西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论（习题课）

第2-4章

Automatic Control Theory

工业自动化系

线性系统的数学模型 02

- 传递函数的定义与物理意义
- 典型环节的数学模型
- 结构图及化简方法
- 信号流图与梅逊公式应用

第2章 线性系统的数学模型 总结

- 控制系统的数学模型：定义、种类（动态、静态）；
- 输入—输出模型：微分方程的建立（分析法、步骤）；
- 传递函数的定义、性质和特点；
- 传递函数的三种形式（多项式、零极点、时间常数）
- 典型系统的传递函数（6种：比例、惯性、振荡、积分、微分、延迟）。

传递函数的几种形式

多项式形式：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

零极点形式

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

时间常数形式

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K'\prod_{j=1}^{m}(T_j s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$$

第2章 线性系统的数学模型 总结

环节名称	传递函数	特点	实例
比例环节 （放大环节）	K	输出量无延迟、无失真地反映输入量变化	电位器（输入电压-输出电压） 晶体管放大器(输入电压-输出电压) 测速机（转速-电压） 齿轮箱（主动轴转速-从动轴转速）
惯性环节 （非周期环节）	$\frac{K}{Ts+1}$	输出量变化落后于输入量的变化	它激直流发电机（激磁电压-电势） *RC*滤波器（电源电压-电容电压）
振荡环节	$\frac{K}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$ $0<\zeta<1$	有两种储能元件，所储能量相互转换	*RLC* 振荡电路（输入电压-输出电压）
积分环节	$\frac{K}{s}$	输出量正比于输入量的积分	传动轴（转速-转角） 积分器 （输入电压-输出电压）
理想微分环节 实际微分环节	Ks $\frac{KTs}{Ts+1}$	输出量正比于输入量的导数	直流测速机（转角-电势） *RC*串联微分电路（电源电压-电阻电压）
延迟环节 （时滞环节）	$Ke^{-\tau s}$	输出量经过延迟 τ 后，才复现输入量	晶闸管整流装置（控制电压-输出电压） 传输带（输入流量-输出流量）

第2章 线性系统的数学模型 总结

□ 线性系统的结构图

是描述系统各元部件之间信号传递关系的图形化数学模型。

作用原理（方框图） + 数学模型 →结构图

□ 结构图的构成

4种元素：信号线、引出点、比较点、方框

□ 结构图的等效变换和简化

串联、并联和反馈连接

比较点和引出点的移动

□ 复杂结构图的简化

解除交叉，变交叉嵌套为层层嵌套

第2章 线性系统的数学模型 总结

□ 线性系统信号流图的定义、构成

节点（源点、汇点、混合节点）、支路、增益、通路、回环、回路增益、前向通道

□ 信号流图的绘制

方框图→信号流图

□ 信号流图求传递函数（梅逊增益公式）

前向通道、前向通道增益、回环、不接触回环、系统特征式、残余流图

$$P=\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

□ 线性控制系统数学模型的建立过程及非线性化（了解）

2.9　已知控制系统结构图如图 2.58 所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数 $Y(s)/R(s)$。

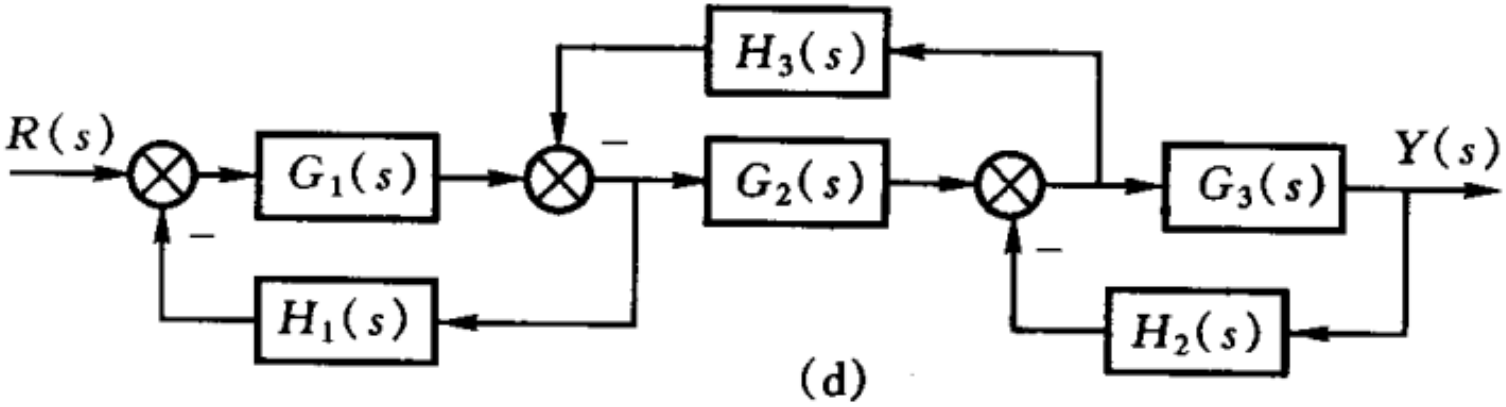
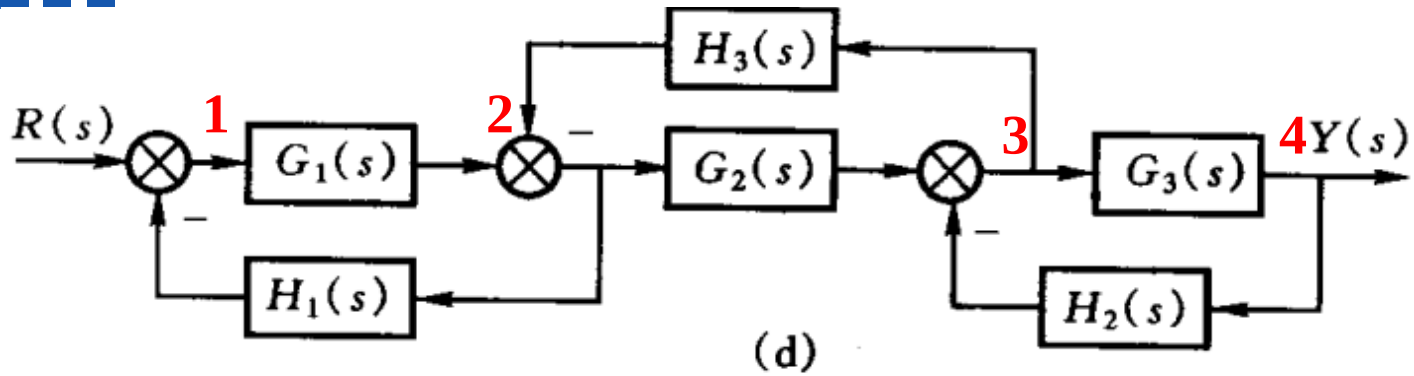


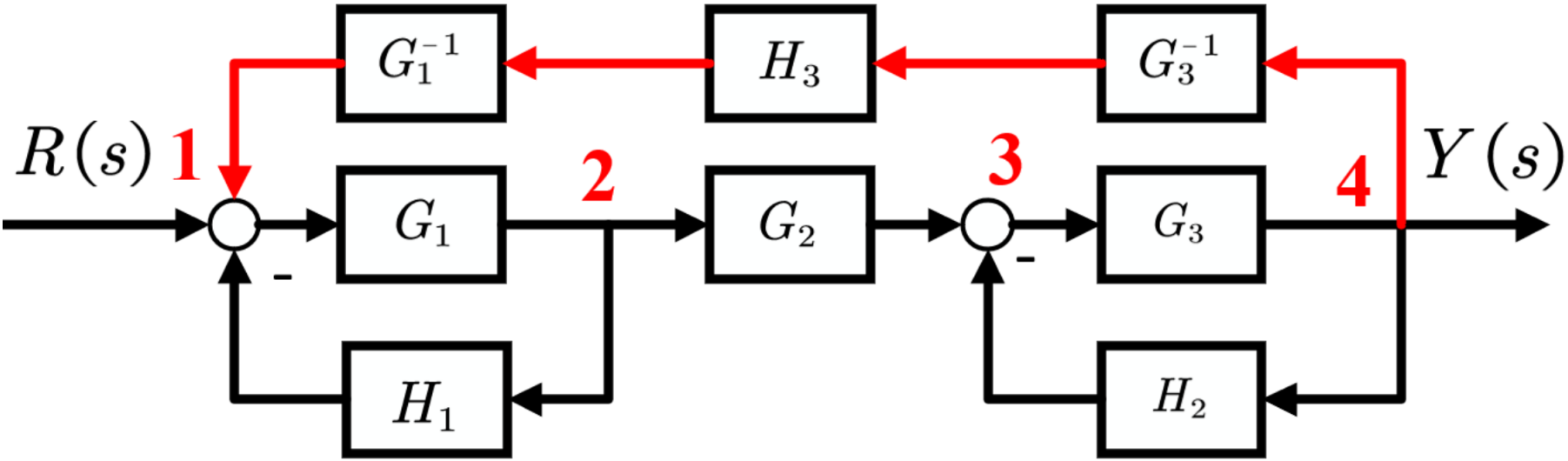
图 2.58　题 2.9 系统结构图

2.1 结构图及化简方法

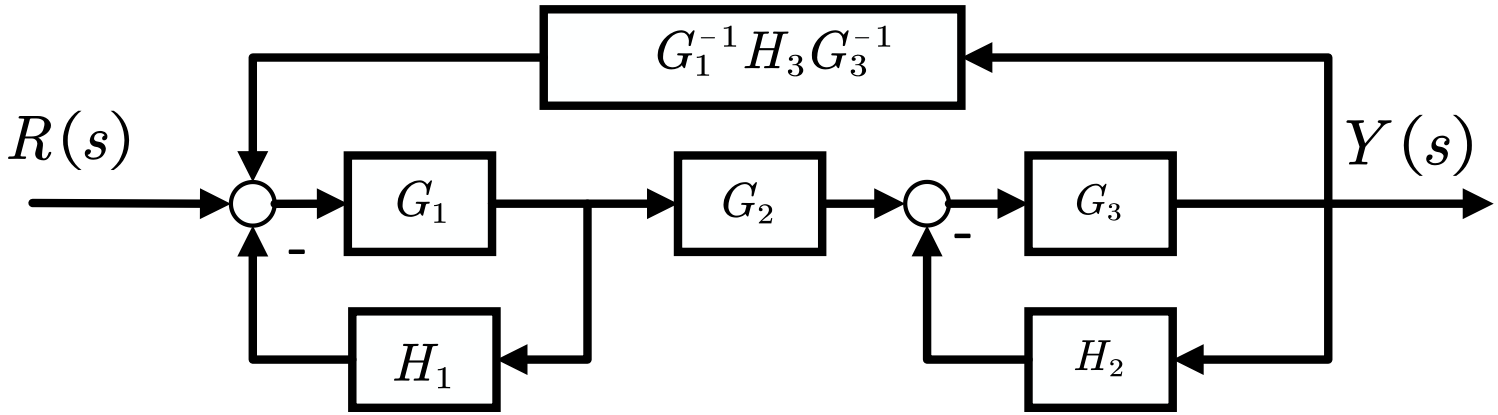


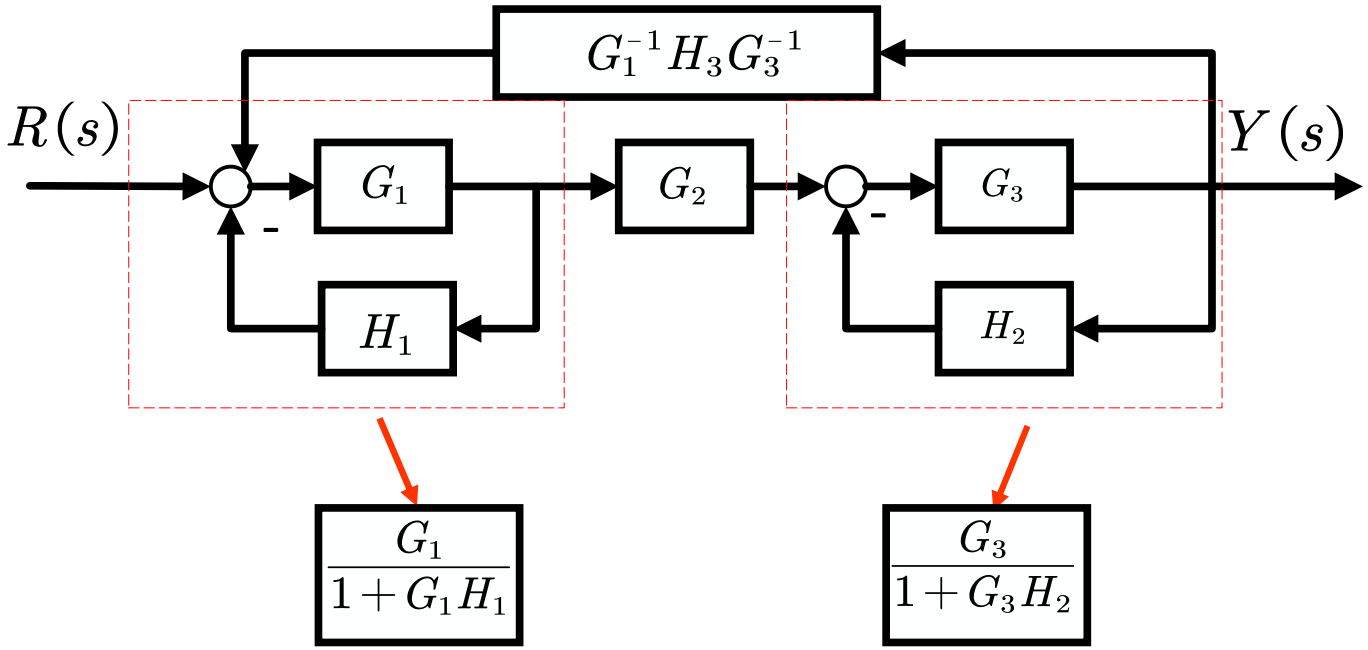
(d)

