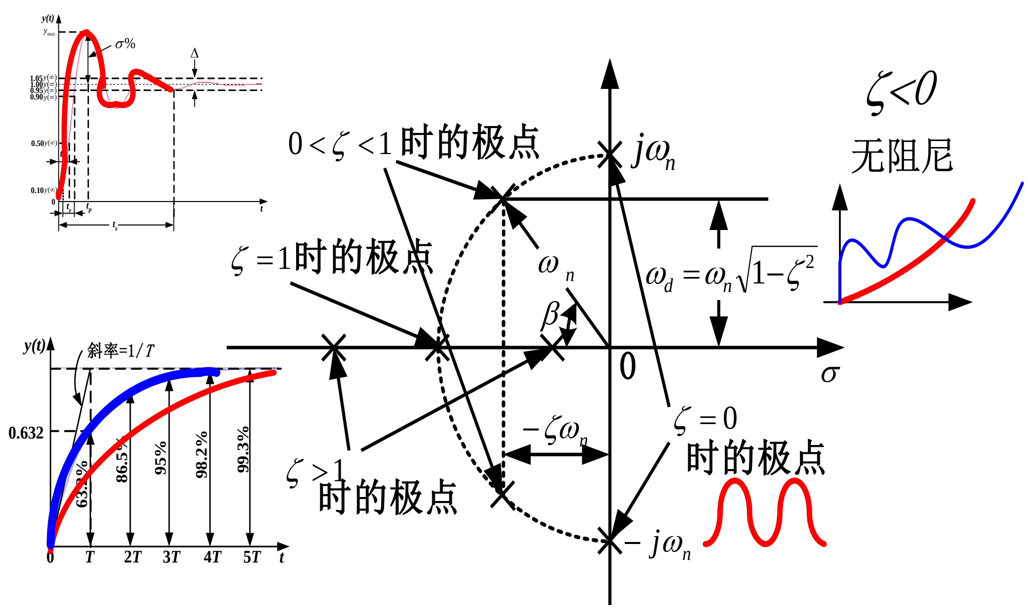
$$W_1(s)=\boxed{\frac{Kz_r}{p_k}}\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{m}(s+z_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(s+p_i)}$$

（4）如果所有的闭环极点均具有负实部，则随着时间的推移，所有的暂态分量将不断地衰减，右端只剩下由输入控制信号的极点所确定的稳态分量项。它表示在过渡过程结束后，系统的被控制量仅与其控制量有关(强迫分量)。闭环极点均位于左半平面的系统，称为稳定系统。稳定是系统能正常工作的首要条件。



3.4 高阶系统的时域分析

（5）如果系统中有一个极点（或一对复数极点）与虚轴的距离较近，且其附近没有闭环零点；而其它闭环极点与虚轴的距离都比该极点与虚轴的距离大5倍以上，则此系统的响应可近似地视为由这个（或这对）极点所产生。因为这种极点所决定的暂态分量不仅持续时间最长，其初始幅值也大，充分体现了它在系统响应中的主导作用，故称其为系统的主导极点。在设计高阶系统时，人们常利用主导极点这个概念来选择系统的参数。



3.4 高阶系统的时域分析

主导极点

例 高阶系统的单位阶跃时域响应分析

$$G_1(s)=\frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)} \qquad G_2(s)=\frac{2\times 10}{(s+10)(s^2+2s+2)}$$

$$y_1(t)=L^{-1}\left[\frac{G_1(s)}{s}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}-\frac{s}{s^2+2s+2}\right]=1-2e^{-t}-\sqrt{2}e^{-t}\sin(t-\frac{\pi}{4})$$

作用≥复数极点
抑制超调

$$\left|2e^{-t}\right|>\left|\sqrt{2}e^{-t}\sin(t-\frac{\pi}{4})\right| \qquad -2e^{-t}\Big|_{t=0}=-2,\quad -\sqrt{2}e^{-t}\sin(t-\frac{\pi}{4})\Big|_{t=0}=1$$

