西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论

Automatic Control Theory

工业自动化系

3 上节课要点复习

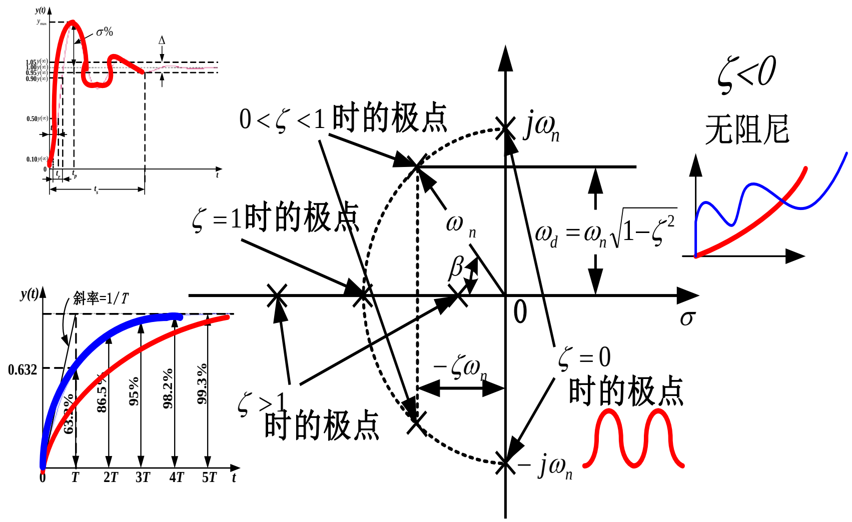
◻ 二阶系统的时域分析

单位阶跃响应与根位置的关系

性能指标计算

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



◻ 高阶系统的时域分析

传递函数的零极点形式

降阶处理方法

主导极点

3.5 线性系统的稳定性分析

- 稳定是控制系统正常工作的首要条件，也是控制系统的一个重要性能。

- 控制系统稳定性的严格定义和理论阐述是俄国学者李雅普诺夫于1892年提出的，它主要用于判别时变系统和非线性系统的稳定性(Stability)。

- 本课程仅讨论线性定常系统稳定性的初步概念、稳定性条件和劳斯稳定判据。

稳

3.5 线性系统的稳定性分析

稳定性的基本概念

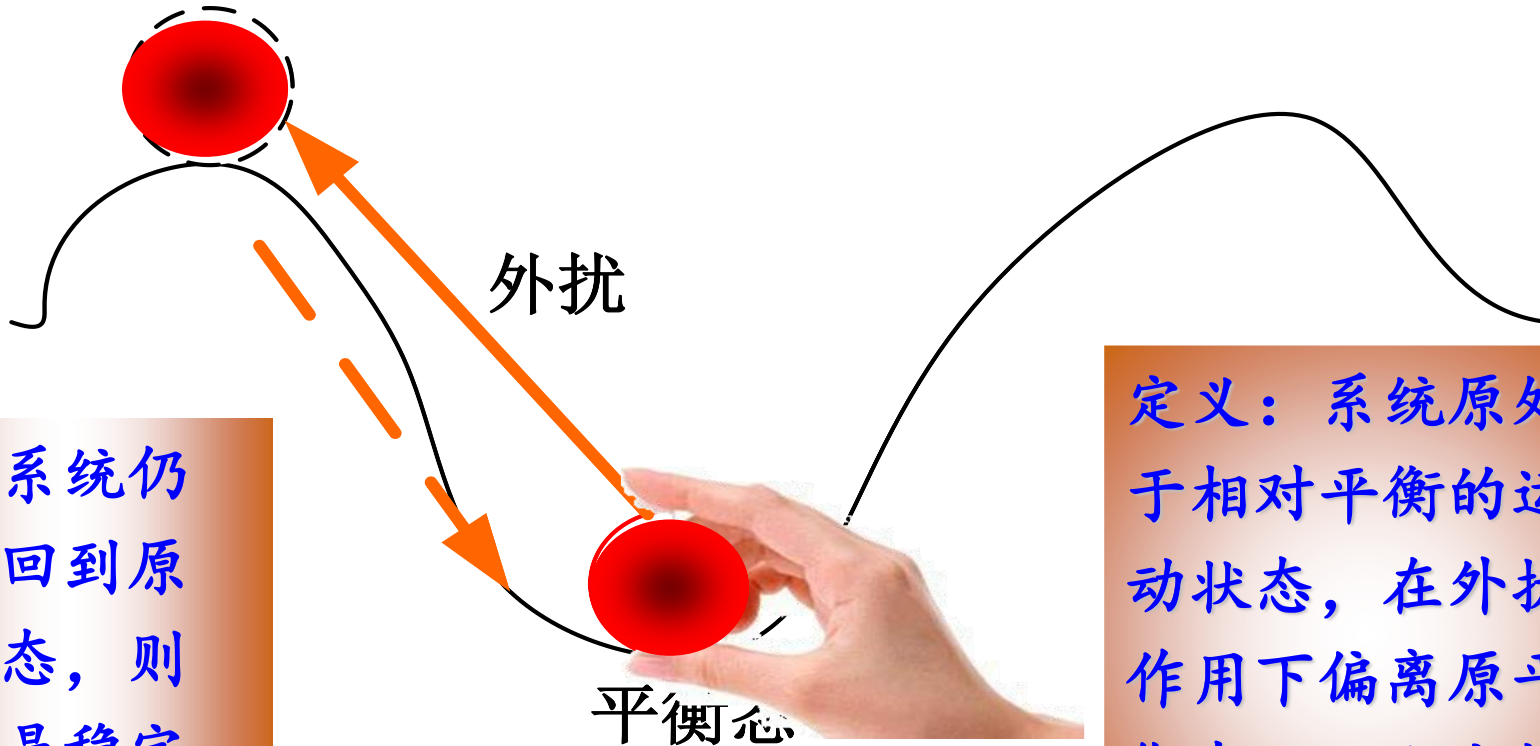
- 设一线性定常系统原处于某一平衡状态，若它瞬间受到某一扰动作用而偏离了原来的平衡状态。当扰动消失后，如果系统仍能回到原有的平衡状态，则称系统是稳定的；反之，系统为不稳定。