将2移至1，3移至4：

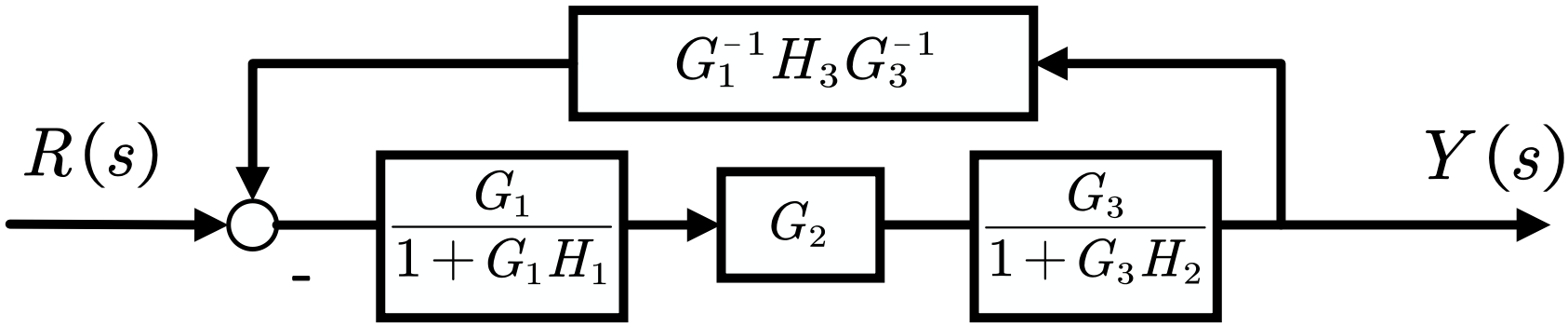


2.1 结构图及化简方法


$G_1^{-1}H_3G_3^{-1}$
$R(s)$
$Y(s)$
G_1
G_2
G_3
H_1
H_2
-
-

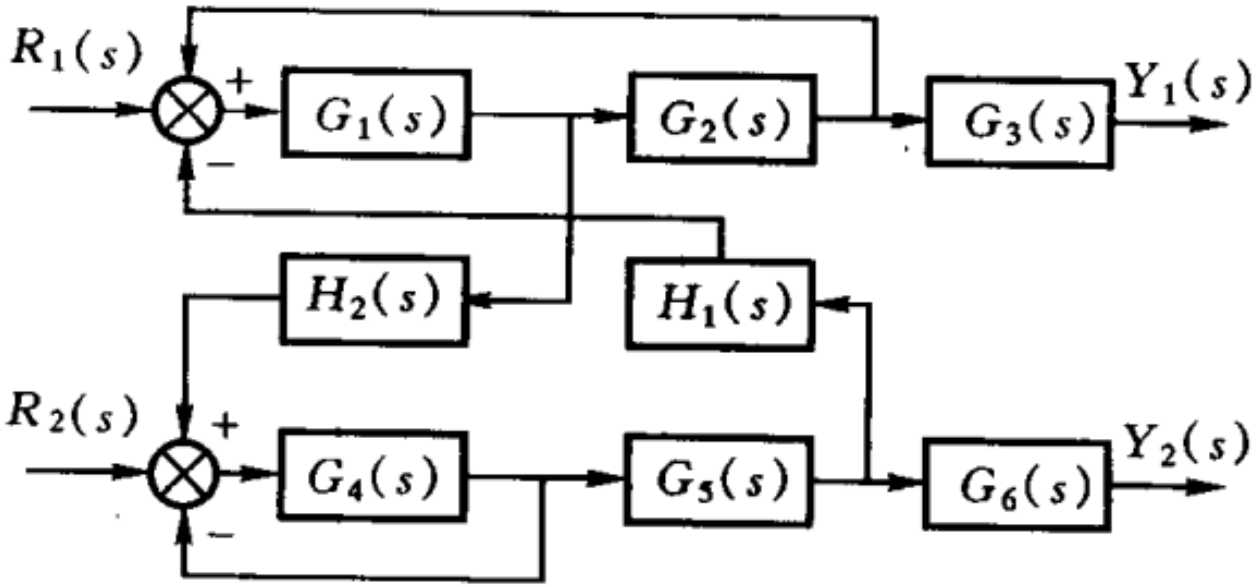

$G_1^{-1}H_3G_3^{-1}$
$R(s)$
$Y(s)$
G_1
G_2
G_3
H_1
H_2
-
-
$\frac{G_1}{1+G_1H_1}$
$\frac{G_3}{1+G_3H_2}$

化简结构图得：



$$(d)\quad \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)H_1(s)+G_3(s)H_2(s)+G_2(s)H_3(s)+G_1(s)G_3(s)H_1(s)H_3(s)}$$

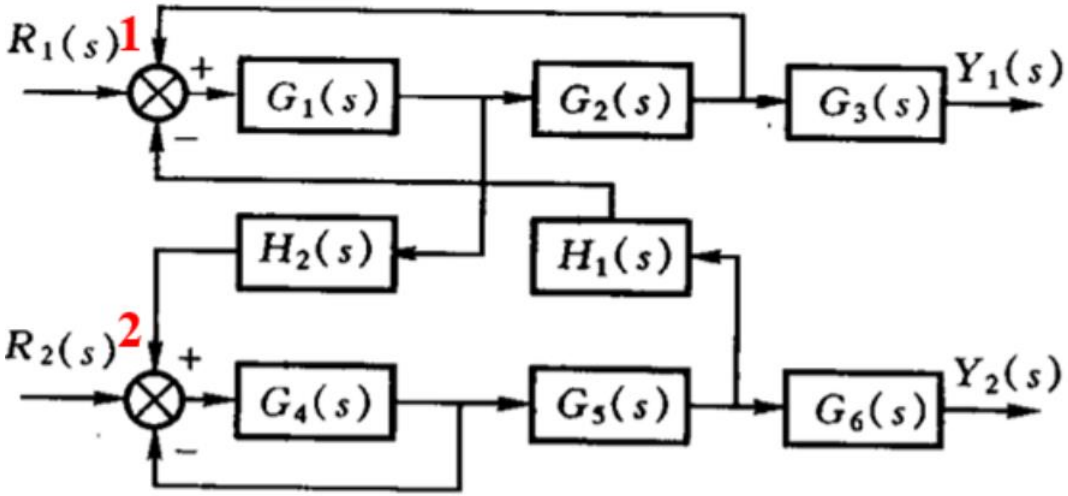
2.9　已知控制系统结构图如图 2.58 所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数 $Y(s)/R(s)$。



(g)

图 2.58　题 2.9 系统结构图

2.1 结构图及化简方法



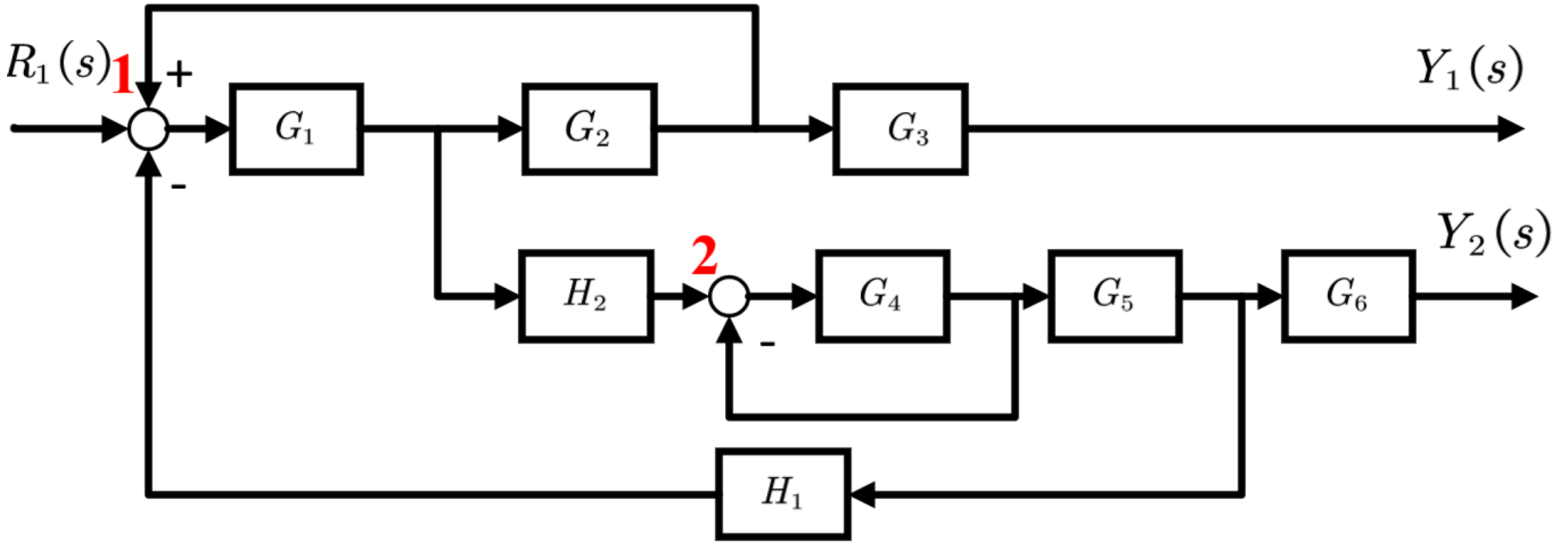
(g)