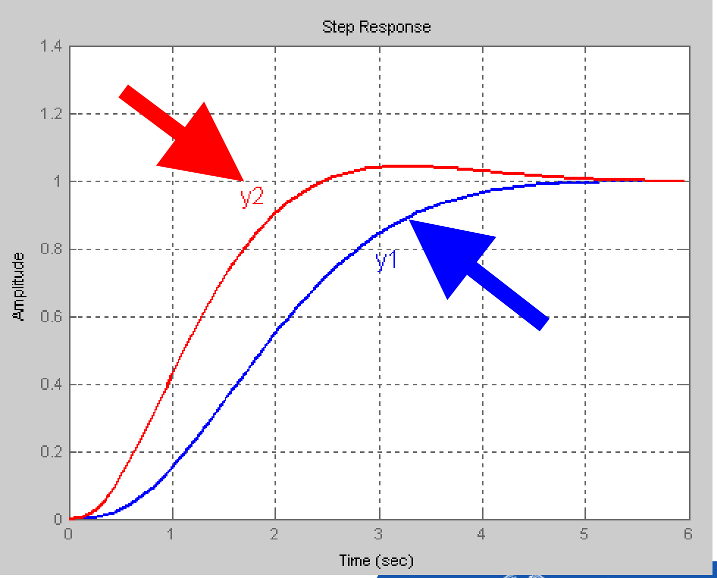
$$y_2(t)=1-\frac{1}{41}e^{-10t}-\sqrt{\frac{100}{41}}e^{-t}\sin(t+\tan^{-1}\frac{4}{5})$$

$$\frac{1}{41}<<\sqrt{\frac{100}{41}};\ e^{-10t}\downarrow>>e^{-t}\downarrow$$

在响应中的
作用可以忽
略

$$\frac{1}{41}e^{-10t}\Big|_{t=0}=-0.02$$

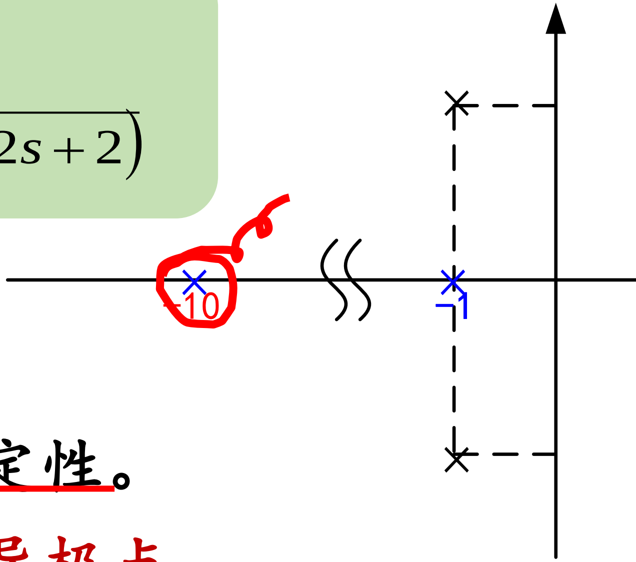
$$-\sqrt{\frac{100}{41}}e^{-t}\sin(t+\tan^{-1}\frac{4}{5})\Big|_{t=0}=-0.98$$



3 3.4 高阶系统的时域分析

例 高阶系统的单位阶跃时域响应分析

$$G_1(s)=\frac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)} \qquad G_2(s)=\frac{2\times 10}{(s+10)(s^2+2s+2)}$$



则 $G_2(s)$ 可降阶处理：

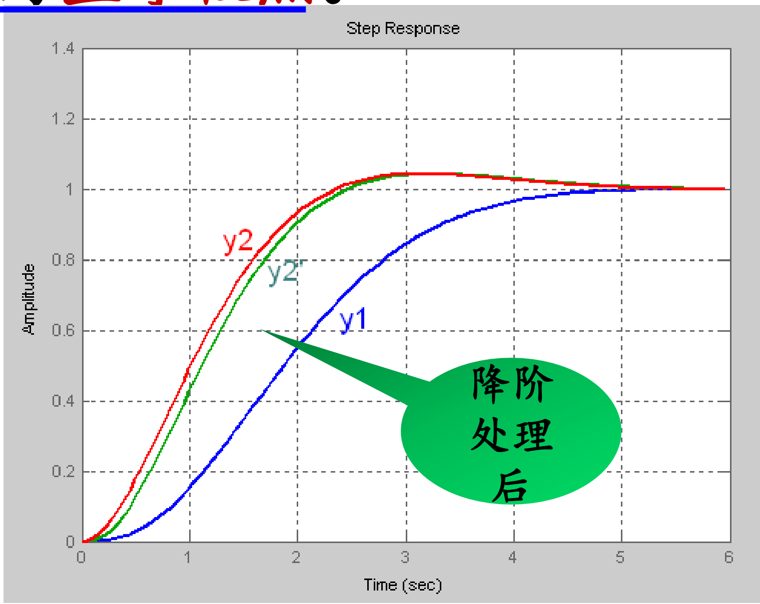
$$G_2^{'}(s)\approx\frac{2\times 10}{10^*（s^2+2s+2）}$$