- 稳定性是表征系统在扰动消失后自身的一种恢复能力，是系统的一种固有特性。

稳定性仅取决于系统本身的结构、参数

3.5 线性系统的稳定性分析

如果系统仍能够回到原平衡态，则系统是稳定的。



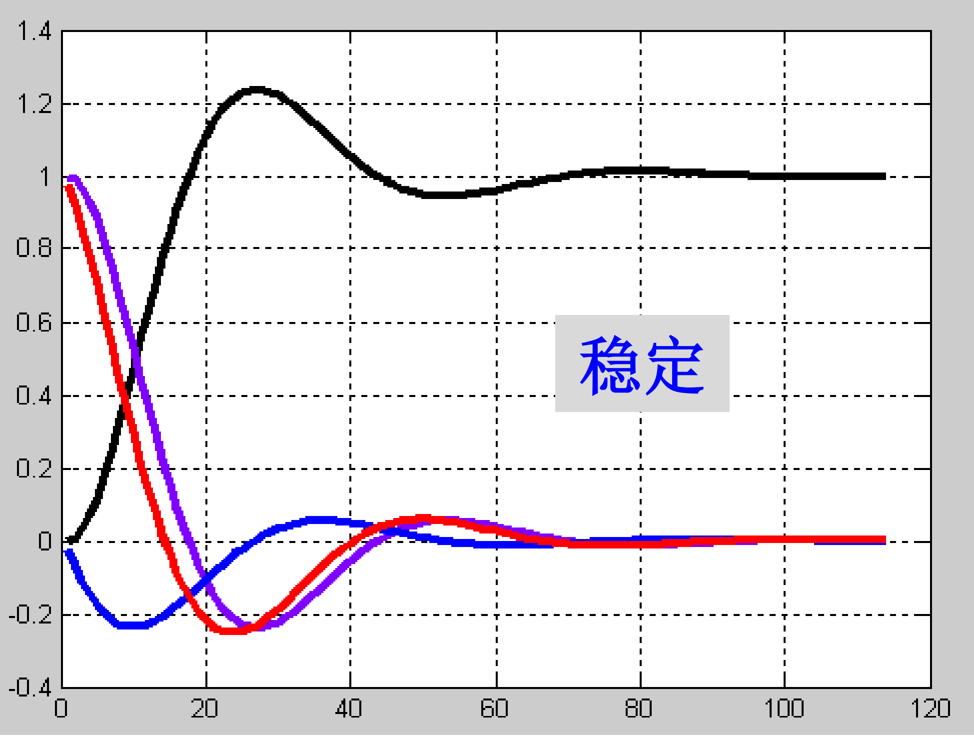
相对平衡态

定义：系统原处于相对平衡的运动状态，在外扰作用下偏离原平衡态，那么当扰动消失后，

3.5 线性系统的稳定性分析

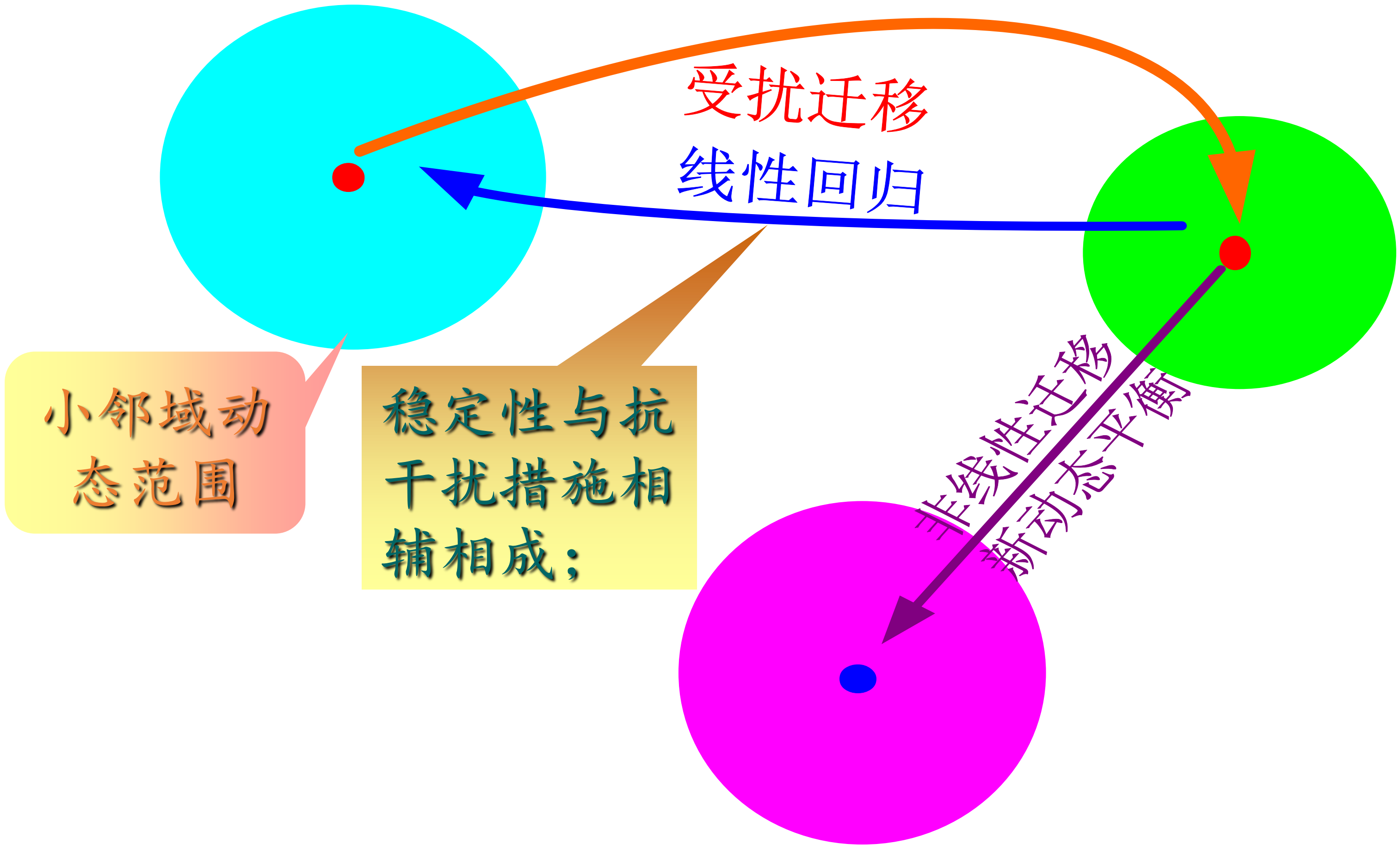
说明：

- 如果外扰不消失，稳定系统的表现应该是与外扰建立新的平衡态，或者处于失衡态。
- 建立动态平衡的关键是系统的工作点(动态平衡点)不能长期波动(飘移)或能够回归原位。