该系统为两入两出系统，根据叠加原理，可分别令R1（s）=0，R2（s）=0，得到四个传递函数。

令$R_2(s)$输入为0，考虑 $\frac{Y_1}{R_1}$ $\frac{Y_2}{R_1}$

令$R_1(s)$输入为0，考虑 $\frac{Y_1}{R_2}$ $\frac{Y_2}{R_2}$

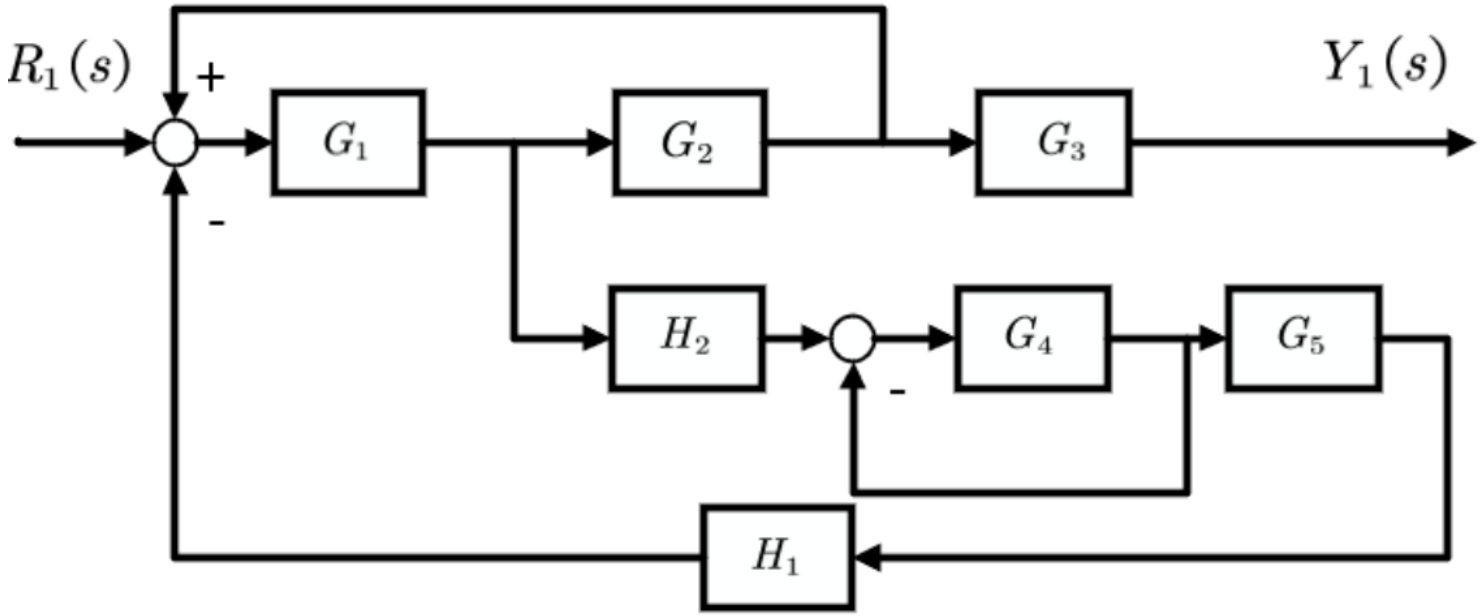
$R_2(s)=0$

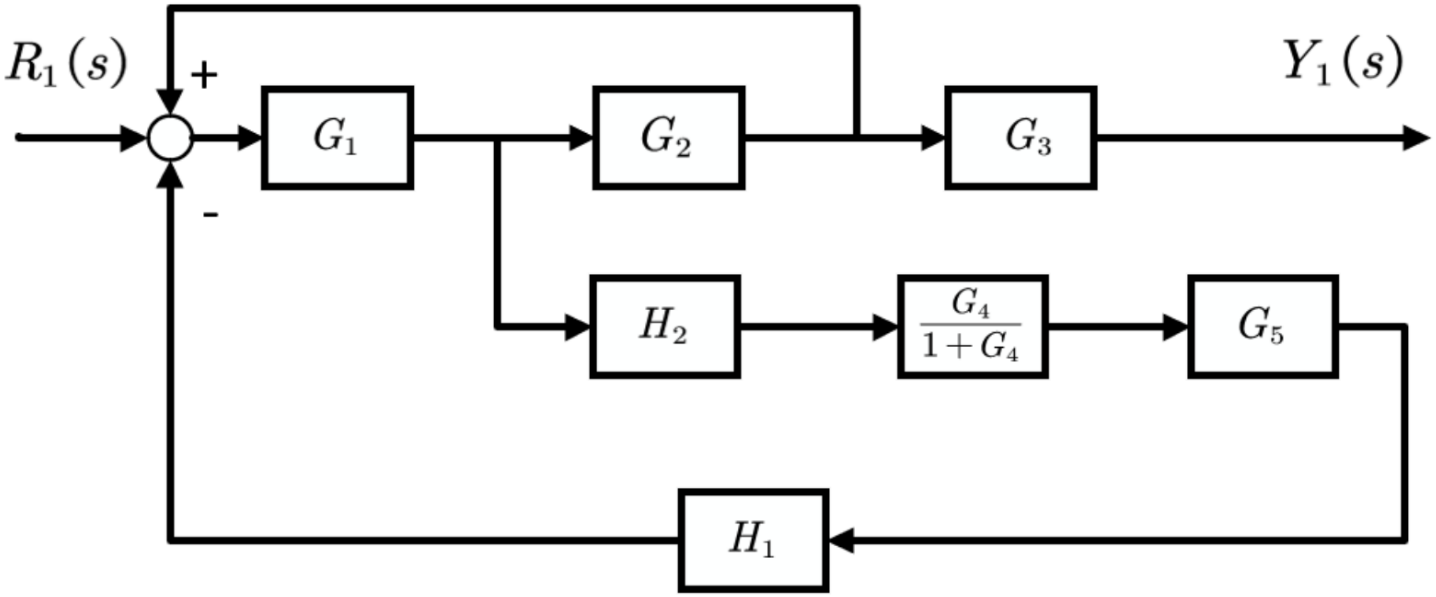


西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

2.1 结构图及化简方法

计算 $\frac{Y_1}{R_1}$

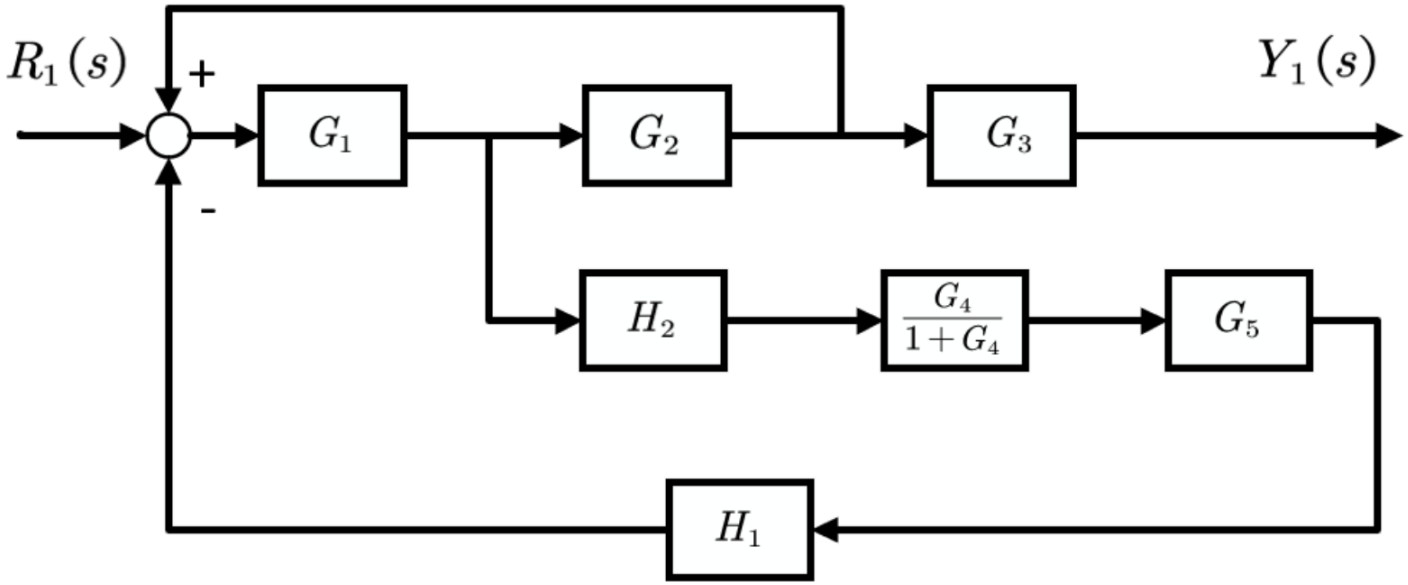


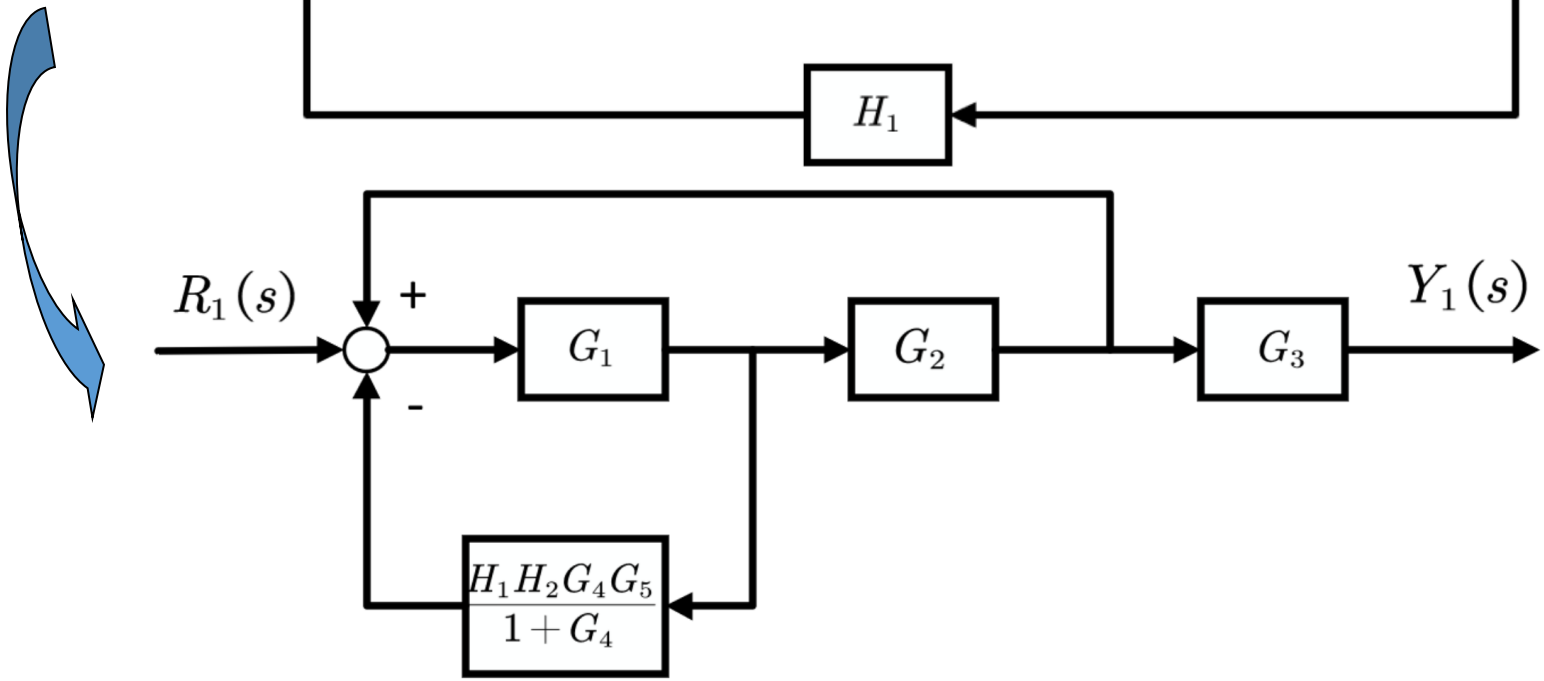


西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

2.1 结构图及化简方法

计算 $\frac{Y_1}{R_1}$



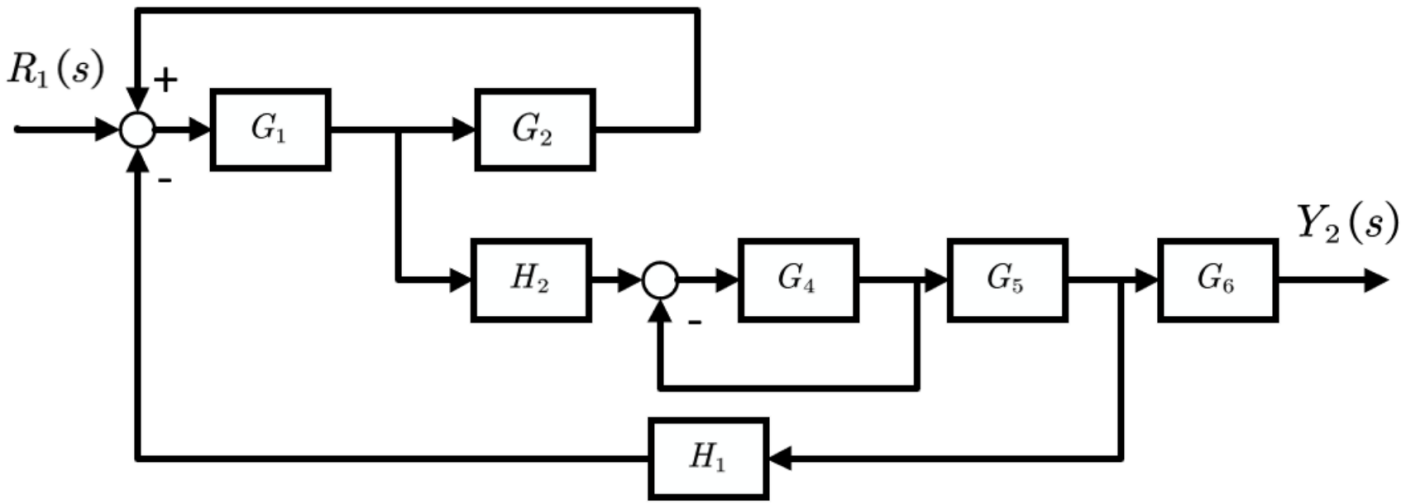


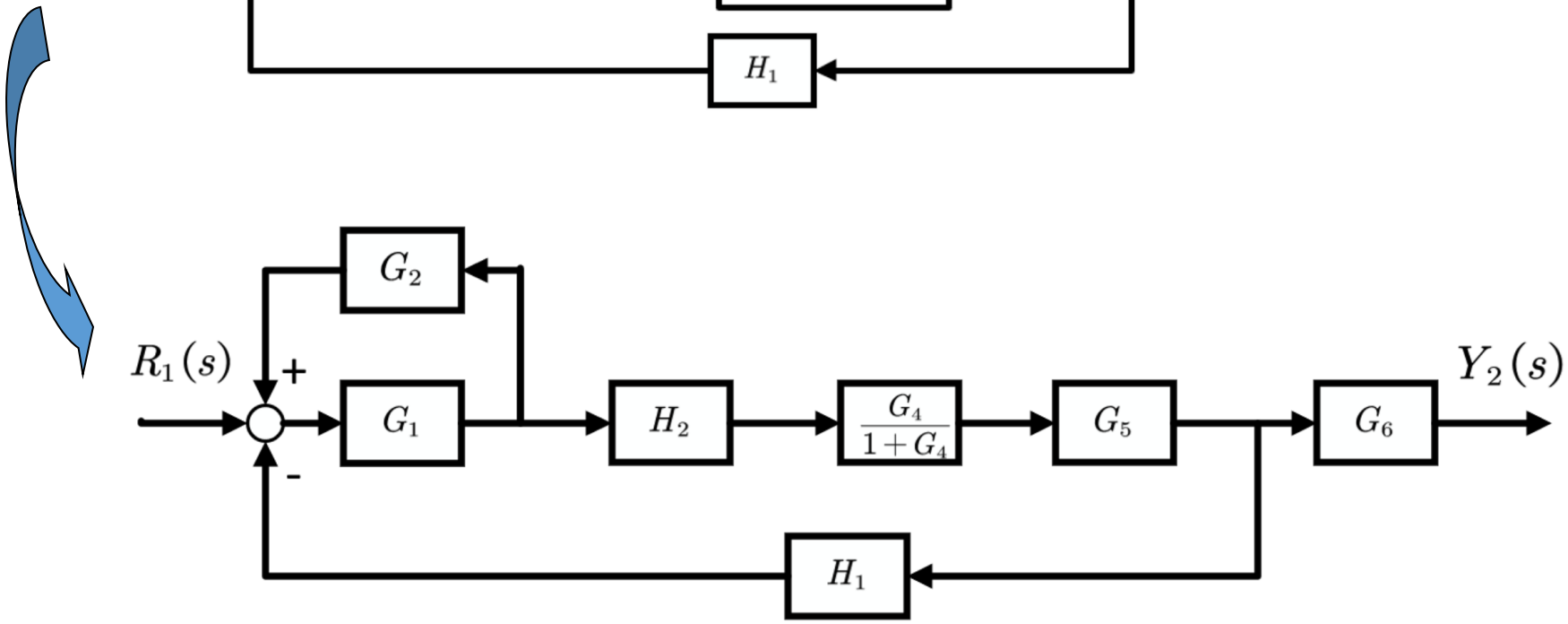
$$\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1+G_4(s)-G_1(s)G_2(s)-G_1(s)G_2(s)G_4(s)+G_1(s)G_4(s)G_5(s)H_1(s)H_2(s)}$$