结论：极点决定动态响应的分量数，决定稳定性。

最靠近虚轴的极点作用最大，称为主导极点。

若其余极点与主导极点相比与虚轴的距离在5~10倍以上，可以忽略不计。

系统性能由主导极点决定。



例 高阶系统的时域响应分析——传递函数零点的影响

$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)} \qquad R(s)=\frac{1}{s}\to y(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{10/9}{s+1}-\frac{1/9}{s+10}\right]=1-\frac{10}{9}e^{-t}-\frac{7}{9}e^{-10t}$$

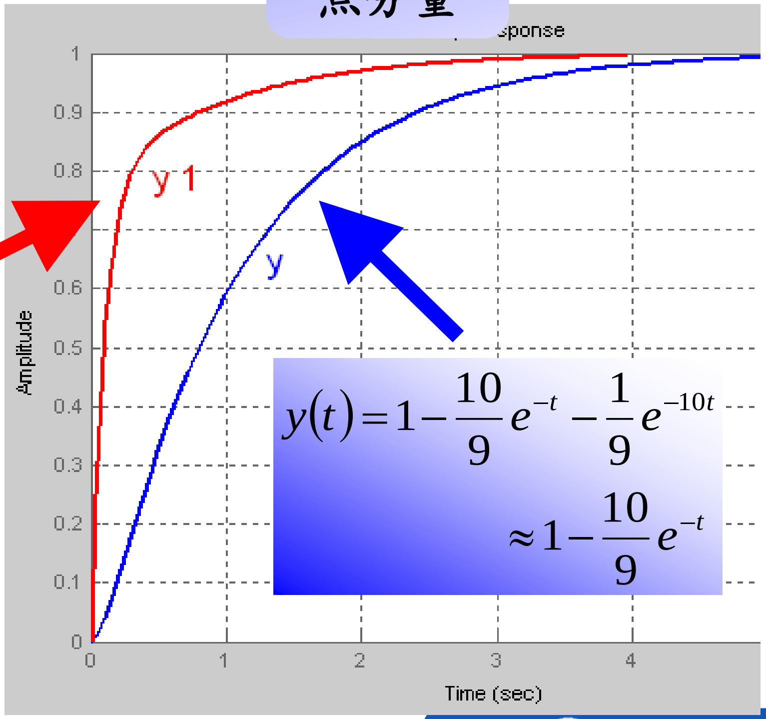
主导极点分量

（1）附加闭环零点的影响

$$G_1(s)=\frac{10\left(\frac{4}{5}s+1\right)}{(s+1)(s+10)}$$

$$y_1(t)=1-\frac{2}{9}e^{-t}-\frac{7}{9}e^{-10t}$$

被外加零点抵消后的主导极点分量



$$y(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}-\frac{1}{9}e^{-10t}\approx 1-\frac{10}{9}e^{-t}$$

3.4 高阶系统的时域分析

例 高阶系统的时域响应分析——传递函数零点的影响

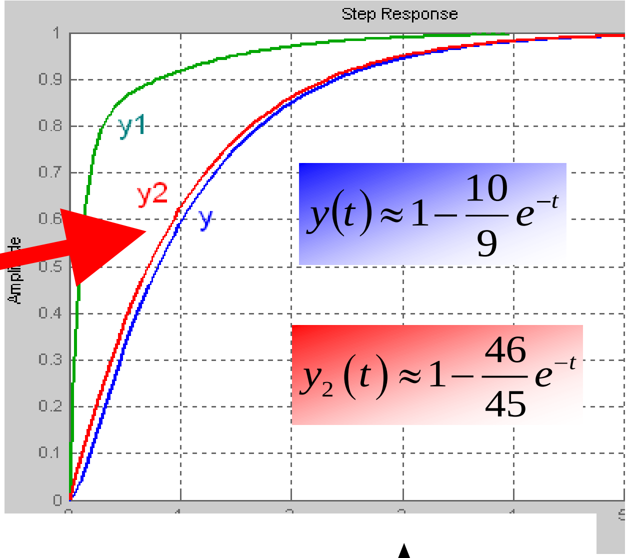
$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)}\qquad R(s)=\frac{1}{s}\rightarrow y(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$G_2(s)=\frac{10\left(\dfrac{4}{50}s+1\right)}{(s+1)(s+10)}$$