- 稳定的线性系统与非线性系统的区别：
  - ✓ 线性系统：动态平衡点能在扰动消失后回归原位
  - ✓ 非线性系统：存在误差或者在新点建立平衡态
- 详细内容参考李雅普诺夫稳定性和李雅普诺夫方法（课外了解）

3.5 线性系统的稳定性分析



实际系统都是非线性系统，小范围内线性稳定，大范围非线性。本节课研究的是小范围内的线性稳定，在这个范围内，系统可以简化为线性定常系统。

3.5 线性系统的稳定性分析

稳定性的基本概念

- 线性定常系统稳定性表现为其时域响应的收敛性。
- 当把控制系统的响应分为暂态响应和稳态响应来考虑时，若随着时间的推移，其暂态响应会逐渐衰减，系统的响应最终收敛到稳定状态，则称该控制系统是稳定的；而如果暂态响应是发散的，则该系统就是不稳定的。

3.5 线性系统的稳定性分析

线性定常系统稳定的充分必要条件

- 线性系统的特性是由线性微分方程来描述的，而微分方程的解就是系统输出量的时间表达式，它包含两个部分：稳态分量和暂态分量。

- 稳态分量对应微分方程的特解，与外部输入有关；暂态分量对应微分方程的通解，只与系统本身的结构、参数和初始条件有关，而与外部作用无关。

3.5 线性系统的稳定性分析

线性定常系统稳定的充分必要条件

方程： $$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

初始条件： $y(0),\dot{y}(0),\ddot{y}(0),\cdots y^{(n-1)}(0)$ $\quad u(0),\dot{u}(0),\ddot{u}(0),\cdots u^{(m-1)}(0)$

解的结果： $$y(t)=y_t(t)+y_{ss}(t)$$

通解→暂态分量： $$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=0$$

特解→稳态分量： $$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+a_{n-2}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