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

2.1 结构图及化简方法

计算 $\frac{Y_2}{R_1}$

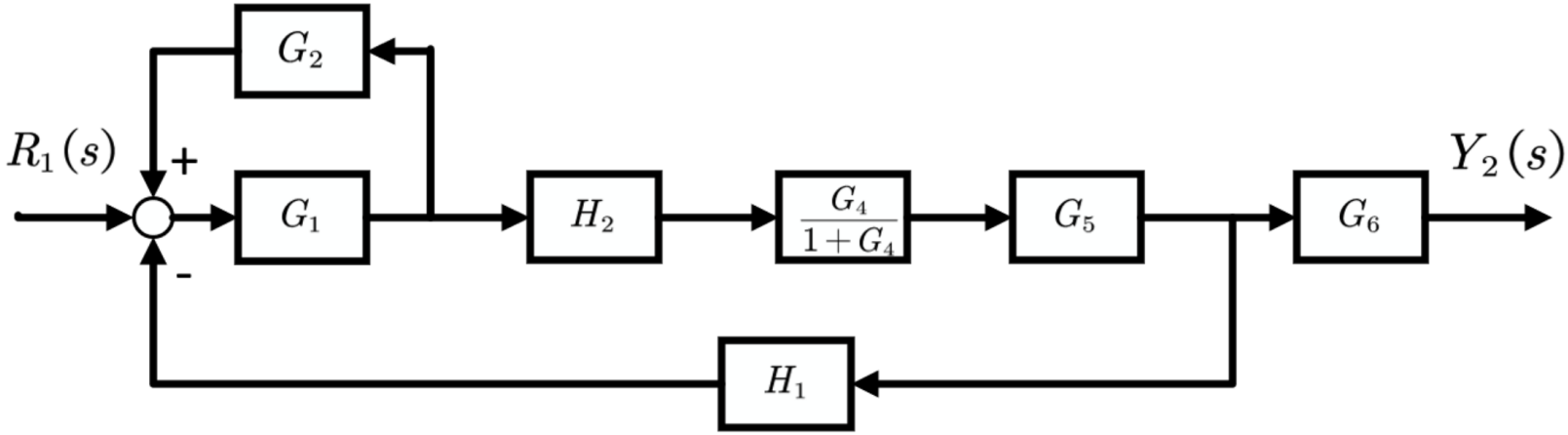


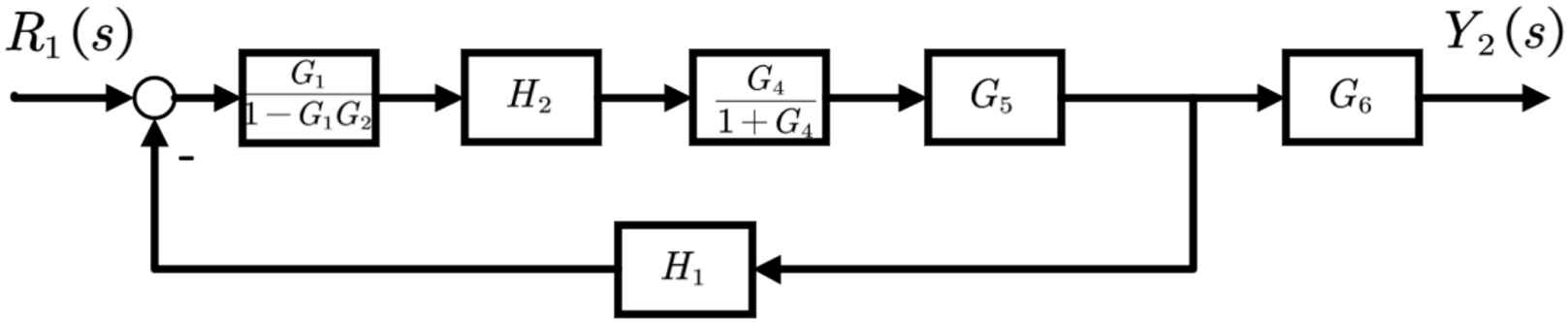


西安交通大學 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

2.1 结构图及化简方法

计算 $\frac{Y_2}{R_1}$

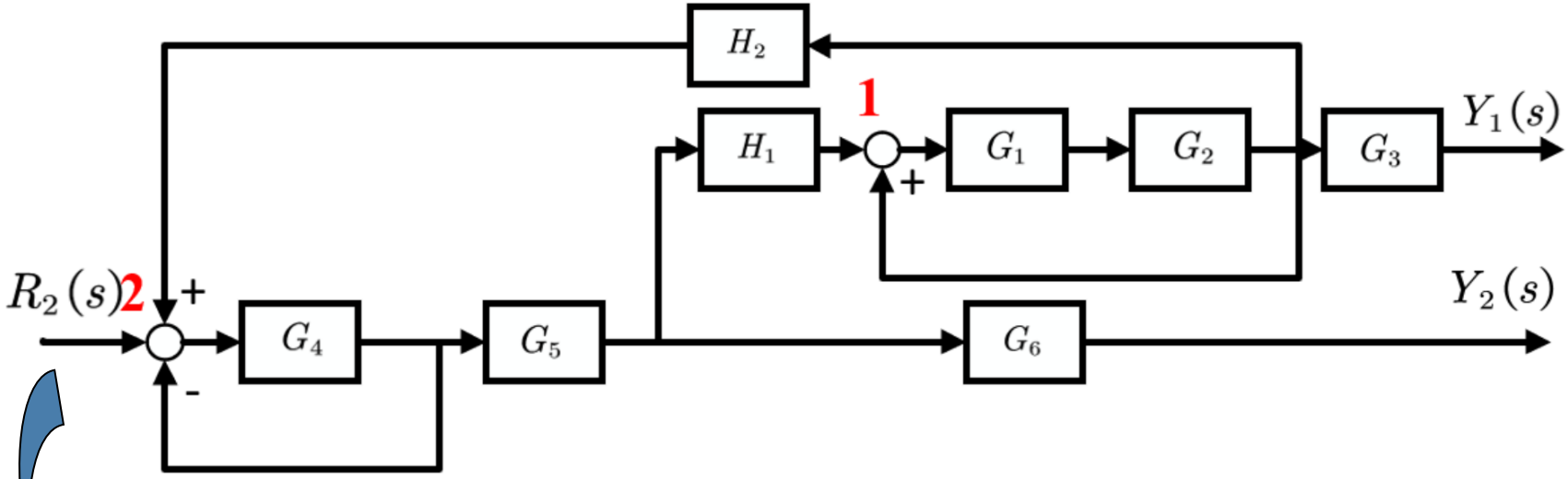




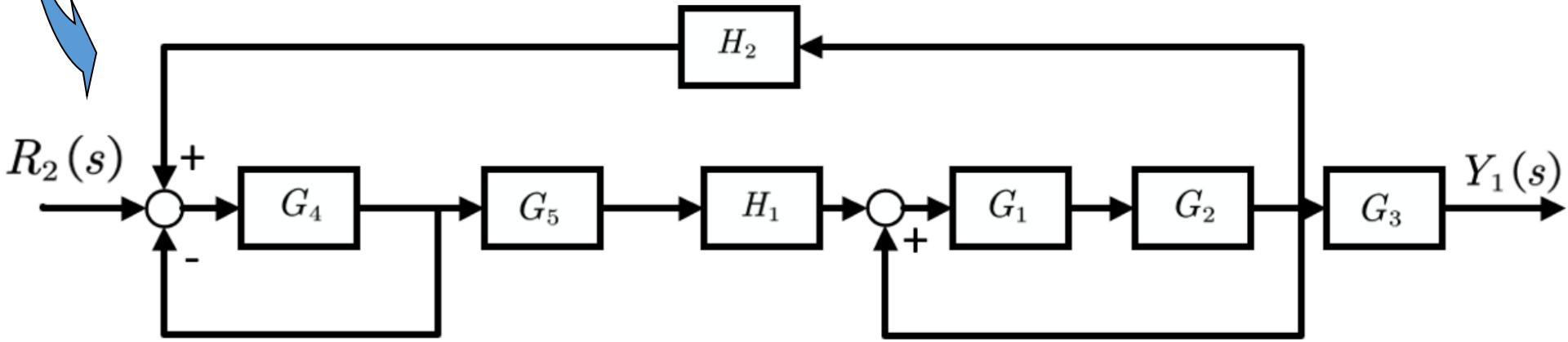
$$\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}=\frac{G_1(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)H_2(s)}{1+G_4(s)-G_1(s)G_2(s)-G_1(s)G_2(s)G_4(s)+G_1(s)G_4(s)G_5(s)H_1(s)H_2(s)}$$