抵消非主导极点

$$y_2(t)=1-\frac{46}{45}e^{-t}-\frac{1}{45}e^{-10t}$$

$$\approx 1-\frac{46}{45}e^{-t}$$

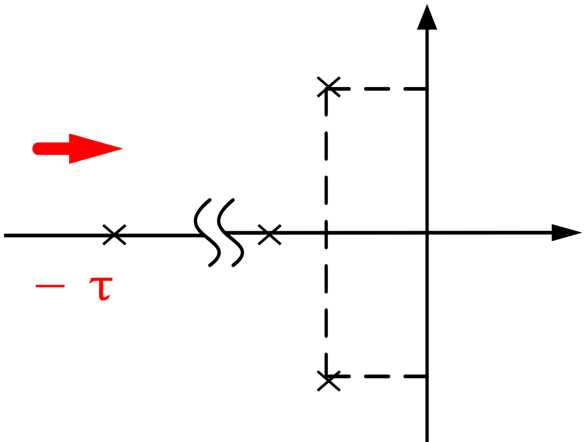


结论

1）附加闭环零点不影响稳定性和动态响应分量数；

2）零点靠近哪个极点将削弱该极点在动态响应中的作用；

3）称相邻的一对零极点为偶极子。



3.4 高阶系统的时域分析

（2） 附加开环零、极点的影响

$$G(s)H(s)=\frac{10(s+\tau)}{(s+1)(s+10)}$$

$$W(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10(s+\tau)}{(s+1)(s+10)+10(s+\tau)}$$

附加开环零点

附加开环极点

$$G(s)H(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)(s+\tau)}$$

$$W(s)=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10}{(s+1)(s+10)(s+\tau)+10}$$

从式中可以看出，增加开环零、极点会改变原系统传递函数的分母，从而改变系统的极点分布。具体影响可用闭环极点移动规律（根轨迹）分析。

本节课小结

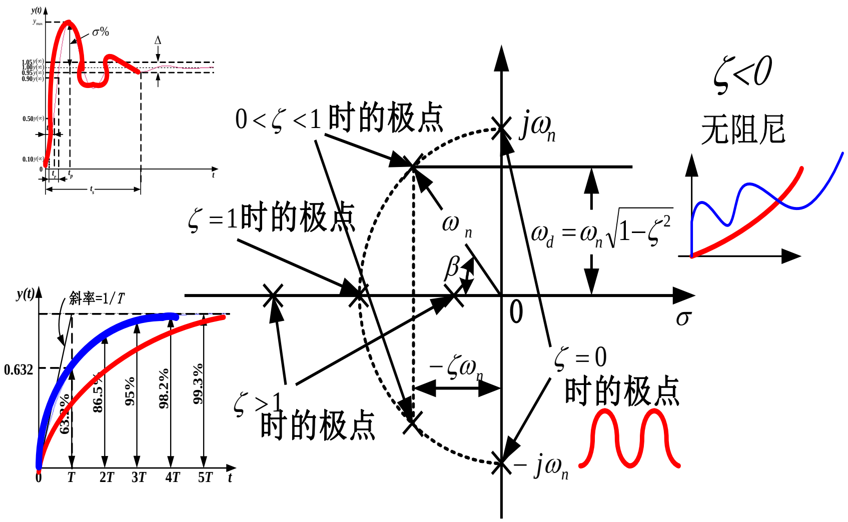
□ 二阶系统的时域分析

单位阶跃响应与根位置的关系

性能指标计算

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



□ 高阶系统的时域分析

传递函数的零极点形式

降阶处理方法

主导极点

作业

- 3.3
- 3.7

写清题号，不用抄题；