3.5 线性系统的稳定性分析

线性定常系统稳定的充分必要条件

- 研究系统的稳定性，就是研究系统输出量中暂态分量的运动形式。这种运动形式完全取决于系统的特征方程，这个特征方程反映了扰动消除之后输出量的运动情况。

单输入、单输出线性定常系统闭环传递函数的一般形式为：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

闭环系统的特征方程式为：

$$a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

此方程的根称为特征根，它是由系统本身的结构和参数决定的。

线性定常系统稳定的充分必要条件

- 从常微分方程理论可知，微分方程解的收敛性完全取决于其相应特征方程的根。如果特征方程的所有根都是负实数或实部为负的复数，则微分方程的解是收敛的。

- 控制系统稳定与否完全取决于它本身的结构和参数，即取决于系统特征方程式特征根的实部符号，与系统的初始条件和输入无关。

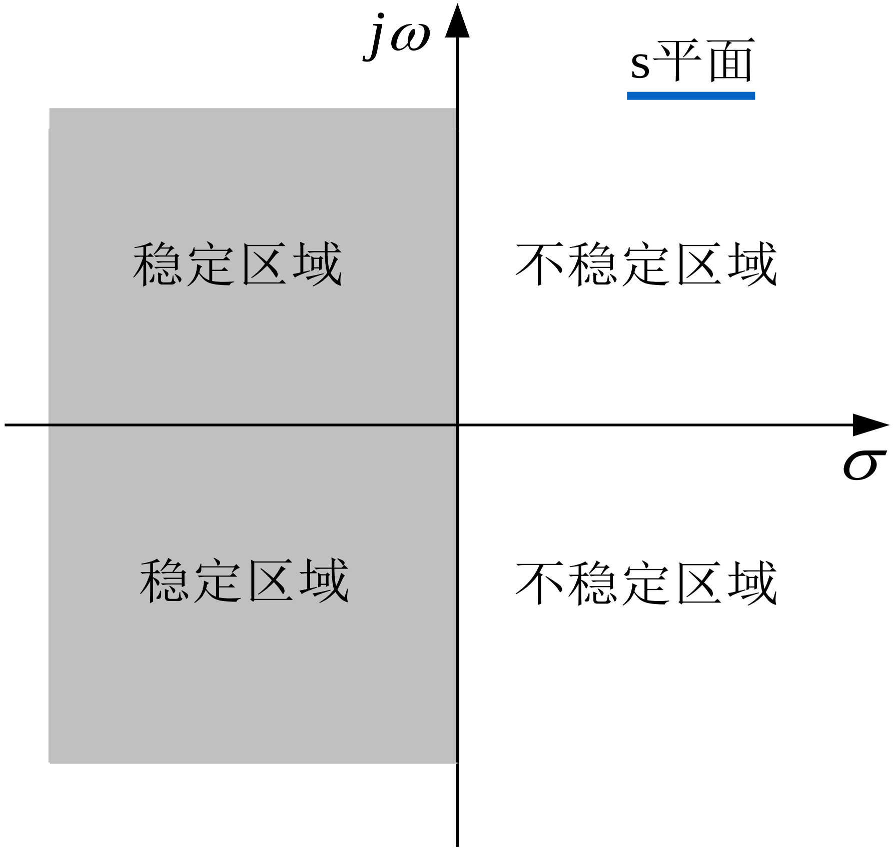
3.5 线性系统的稳定性分析

线性定常系统稳定的充分必要条件

- 特征方程式的所有特征根均为负实根或实部为负的复根，即特征方程式的根均在复平面（简称s平面）的左半平面。

- 由于系统特征方程式根就是系统的（闭环）极点，因此也可以说，线性定常系统稳定的充分必要条件是系统的（闭环）极点均在复平面的左半平面。

线性定常系统稳定的充分必要条件



虚轴存在极点

临界稳定 /临界不稳定

↓

不稳定

劳斯（Routh）稳定判据

- 线性定常系统稳定的充分必要条件

特征根（闭环极点）的位置位于左半平面（根具有负实部 ）（列方程？求特征根？找极点位置？）

- 为了判别系统的稳定性，就要求出系统特征方程的根，并检验它们是否都具有负实部。但是，这种求解系统特征方程的方法，对低阶系统尚可以进行，而对高阶系统，将会遇到较大的困难。

劳斯（Routh）稳定判据

- 人们希望寻求一种不需要求解特征方程就能判别系统稳定性的间接方法——劳斯判据。
- 采用劳斯（Routh）稳定判据，可以不用求解特征方程，而只根据特征方程式的各项系数做简单的代数运算，就可以确定特征方程是否有（以及有几个）正实部的根，以此作为判定系统是否稳定的依据。该判据又称为代数稳定判据。

劳斯（Routh）稳定判据

稳定的必要条件

设系统的特征方程为：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

式中$a_n>0$（当$a_n<0$时，可将方程两边同乘以-1）。

若该方程的特征根为 $-p_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$，该n个根可以是实数也可以是复数，则上式可改写成为：

$$s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n} = (s+p_1)(s+p_2)\ldots\ldots(s+p_n) = 0$$

劳斯（Routh）稳定判据

稳定的必要条件

$$s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+......+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n}=(s+p_1)(s+p_2)......(s+p_n)=0$$

将上式展开：