2.1 结构图及化简方法

$R_1(s)=0$

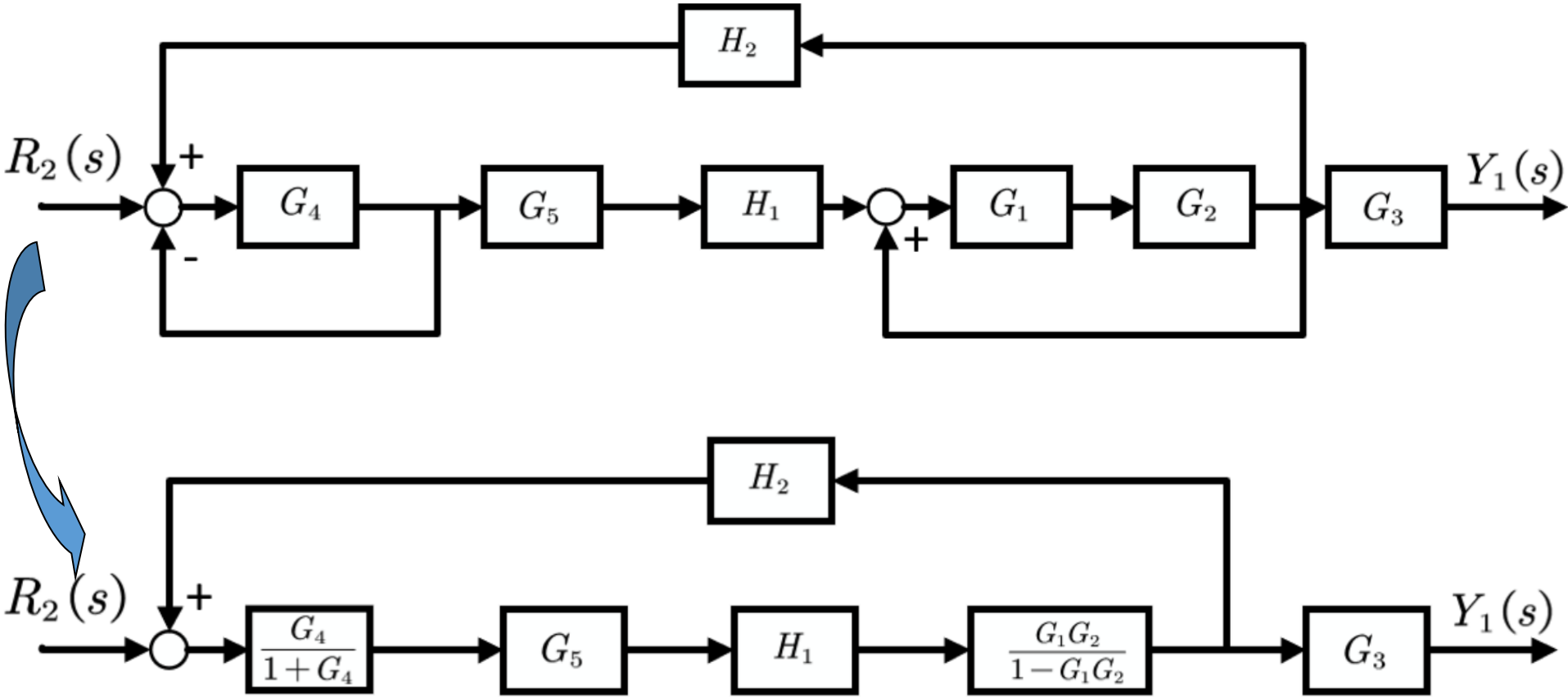


计算 $\frac{Y_1}{R_2}$



2.1 结构图及化简方法

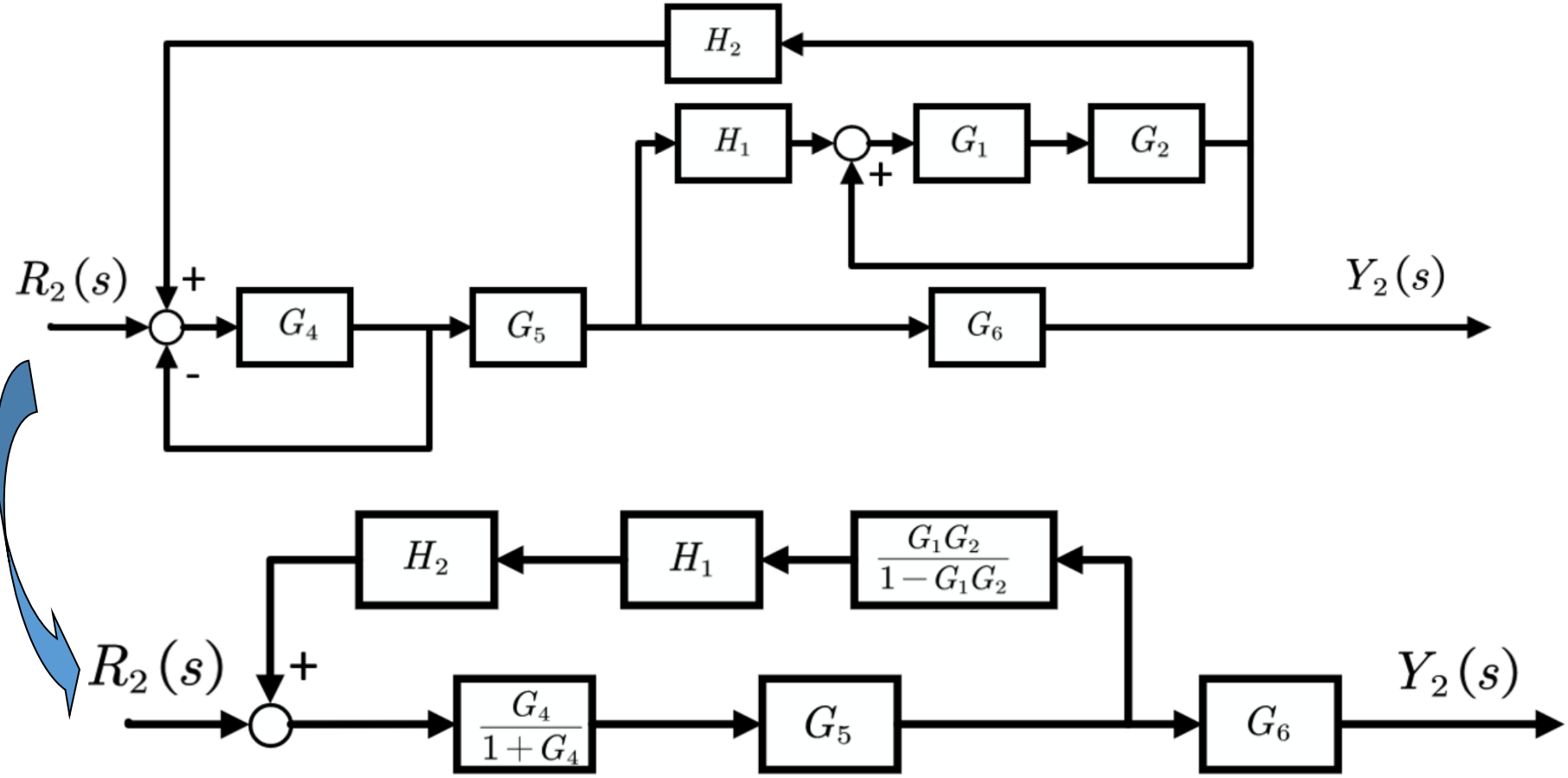
计算 $\frac{Y_1}{R_2}$



$$\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}=\frac{-G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)H_1(s)}{1+G_4(s)-G_1(s)G_2(s)-G_1(s)G_2(s)G_4(s)+G_1(s)G_4(s)G_5(s)H_1(s)H_2(s)}$$

2.1 结构图及化简方法

计算 $\frac{Y_2}{R_2}$



$$\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}=\frac{G_4(s)G_5(s)G_6(s)-G_1(s)G_2(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)}{1+G_4(s)-G_1(s)G_2(s)-G_1(s)G_2(s)G_4(s)+G_1(s)G_4(s)G_5(s)H_1(s)H_2(s)}$$

令$G_{11}=\dfrac{Y_1}{R_1},G_{12}=\dfrac{Y_1}{R_2},G_{21}=\dfrac{Y_2}{R_1},G_{22}=\dfrac{Y_2}{R_2}$

用矩阵表示四个传递函数如下：

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

2.13 试绘制图 2.60 中各系统结构图对应的信号流图，并用梅逊增益公式求各系统的传递函数 $Y(s)/R(s)$

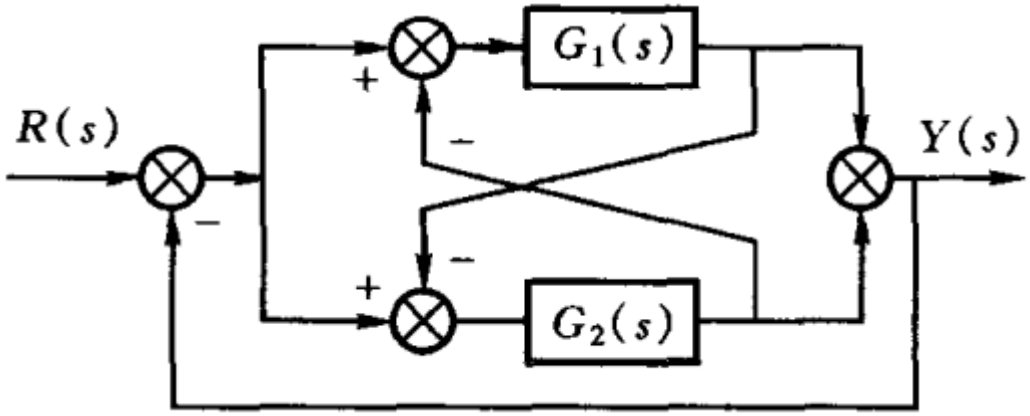
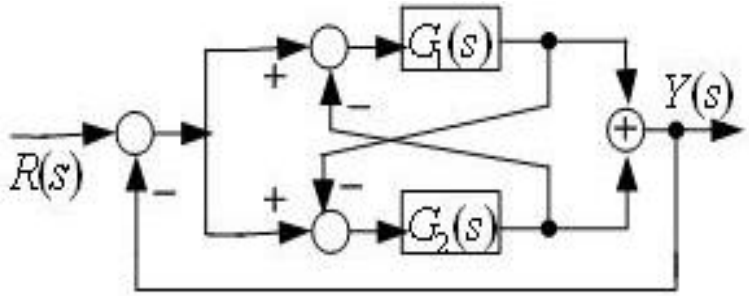
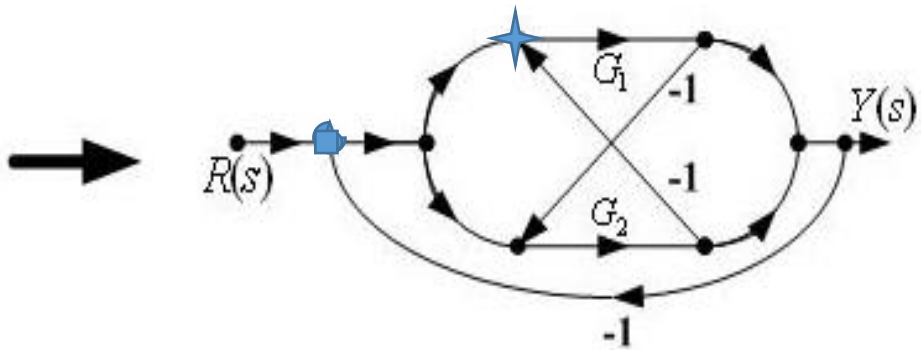


图 2.60　题 2.13 系统结构图

习题2-13解



(b)



解：前向通道

$$P_1 = G_1 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_2 \qquad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = -G_1G_2 \qquad \Delta_3 = 1$$

$$P_4 = -G_1G_2 \qquad \Delta_4 = 1$$

回环 $L_1 = -G_1 \quad L_2 = -G_2 \quad L_3 = G_1G_2 \quad L_4 = G_1G_2 \quad L_5 = G_1G_2$

信号流图特征式 $\Delta = 1 + G_1 + G_2 - 3G_1G_2$

$$(b) \qquad \frac{Y}{R} = \frac{G_1 + G_2 - 2G_1G_2}{1 + G_1 + G_2 - 3G_1G_2}$$

线性系统的时域分析 03

- 一阶系统的时域分析（单位阶跃、斜坡、脉冲响应）
- 二阶系统的时域分析（与根位置关系、性能指标计算）
- 劳斯稳定判据
- 线性系统的稳态误差计算（不同型数系统的稳态误差系数及稳态误差计算）

第3章 线性系统的时域分析—总结

□ 典型试验信号

阶跃信号、斜坡信号、等加速度信号

脉冲信号、正弦信号

□ 时域响应的构成

暂态分量（自由分量）+稳态分量（强迫分量）

□ 系统性能指标

峰值时间、超调量、延迟时间、上升时间、调节时间

□ 一阶系统的时域分析

单位阶跃响应、单位斜坡响应、单位脉冲响应

第3章 线性系统的时域分析—总结

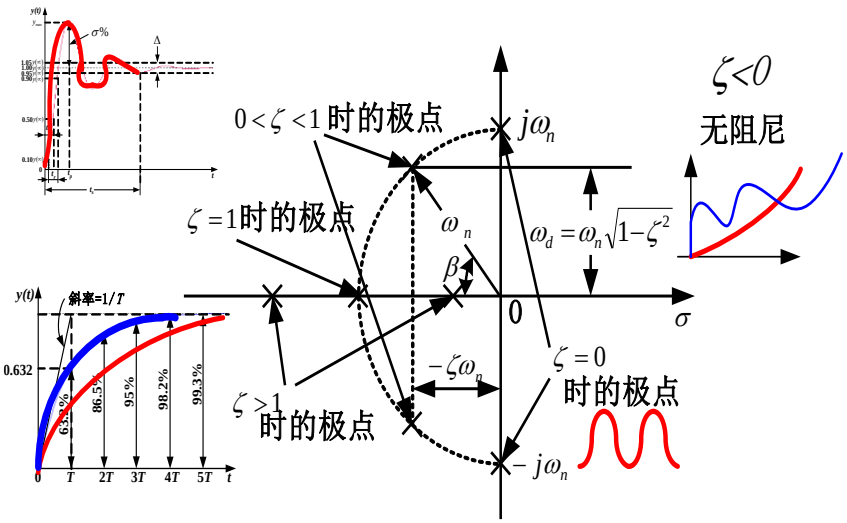
二阶系统的时域分析

单位阶跃响应与根位置的关系

性能指标计算

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



高阶系统的时域分析

传递函数的零极点形式

降阶处理方法

主导极点

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第3章 线性系统的时域分析—总结

□ 线性系统稳定的充分必要条件

特征方程式的所有根均为负实根或实部为负的复根，即特征方程式的根均位于复平面（s平面）的左半平面。

□ 劳斯(Routh)稳定判据

- ✓ 控制系统稳定的必要条件是：控制系统特征方程式的所有系数符号相同且不为零（不缺项）。
- ✓ 控制系统稳定的充分必要条件是：劳斯表中第一列所有元素符号相同。第一列元素符号改变的次数等于实部为正的特征根的个数（不稳定极点个数）。
- ✓ 应用劳斯稳定判据时的两种特例：①第一列出现零元素，但该零元素所在行的其他元素不为零；②全行元素为零。
- ✓ 如何判定系统是否有多大的稳定裕度？

第3章 线性系统的时域分析—总结

线性系统的稳态误差计算

误差定义：输入端（作用误差）、输出端

系统类型(型数)：前向通道积分环节个数（0型，I型，II型）

稳态误差系数及稳态误差计算

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I 型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II 型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

扰动作用下的稳态误差（令R(s）=0）

3.4　系统如图 3.30 所示，试求：

(1)图 3.30(a)所示系统的阻尼比、超调量、调节时间($\Delta=0.02$)

(2) 要使图 3.30(b)所示系统的阻尼比 $\zeta=0.707$，h 应取何值？并计算(1)中所要求的性能指标。

(3)讨论速度反馈的作用及其对系统稳态误差和性能的影响。

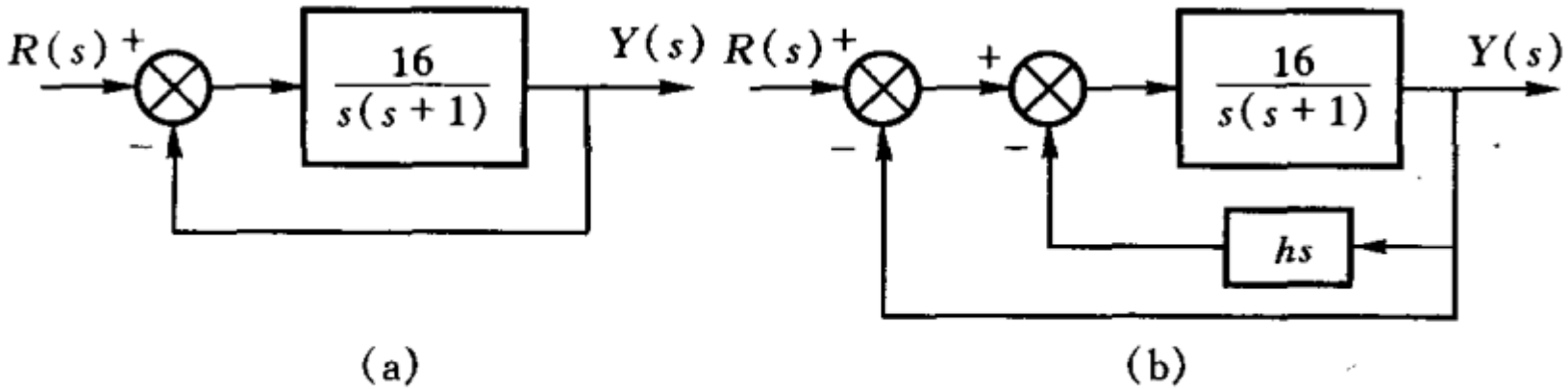


图 3.30　系统结构图

习题3-4解 (1)

系统传递函数 $$W(s)=\frac{16}{s^2+s+16}$$

二次系统传递函数标准形式 $$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

与标准形式对比可得：

$$\begin{cases} w_n^2=16 \\ 2\zeta w_n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_n=4 \\ \zeta=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=67.3\% \\ t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=8s\,(\Delta=0.02) \end{cases}$$

(2)系统函数：

$$w(s)=\frac{\frac{16}{s(s+1)}}{1+\frac{16}{s(s+1)}\times(1+hs)}=\frac{16}{s^2+(1+16h)s+16}$$

二次系统传递函数标准形式：

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

与标准形式对比可得：

$$\begin{cases} w_n^2=16 \\ 2\zeta w_n=1+16h \\ \zeta=0.707 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_n=4\ rad/s \\ h=0.291 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=4.3\% \\ t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=1.41s(\Delta=0.02) \end{cases}$$

单位反馈

$\omega_n = 4\ rad/s \qquad \sigma = 67.3\%$

$\zeta = \dfrac{1}{8} \qquad t_s = 8s$

原系统开环传递函数：

$$\frac{16}{s(s+1)}$$

型次：Ⅰ型

系统增益：16

采用速度反馈

$\omega_n = 4\ rad/s \qquad \sigma = 4.3\%$

$\zeta = 0.707 \qquad t_s = 1.41s$

增设速度反馈开环传递函数：

$$\frac{\frac{16}{s(s+1)}}{1+\frac{16}{s(s+1)}hs} = \frac{16}{s(s+1+16h)}$$

型次：Ⅰ型

系统增益：16/(1+16h)

（3）速度反馈使得响应的峰值减小，即超调量减小，且缩短了调节时间，增快了响应速度；本题中，速度反馈对传递函数中的型次无影响，增益产生影响，故对稳态误差的影响取决于输入信号种类，速度反馈可以改善动态性能。

3.5 如图 3.31 所示的系统，单位阶跃响应的超调量 $\sigma=20\%$，峰值时间 $t_p=0.1$ s，试确定 K_1、K_2 的数值，并计算调整时间 t_s（±2%误差）。

习题3-5解

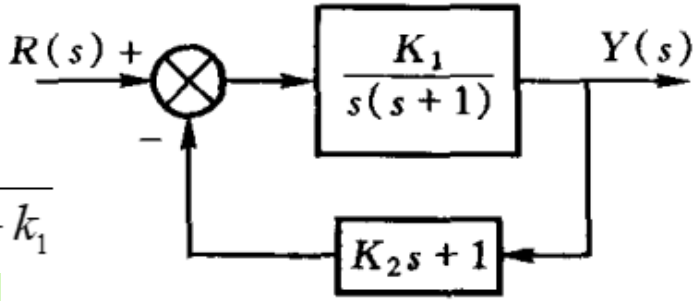


图 3.31 控制系统结构图

系统传递函数 $w(s)=\dfrac{\frac{k_1}{s(s+1)}}{1+\frac{k_1}{s(s+1)}(k_2s+1)}=\dfrac{k_1}{s^2+(1+k_1k_2)s+k_1}$

二次系统传递函数标准形式：

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases}\sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=20\% \\ t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.1s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\zeta=0.46 \\ \omega_n=35.4\ rad/s\end{cases}$$

$$\begin{cases}w_n^2=k_1 \\ t_s=\dfrac{4}{\zeta w_n}(\Delta=0.02) \\ 1+k_1k_2=32.568\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_s=0.246s \\ k_1=1253.16 \\ k_2=0.0252\end{cases}$$

3.6 如图 3.32(a)所示的系统，其单位阶跃响应如图 3.32(b)所示。试确定系统参数 K_1、K_2 和 a。

习题3-6解

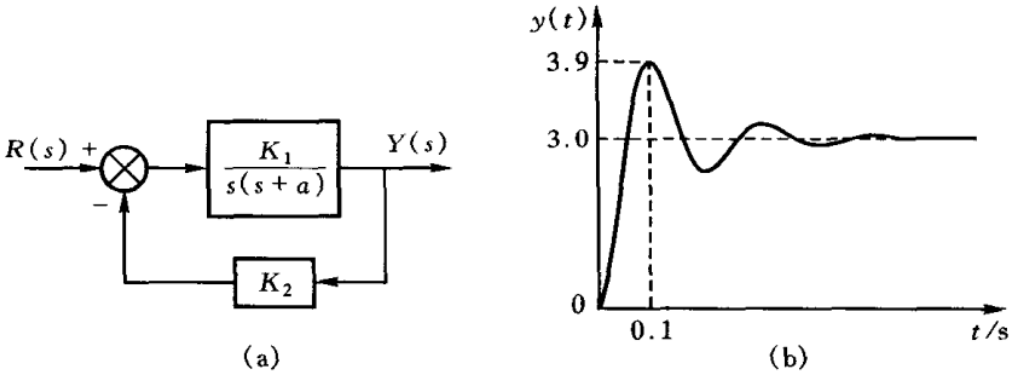
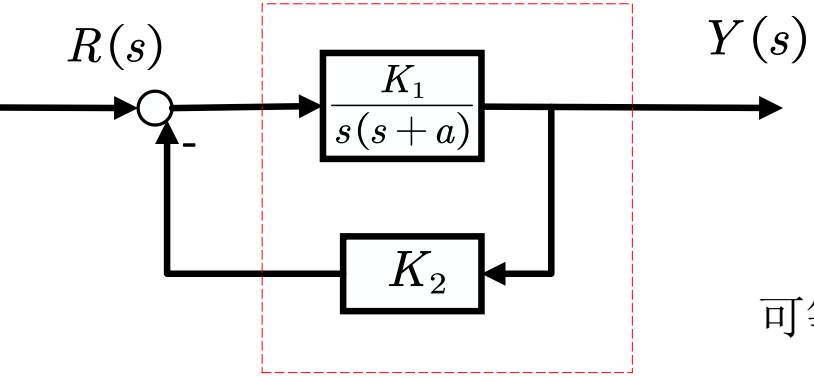
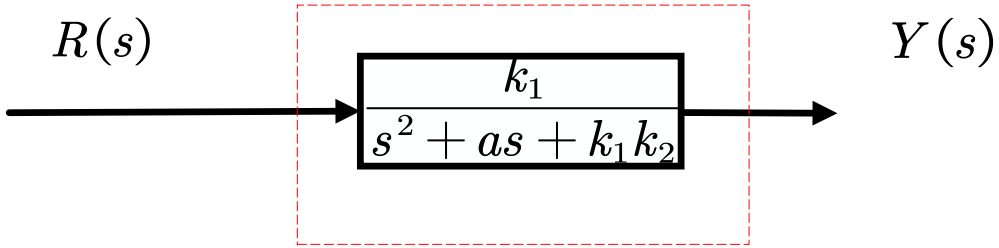


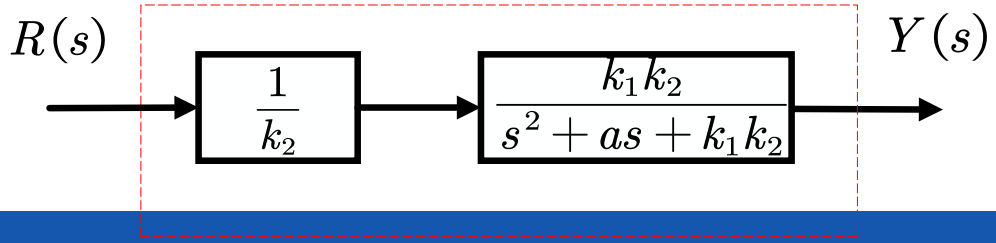
图 3.32 系统结构及单位阶跃响应

系统传递函数 $\dfrac{k_1}{s^2+as+k_1k_2}$

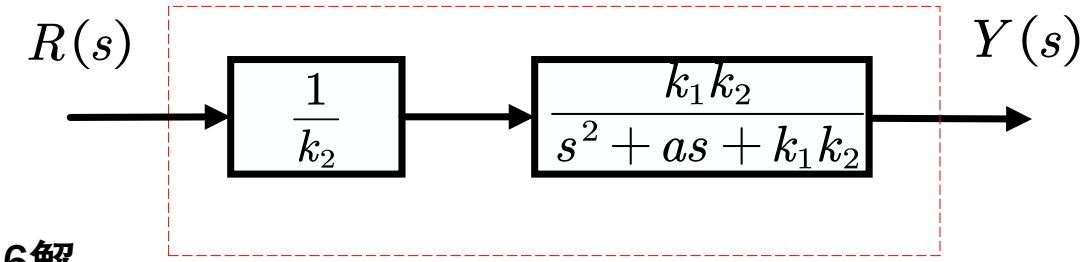


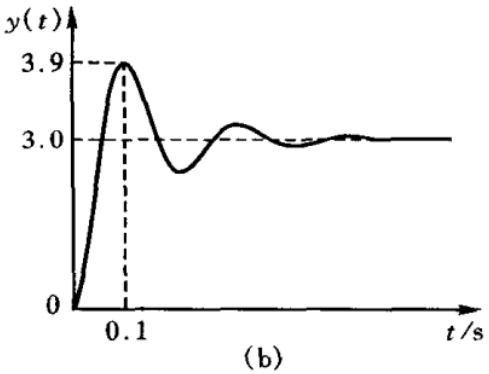


可等效为



3.6 如图 3.32(a)所示的系统，其单位阶跃响应如图 3.32(b)所示。试确定系统参数 K_1、K_2 和 a。





习题3-6解

系统传递函数 $\frac{1}{k_2}\frac{k_1k_2}{s^2+as+k_1k_2}$

由单位阶跃响应曲线可知 $\sigma=\frac{3.9-3.0}{3.0}=30\%$;

二次系统传递函数标准形式：

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases}\sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=30\% \\ t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.1s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\zeta=0.36 \\ \omega_n=33.64\ rad/s\end{cases}$$

∵ 系统是单位阶跃响应，其稳态输出为1

$y(\infty)=3.0$

于是有 $k_2=\frac{1}{3}$ 故 $k_1=3395$ $a=25.488$

3.8 系统闭环传递函数为

$$W(s)=\frac{90(s+1.4)}{(s+3)(s+1.5)(s^2+s+4)}$$

试求其二阶近似，并检验其稳态增益是否保持不变。

习题3-8解

$\because z_1=-1.4$ 与 $p_1=-1.5$ 接近故零极点可对消

又 $s^2+s+4=\left(s+\frac{1+j\sqrt{15}}{2}\right)\left(s+\frac{1-j\sqrt{15}}{2}\right)$

$p_2=\frac{-1-j\sqrt{15}}{2}, p_3=\frac{-1+j\sqrt{15}}{2}$ 与 $p_4=-3$ 相距较远，故 $(s+3)$ 可以忽略

传函的二阶近似为：$W'(s)=\frac{90\times1.4}{(s^2+s+4)\times3\times1.5}$

故稳态增益 $A_0'=\lim\limits_{s\to0}W'(s)=\frac{90\times1.4}{4\times3\times1.5}=7.0$

原传函的稳态增益为 $A_0=\frac{90\times1.4}{4\times3\times1.5}=7$

即二阶近似后，稳态增益没有变化

3.14 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试在满足 $T>0, K>1$ 的条件下，确定使系统稳定的 T 和 K 的取值范围，并以 T 和 K 为坐标画出使系统稳定的参数区域图。

习题3-14解

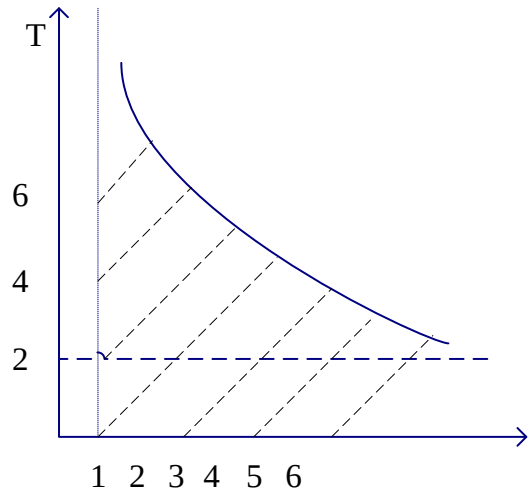
由开环传函可得闭环传函如下：

$$W(s)=\frac{k(s+1)}{2Ts^3+(T+2)s^2+(k+1)s+k}$$

则由特征方程$2Ts^3+(T+2)s^2+(k+1)s+k=0$可得劳斯表为

s^3	2T	k+1
s^2	T+2	k
s^1	$\frac{T+2k+2-kT}{T+2}$	
s^0	k	

$$\Rightarrow\begin{cases}k>1\\0<T<2+\dfrac{4}{k-1}\end{cases}$$



使系统稳定区域如图中阴影部分所示

3.18 已知一单位负反馈系统，其闭环极点为$(-1+j\sqrt{15})/2$、$(-1-j\sqrt{15})/2$，试求：

(1)系统单位阶跃响应的调节时间 $t_s(\pm 2\%)$和超调量 $\sigma\%$；

(2)单位斜坡输入时的稳态误差 e_{ss}。

习题3-18解（1）由闭环极点可求出闭环系统特征方程式

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\qquad W(s)=\frac{\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{15})\times\frac{1}{2}(-1-j\sqrt{15})}{\left(s-\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{15})\right)\left(s-\frac{1}{2}(-1-j\sqrt{15})\right)}=\frac{4}{s^2+s+4}$$

又二次系统传递函数标准形式：

$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases} w_n^2=4 \\ 2\zeta w_n=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} w_n=2\ rad/s \\ \zeta=0.25 \end{cases}\qquad\begin{cases} \sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=44.4\% \\ t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=8s(\Delta=0.02) \end{cases}$$

(2)可写出该系统开环传函为 $G(s)=\dfrac{w_n^2}{s(s+2\zeta w_n)}=\dfrac{4}{s(s+1)}$

$$e_{ss}=\frac{1}{K}=0.25$$

3.21 典型二阶系统，当输入单位阶跃信号时，$\sigma\% = 16\%$，$t_s = 2s(\Delta = 0.05)$，试求系统在单位速度信号输入的稳态误差。

习题3-21解

$$\begin{cases} \sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16\% \\ t_s = \dfrac{3}{\zeta\omega_n} = 2s(\Delta = 0.05) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 0.5 \\ \omega_n = 3\ rad/s \end{cases}$$