$$\begin{cases}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=(p_1+p_2+......+p_n)\\[2ex]\dfrac{a_{n-2}}{a_n}=p_1p_2+p_1p_3+......+p_2p_3+p_2p_4+......+p_{n-1}p_n\\[2ex]\qquad ......\\[2ex]\dfrac{a_0}{a_n}=p_1\times p_2\times p_n\end{cases}$$

由此可见，如果特征方程的根$-p_1$，$-p_2$，....，$-p_n$都具有负实部，（即p_1，p_2，....，p_n都具有正实部）则上式的所有系数a_1，a_2，....，a_n必然都大于零（已知$a_n>0$）。

劳斯（Routh）稳定判据

故系统稳定的必要条件是其特征方程的各项系数均为正，即

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

根据必要条件，在判别系统的稳定性时，可事先检查系统特征方程的系数是否都大于零，若有任何系数是负数或等于零，则系统是不稳定的。但是，当特征方程满足稳定的必要条件时，并不意味着系统一定是稳定的，为了进一步确定系统的稳定性，可以使用劳斯判据。

劳斯（Routh）稳定判据

- 控制系统稳定的必要条件是：控制系统特征方程式的所有系数符号相同且不为零（不缺项）（未要求 $a_n>0$ ）。
- 控制系统稳定的充分必要条件：劳斯表中第一列所有元素符号相同。第一列元素符号改变的次数等于实部为正特征根的个数（不稳定极点个数）。

$$D(s)=a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

劳斯（Routh）稳定判据

系统的特征方程为：

$$D(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

已知特征方程系数$\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_{n-1}}$, …., $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_0}$

$$b_1=\frac{-\begin{vmatrix}a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}}{a_{n-1}}\quad b_2=\frac{-\begin{vmatrix}a_n & a_{n-4}\\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}}{a_{n-1}}\quad b_3=\frac{-\begin{vmatrix}a_n & a_{n-6}\\ a_{n-1} & a_{n-7}\end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_1=\frac{-\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-3}\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}{b_1}\quad c_2=\frac{-\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-5}\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}}{b_1}\quad c_3=\frac{-\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-7}\\ b_1 & b_4\end{vmatrix}}{b_1}$$