其开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta w_n)} = \dfrac{9}{s(s+3)}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = 3$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{1}{3}$$

线性系统的根轨迹法 04

- 根轨迹的基本条件
- 绘制根轨迹的基本规则（9条）
- 参量根轨迹的绘制

第 4章 线性系统的根轨迹法 总结

- 根轨迹的概念（开环根轨迹增益K）
- 根轨迹的基本方程

$$\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=-1$$

幅值条件：

$$\frac{K\prod_{j=1}^{m}|s+z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|}=1$$

与K有关

相角条件：

$$\sum_{j=1}^{m}\theta_{zj}-\sum_{i=1}^{n}\theta_{pi}=\pm(2k+1)180^\circ$$

与K无关

$$\theta_{zj}=\angle(s+z_j)\qquad \theta_{pi}=\angle(s+p_i)$$

绘制根轨迹的基本规则

规则1　绘制根轨迹的方程形式

$$1+\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=0$$

规则2　根轨迹的分支数及起点和终点

对于一个n阶系统，当参变量K从零到无穷大变化时，根轨迹有n条分支，它们分别从n个开环极点出发，其中有m条根轨迹分支终止在m个有限开环零点上，其余$(n-m)$条根轨迹分支终止在$(n-m)$个无限零点上。

绘制根轨迹的基本规则

规则3　根轨迹在实轴上的分布

根轨迹在实轴上总是分布在两个相邻的开环实零、极点之间，且线段右边开环实零、极点的总数为奇数。

规则4　根轨迹的对称性

根轨迹必然关于实轴对称。绘制根轨迹图时，只需画出上半平面根轨迹，下半平面的根轨迹可根据对称性原理得出。

绘制根轨迹的基本规则

规则5 根轨迹的渐近线

当系统$n \geq m$时，根轨迹的渐近线共有$(n-m)$条，各条根轨迹的渐近线与实轴的倾角为：

$$\theta_k = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0,1,2,\cdots,(n-m-1)$$

2π等分射线

根轨迹的渐近线交于实轴上一点，交点坐标为：

$$-\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} -p_i - \sum_{j=1}^{m} -z_j}{n-m}$$

绘制根轨迹的基本规则

规则6　根轨迹的分离点和会和点

- 根轨迹的分离点和会合点实质上都是特征方程式的重根，因而可用求解特征方程式重根方法确定它们在平面上的位置。

$$A(s)B'(s)-A'(s)B(s)=0$$

$$\frac{dK}{ds}=\frac{A(s)B'(s)-A'(s)B(s)}{[B(s)]^2}=0$$

确定根轨迹的分离点或会合点的坐标及相应的*K*值（注意必须进行校验，仅有位于根轨迹上的重根才是分离点和汇合点）

绘制根轨迹的基本规则

规则7 根轨迹的出射角和入射角

◆ 计算根轨迹出射角和入射角可由根轨迹的相角条件来确定。

相角条件：

$$\sum_{j=1}^{m}\theta_{zj}-\sum_{i=1}^{n}\theta_{pi}=\pm(2k+1)180^{\circ} \qquad k=0,1,2,\cdots \qquad \begin{aligned}\theta_{zj}&=\angle(s+z_j)\\ \theta_{pi}&=\angle(s+p_i)\end{aligned}$$

根轨迹在第*a*个开环复数极点$-p_a$处的出射角为：

$$\theta_{p_a}=\mp(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\theta_{zj}-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq a}}^{n}\theta_{pi} \qquad \begin{aligned}&\theta_{pi}=\angle(-p_a+p_i),\quad i=1,2,\cdots,n\ \ (i\neq a)\\ &\theta_{zj}=\angle(-p_a+z_j),\quad j=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

根轨迹在第*b*个开环复数零点$-z_b$处的入射角为：

$$\theta_{z_b}=\pm(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{n}\theta_{pi}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq b}}^{m}\theta_{zj} \qquad \begin{aligned}&\theta_{pi}=\angle(-z_b+p_i),\quad i=1,2,\cdots,n\\ &\theta_{zj}=\angle(-z_b+z_j),\quad j=1,2,\cdots,m\ \ (j\neq a)\end{aligned}$$

绘制根轨迹的基本规则

规则8 根轨迹与虚轴的交点

1）用劳斯判据，求临界稳定的K值和根轨迹与虚轴的交点；

2）令特征方程的$s=j\omega$，并令方程左边实部和虚部分别等于零，就可求出ω和 K值。

规则9 特征方程的根之和与根之积

$$\sum_{i=1}^{n}(-p_{ci})=\sum_{i=1}^{n}(-p_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(-p_{ci})=\prod_{i=1}^{n}(-p_i)+K\prod_{j=1}^{m}(-z_j)$$

□ 参量根轨迹的绘制

- ✓ 研究除开环根轨迹增益K以外的其它可变参量（如时间常数、反馈系数，开环零、极点等）对系统性能的影响，就需要绘制参量根轨迹。
- ✓ 首先需要按照根轨迹基本绘制规则1，对根轨迹方程形式进行必要处理。（例参量为时间常数T）

$$1+TG_1(s)H_1(s)=0$$

$$1+\frac{T\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=0$$

- ✓ 然后按照根轨迹基本绘制规则2~9绘制参量根轨迹。

□ 用根轨迹法分析控制系统性能

- ✓ 利用根轨迹，可以定性分析当某一参数变化时系统稳定性及动态性能的变化趋势，也可根据性能要求确定系统的参数。
- ✓ 利用根轨迹分析系统的稳定性，求根轨迹与虚轴交点，确定稳定条件，从而确定合适的K值范围。
- ✓ 开环零极点对系统性能的影响（增加合适的位于虚轴左侧的开环零点，根轨迹左移，可增加稳定裕度又可提高系统快速性，改善系统性能；增加位于虚轴左侧的开环极点，根轨迹右移，稳定性降低，不利于改善动态性能，离虚轴越近，作用越显著）

4.4 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+1)}$$

求根轨迹分离点和汇合点的坐标，绘制出其概略根轨迹图。

习题4-4解

由特征方程式： $G(s)H(s)=-1$ 得 $K=-\dfrac{s(s+1)}{s+2}$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{(2s+1)(s+2)-s(s+1)}{(s+2)^2}=0 \qquad s^2+4s+2=0$$

解方程得 $s_1=-0.586, s_2=-3.414$。

经检验根据根轨迹在实轴上的分布可知，$S_1=-0.586$ 是根轨迹的分离点，$S_1=-3.414$ 是根轨迹的汇合点。

习题4-4解 根据根轨迹在实轴上的分布可知，$s_1=-0.586$是根轨迹的分离点，$s_2=-3.414$是根轨迹的汇合点。

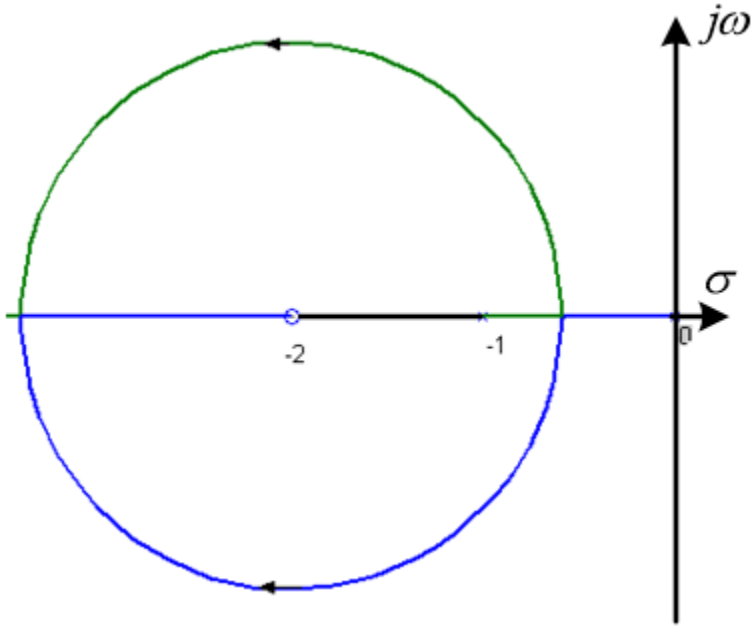
1）起止点： $p_1=-1, p_2=0, z_1=-2$

2）分支数： 2条，一支终止于→∞

3）实轴上的根轨迹：[-∞, -2] [-1, 0]

4）渐近线： $\theta_k=180^\circ$

5）分离点和会合点： 分离点 $s_1=-0.586$
汇合点 $s_2=-3.414$



根轨迹与虚轴没有交点，根轨迹如右图：且位于复平面的部分为圆

习题4-4解 下面证明根轨迹是一个以圆心为$(-2,0)$ 半径为$\sqrt{2}$的圆。

由特征方程式：$G(s)H(s)=-1$

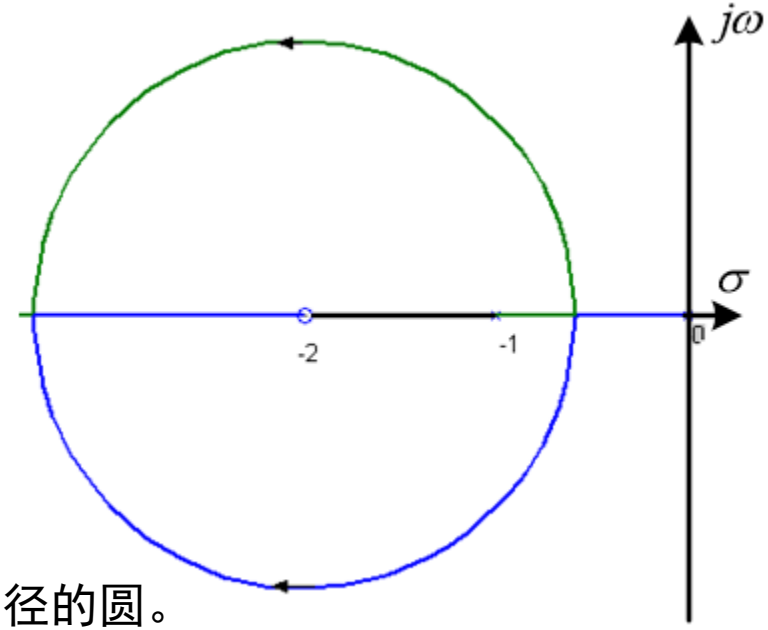
闭环特征方程为：$W(s)=\ s^2+(k+1)s+2k$

令$s_{1,2}=\sigma\pm jw$ 由根与系数的关系：

$$\begin{cases} s_1+s_2=2\sigma=-(k+1)\Longrightarrow k=-2\sigma-1 & ① \\ s_1\cdot s_2=\sigma^2+w^2=2k & ② \end{cases}$$

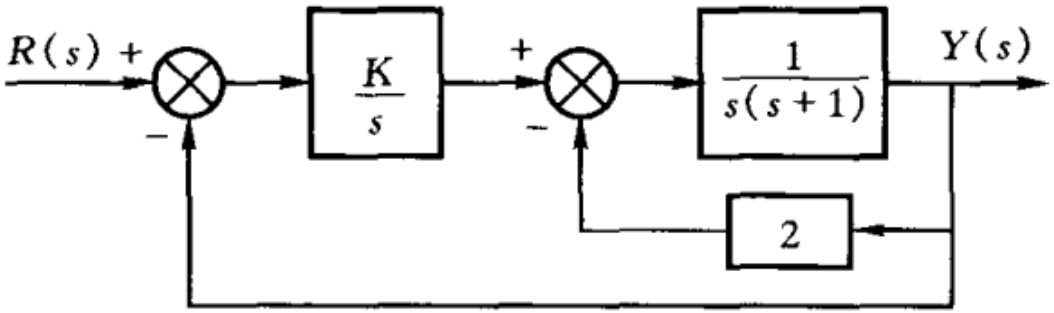
把①代入②中，可得：

$$\sigma^2+4\sigma+w^2+2=0\Longrightarrow(\sigma+2)^2+\omega^2=2$$



因此，根轨迹是以点（-2, 0）为圆心、以 $\sqrt{2}$ 为半径的圆。

4.7 已知一双闭环控制系统如图 4.22 所示，试绘制 K 由 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹图，并确定根轨迹的出射角及其与虚轴的交点。



习题4-7解

图 4.22 双闭环控制系统

其开环传递函数为

$$H(s)G(s)=\frac{K}{s}\frac{1}{s^2+s+2}=\frac{k}{s^3+s^2+2s}$$

$$p_1=0,\quad p_2=-0.5+j1.32,\ p_3=-0.5-j1.32$$

习题4-7解

1）起止点： $p_1=0,\ \ p_2=-0.5+j1.32,\ p_3=-0.5-j1.32$

2）分支数： 3条，3支终止于→∞

3）实轴上的根轨迹：[−∞, 0]

4）渐近线： $\theta_k=\dfrac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}$ 倾角分别为：60和−60°（两渐近线与实轴交于(−1/3, 0)点），180°

5）分离点： $\dfrac{dK}{ds}=-(3s^2+2s+2)=0$ $\qquad s_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{5}}{3}$

（共轭复数对，检验不在根轨迹上）

6）出射角： $\theta_{p2}=-\pi-\theta_{p1}-\theta_{p3}=-\pi-\left(\arctan\left(\dfrac{-1.32}{0.5}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)=-0.362087\ rad\Rightarrow -65.17°$