……

劳斯表（阵列）

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots\\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots\\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots\\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^2 & d_1 & d_2 & d_3 & & \\
s^1 & e_1 & e_2 & & & \\
s^0 & f_1(a_0) & & & &
\end{array}$$

注：$\boldsymbol{f_1=a_0}$，可用来验证劳斯表的计算正确与否。

劳斯（Routh）稳定判据

1）最高次项为偶数次 $D(s)=a_6s^6+a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$b_1=\frac{-(a_6a_3-a_5a_4)}{a_5}$	$b_2=\frac{-(a_6a_1-a_5a_2)}{a_5}$	$b_3=\frac{-(a_6 0-a_5a_0)}{a_5}=a_0$	
s^3	$c_1=\frac{-(a_5b_2-b_1a_3)}{b_1}$	$c_2=\frac{-(a_5b_3-b_1a_1)}{b_1}$	0	
s^2	$d_1=\frac{-(b_1c_2-c_1b_2)}{c_1}$	$d_2=\frac{-(b_1 0-c_1b_3)}{c_1}=b_3=a_0$		
s^1	$e_1=\frac{-(c_1d_2-d_1c_2)}{d_1}$	0		
s^0	$f_1=\frac{-(d_1 0-e_1d_2)}{e_1}=d_2=a_0$			

从高到低
从左到右

负号

补0

分母为上一行
第一个数

0次项（常数项）
系数隔行跳

劳斯（Routh）稳定判据

2）最高次项为奇数次 $D(s)=a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$

s^5 a_5 a_3 a_1

s^4 a_4 a_2 a_0

s^3 $b_1=\frac{-(a_5a_2-a_4a_3)}{a_4}$ $b_2=\frac{-(a_5a_0-a_4a_1)}{a_4}$ 0

s^2 $c_1=\frac{-(a_4b_2-b_1a_2)}{b_1}$ $c_2=\frac{-(a_40-b_1a_0)}{b_1}=a_0$

s^1 $d_1=\frac{-(b_1c_2-c_1b_2)}{c_1}$ 0

s^0 $e_1=\frac{-(c_10-d_1c_2)}{d_1}=c_2=a_0$

从高到低
从左到右

负号

补0

分母为上一行第一个数

0次项（常数项）系数隔行跳

例3.2：应用劳斯判据判断系统稳定性

系统特征方程式为：

$$2s^4+s^3+3s^2+5s+10=0$$

①特征方程系数符号相同且不缺项，满足稳定的必要条件。

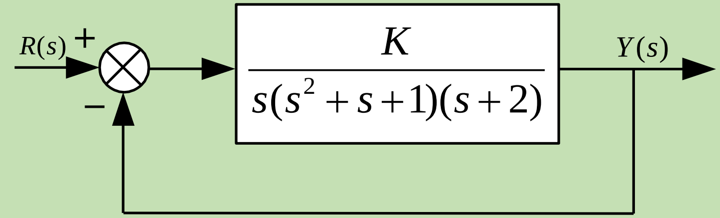
②列劳斯表如

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 2 & 3 & 10 \\
s^3 & 1 & 5 & 0 \\
s^2 & \dfrac{-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}}{1}=-7 & \dfrac{-\begin{vmatrix}2 & 10\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{1}=10 & \\
s^1 & \dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 5\\ -7 & 10\end{vmatrix}}{-7}=\dfrac{45}{7} & 0 & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}$$

③劳斯表的第一列元素符号改变次数为2，所以系统不稳定，有两个特征根的实部为正，即系统含两个不稳定的极点。

例3.2： 应用劳斯判据判断系统稳定性

系统结构图为：



①传递函数为：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

②特征方程为：

$$s^4+3s^3+3s^2+2s+K=0$$

③系统稳定的必要条件是 *K*>0，列劳斯表如

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & K \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & \frac{7}{3} & K & \\
s^1 & 2-\frac{9K}{7} & 0 & \\
s^0 & K & &
\end{array}$$

④由劳斯判据，系统稳定必须满足：

$$K>0,\quad 2-\frac{9K}{7}>0$$

⑤则使系统稳定 *K* 的取值范围是：

$$0<K<\frac{14}{9}$$

应用劳斯稳定判据时的两种特例

构造劳斯表（阵列）时，有时会发生如下两种特殊情况：

（1）第一列出现零元素，但该零元素所在行的其它元素不为零；

对于该种情况，可以用任意小的正数代替第一列中的零元素，继续完成劳斯表。然后，令$\varepsilon \to 0$（小正数），检查表中第一列元素的符号是否相同来判定系统是否稳定。

3.5 线性系统的稳定性分析

例3.4：应用劳斯判据判断系统稳定性

系统特征方程式为：

$$s^4+s^3+2s^2+2s+3=0$$

①特征方程系数符号相同且不缺项，满足稳定的必要条件。

②列劳斯表如

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 2 & 3 \\
s^3 & 1 & 2 & 0 \\
s^2 & 0\to\varepsilon & 3 & \\
s^1 & \dfrac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}\to-\infty & & \\
s^0 & 3 & &
\end{array}$$

③劳斯表的第一列元素符号改变次数为2，所以系统不稳定，有两个特征根的实部为正，即系统含两个不稳定的极点。

应用劳斯稳定判据时的两种特例

（2）全行元素为零。

说明特征方程有对称于复平面原点的根。它们可能是大小相等符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或两对实部相反的共轭复根。这种情况下，系统必然不稳定。

这时可利用前一行的元素作为系数构造辅助方程A(s)=0。将辅助方程对s求导，然后用此系数替换元素为零的那一行，继续完成劳斯表。判定存在几个不稳定的极点。

这里需要指出，辅助方程中只会出现偶次幂，它的根是特征根的一部分。也就是说辅助方程是特征多项式的因子。因此，令A(s)=0可解出此时的特征根。

例3.5：应用劳斯判据判断系统稳定性

系统特征方程式为： $s^5+4s^4+8s^3+8s^2+7s+4=0$

①特征方程系数符号相同且不缺项，满足稳定的必要条件。

②列劳斯表如

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	
s^2	4	4	
s^1	0	0	

$A(s)=4s^2+4=0$

$\frac{d}{ds}A(s)=8s+0$

s^2	4	4
s^1	8	0
s^0	4	

③第一列中元素符号没有改变，说明没有实部为正的特征根，但通过辅助方程A(s)解得两个共轭虚数特征根$s_{1,2}=\pm j$，故系统不稳定。

3.5 线性系统的稳定性分析

例3.5：应用劳斯判据判断系统稳定性

系统特征方程式为： $s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1=0$

①特征方程系数符号相同且不缺项，满足稳定的必要条件。

②列劳斯表

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	4	4	0
s^2	1	1	
s^1	2	0	
s^0	1		

$A(s)=s^4+2s^2+1=0 \quad \Rightarrow \frac{d}{ds}A(s)=4s^3+4s+0$

$A'(s)=s^2+1=0 \quad \Rightarrow \frac{d}{ds}A'(s)=2s+0$

③第一列中元素符号没有改变，说明没有实部为正的特征根，但通过辅助方程*A*´(*s*)（两个辅助方程解相同）解得两个共轭虚数特征根$s_{1,2}=\pm j$，故系统不稳定。

3.5 线性系统的稳定性分析

对系统进行稳定性分析，不仅想知道是否稳定，还想知道稳定性如何（有多大稳定裕度？）

劳斯判据可检验系统是否有一定的稳定裕度，即相对稳定性（Relative Stablity）。

令 s=z-σ1，即把复平面（s平面）虚轴左移σ1

将上式代入系统的特征方程式，得到以z为变量的新特征方程式，然后用劳斯判据检验新特征方程式有没有根位于新虚轴的右边。如果所有根均在新虚轴的左边，则说明系统具有稳定裕量σ1 。

例： 检验特征方程式$2s^3+10s^2+13s+4=0$是否有根在右半平面，并检验有几个根在s=−1的右边

解：列劳斯表为：

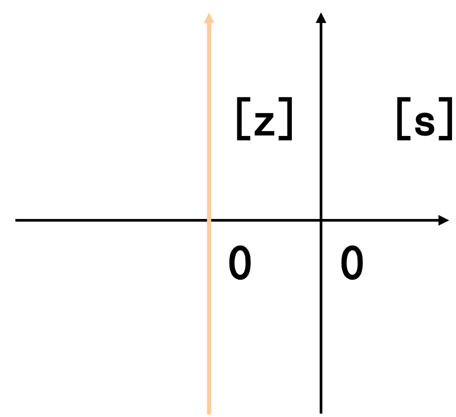
s^3	2	13
s^2	10	4
s^1	12.2	
s^0	4	

第一列无符号改变，故没有根在S右半平面。

令s=z−1，代入特征方程式，得：

$$2(z-1)^3+10(z-1)^2+13(z-1)+4=0$$

$$\Rightarrow \quad 2z^3+4z^2-z-1=0$$



$s=z-1$

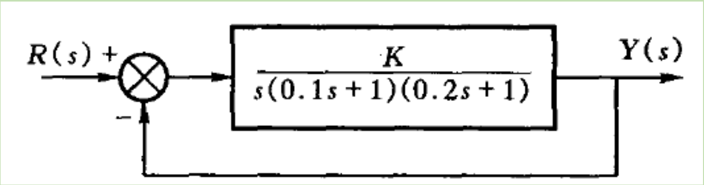
则列劳斯表为：

z^3	2	−1
z^2	4	−1
z^1	−1/2	
z^0	−1	

第一列符号改变一次，故有一个根在直线s=−1(即新坐标虚轴)的右边，因此稳定裕量不到1。

3 习题3.12

系统结构图如右所示，1）K取何值时系统是稳定的；2）若要使闭环特征方程的根全部位于s=-1的左方，k的取值



解： 系统特征方式为： $0.02s^3+0.3s^2+s+k=0$

1）k>0时，所有系数符号相同，且不缺项，满足必要条件

2）列劳斯表

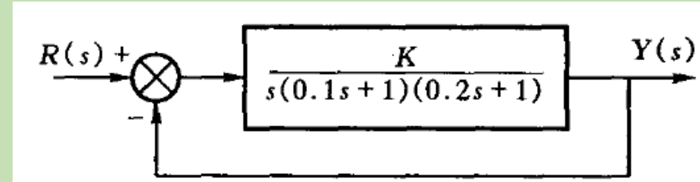
$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 0.02 & 1 \\
s^2 & 0.3 & k \\
s^1 & -\dfrac{(0.02k-0.3)}{0.3} & 0 \\
s^0 & k &
\end{array}$$

系统稳定，则需满足 $k>0\&0.02k-0.3<0$

解得 $0<k<15$

习题3.12

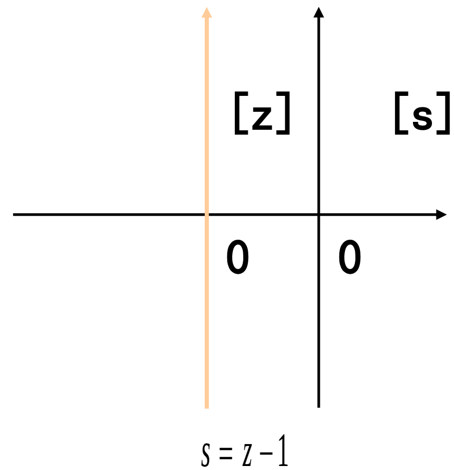
系统结构图如右所示，1）K取何值时系统是稳定的；2）若要使闭环特征方程的根全部位于s=−1的左方，k的取值



解： 令s=z−1，代入得新特征方程 $0.02z^3+0.24z^2+0.46z-0.72+k=0$

列劳斯表

$$
\begin{array}{lcc}
z^3 & 0.02 & 0.46 \\
z^2 & 0.24 & k-0.72 \\
z^1 & \dfrac{0.02k-0.125}{0.24} & 0 \\
z^0 & k-0.72 &
\end{array}
$$



系统稳定，则需满足 $k-0.72>0\&0.02k-0.125>0$

解得 $0.72<k<6.24$

线性系统稳定的充分必要条件

特征方程式的所有根均为负实根或实部为负的复根，即特征方程式的根均位于复平面（s平面）的左半平面。

劳斯(Routh)稳定判据

- ✓ 控制系统稳定的必要条件是：控制系统特征方程式的所有系数符号相同且不为零（不缺项）。
- ✓ 控制系统稳定的充分必要条件是：劳斯表中第一列所有元素符号相同。第一列元素符号改变的次数等于实部为正的特征根的个数（不稳定极点个数）。
- ✓ 应用劳斯稳定判据时的两种特例：①第一列出现零元素，但该零元素所在行的其他元素不为零；②全行元素为零。

作业

- 3.10（1）（5）
- 3.11

写清题号，不用抄题；