由对称性$\theta_{p3}=65.17°$

7）根轨迹与虚轴交点：

特征方程为$s^3+s^2+2s+K=0$

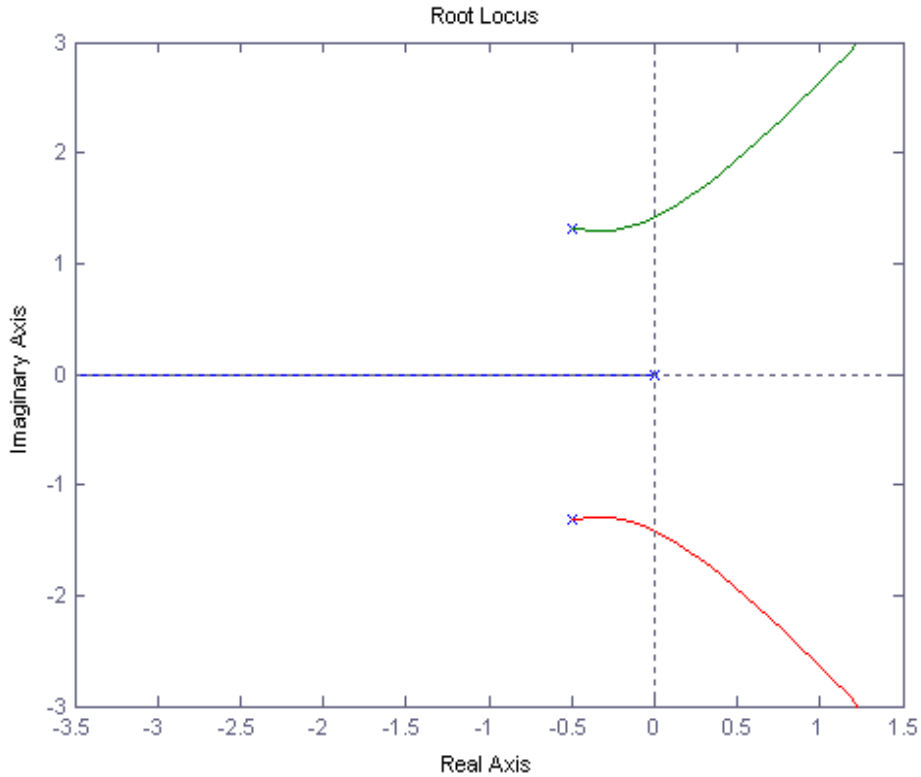
利用劳斯判据：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & k \\ s^1 & 2-k & \\ s^0 & k & \end{array}$$

临界增益k=2，代入特征方程，可求出与虚轴的交点：

$$s=\pm 1.41j$$

则根轨迹图如下：



4.9 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

(1)绘制 K 由 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹，并确定根轨迹分离点的坐标；

(2)确定系统呈阻尼振荡动态响应的 K 值范围；

(3)求系统产生持续等幅振荡时的 K 值和振荡频率

习题4-9解

(1) 由开环传递函数：$p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-4$

1）起止点： $p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-4$

2）分支数： 3条，3支终止于→∞

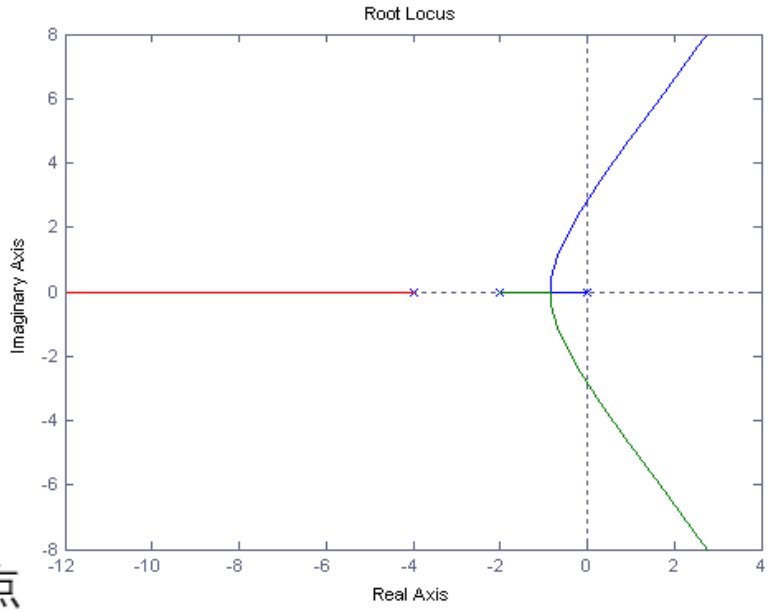
3）实轴上的根轨迹：[−∞, −4]， [−2, 0]

4）渐近线：$\theta_k=\frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}$ 倾角分别为：60° 和−60°（两渐近线与实轴交于(−2, 0)点），180°

5）分离点：$\frac{dK}{ds}=-(3s^2+12s+8)=0$ $s_1=-2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$（舍去） $s_2=-2+\frac{2}{3}\sqrt{3}=-0.845299$

习题4-9解

因此 s=-0.845为根轨迹分离点，根轨迹如图：



(2) 当闭环根出现虚数时，就会出现阻尼振荡

即s=-0.845，代入特征方程式：

$$K=-s(s+2)(s+4)$$

k>3.08

(3) 持续等幅阻尼振荡时，即根轨迹与虚轴相交的点

利用劳斯判据：

s^3	1	8
s^2	6	K
s^1	$\frac{48-K}{6}$	
s^0	K	

临界增益k=2，代入特征方程，K=48

$$s^3+6s^2+8s+48=0$$

$$s^2(s+6)+8(s+6)=0$$

$$s=-6(\text{舍去}),\quad s=\pm j2\sqrt{2}$$

4.10 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

(1)绘制 K 由 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹；

(2)求 $\zeta=0.5$ 时的一对闭环极点和相应的 K 值。

习题4-10解

(1) 由开环传递函数：$p_1=0,p_2=-1,p_3=-3,z_1=-2$

1）起止点： $p_1=0,p_2=-1,p_3=-3,z_1=-2$

2）分支数： 3条，2支终止于→∞

3）实轴上的根轨迹：[-3, -2]， [-1, 0]

4）渐近线：倾角分别为：90° 和-90°（两渐近线与实轴交于(-1, 0)点）

5）分离点：$\frac{dK}{ds}=-\frac{s^3+5s^2+8s+3}{(s+2)^2}=0$ $s_1=-0.5,s_{2,3}=-2\pm j\sqrt{2}$(舍去)

分离点为 $s_1=-0.5$

4.10 单位负反馈系统的开环传递函数为

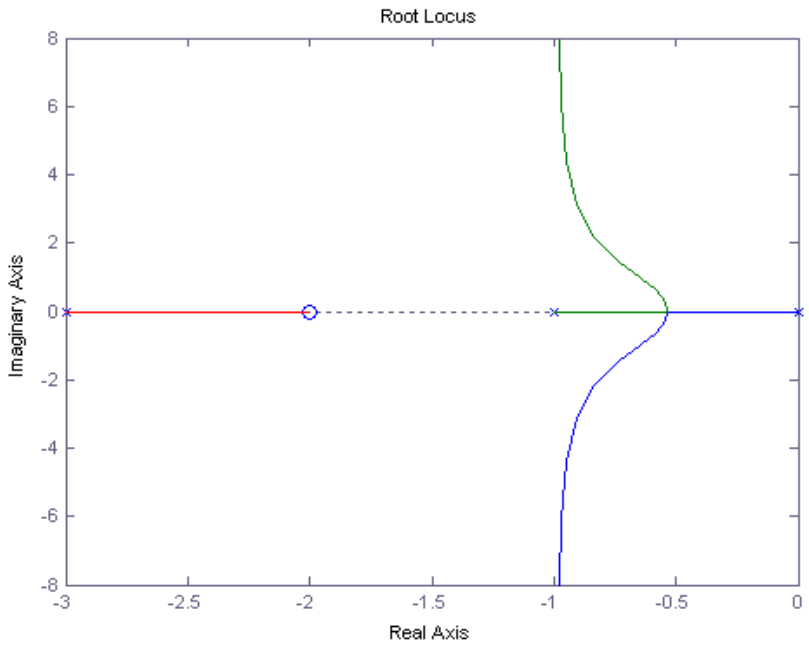
$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

(1)绘制 K 由 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹；

(2)求 $\zeta=0.5$ 时的一对闭环极点和相应的 K 值。

习题4-10解

根轨迹如下图：



4.10 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

(1)绘制 K 由 $0\to\infty$ 变化时系统的根轨迹；

(2)求 $\zeta=0.5$ 时的一对闭环极点和相应的 K 值。

习题4-10解

(2) $\zeta=0.5$

等阻尼线*OA*与根轨迹的交点即为相应的闭环极点，设相应两个共轭复数闭环极点为：

$$\lambda_1=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-0.5\omega_n+j0.866\omega_n$$

$$\lambda_2=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-0.5\omega_n-j0.866\omega_n$$

式中是 ω_n 无阻尼自然角频率。设系统第3个实根为 λ_3，

则闭环特征方程可表示为：

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)=s^3+(\omega_n-\lambda_3)s^2+(\omega_n^2-\lambda_3\omega_n)s-\lambda_3\omega_n^2=0$$

$$s^3+4s^2+(3+K)s+2K=0$$

$$\begin{cases} w_n-\lambda_3=3 \\ w_n^2-\lambda_3=4 \\ -\lambda_3 w_n^2=2K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_n=1.618 \\ \lambda_3=-1.382 \\ K=1.81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-0.809+j1.4 \\ \lambda_2=-0.809+j1.4 \\ \lambda_3=-1.382 \end{cases}$$

4.15 设控制系统如图 4.24 所示。(1)为使闭环极点 $s=-1\pm j\sqrt{3}$，试确定增益 K 和速度反馈系数 K_h 的值；(2)根据所求的 K_h 值，画出以 K 为参变量的根轨迹。

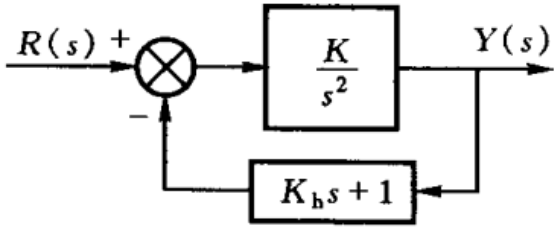


图 4.24 控制系统框图

习题4-15

(1) $G(s)H(s)=\dfrac{K(K_h s+1)}{s^2}=-1$

$$s^2+K_hKs+K=0$$

代入$s=-1\pm\sqrt{3}j$，可以解出$\begin{cases}k=4\\k_h=0.5\end{cases}$

(2) $s^2+0.5ks+k=0$，用s^2除特征多项式，有

$$1+\frac{k(0.5s+1)}{s^2}=0$$

$$p_1=0,p_2=0,\ z_1=-2$$

4.3 参量根轨迹的绘制

1）起止点：$p_1=0, p_2=0,\ z_1=-2$

2）分支数： 2条，1支终止于➞∞

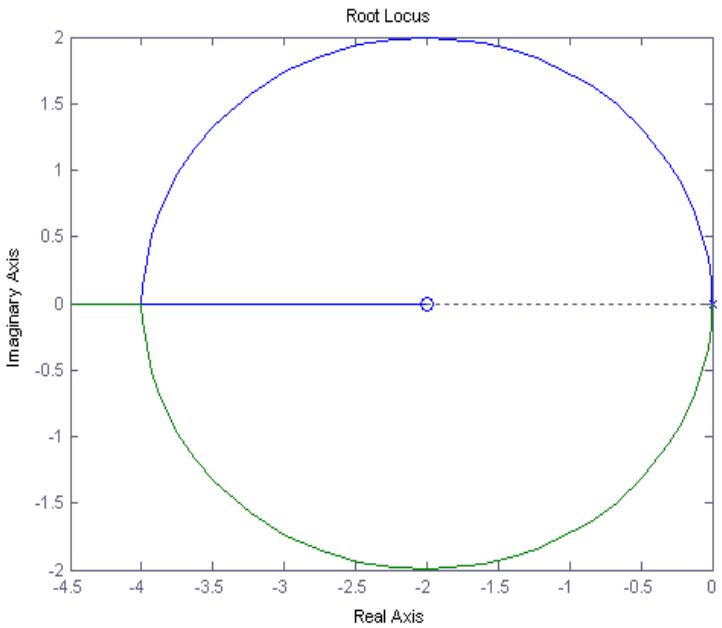
3）实轴上的根轨迹：[−∞, −2]

4）渐近线：倾角180°

5）分离点：$\dfrac{dK}{ds}=-\dfrac{s^3+5s^2+8s+3}{(s+2)^2}=0$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{0.5s^2+2s}{(0.5s+1)^2}=0\ \ s=-4, s=0(\text{舍去})$$

所以由绘制根轨迹的规则绘出根轨迹入下图



西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

4.17 设反馈控制系统中

$$G(s)=\frac{K}{s^2(s+2)(s+5)},\quad H(s)=1$$

(1)绘出系统的根轨迹图，判断闭环系统的稳定性；

(2)如果改变反馈通道的传递函数，使 $H(s)=2s+1$，判断 $H(s)$改变后的系统的稳定性，研究由于 $H(s)$改变所产生的效应。

习题4-17解

解：(1) 由$H(s)G(s)=\frac{k}{s^2(s+2)(s+5)}$

有$p_1=0$，$p_2=0$，$p_3=-2$，$p_4=-5$

1）起止点： $p_1=0$，$p_2=0$，$p_3=-2$，$p_4=-5$

2）分支数： 4条，4支终止于→∞

3）实轴上的根轨迹：[−5, −2]

4）渐近线：倾角45°，135°， −45°，−135° 交于实轴上的点(−7/2, 0)

5）分离点：$\frac{dK}{ds}=-(4s^3+21s^2+20s)=0$ $\quad s=-4, s=0(舍去), s=-\frac{5}{4}(舍去)$

4.17 设反馈控制系统中

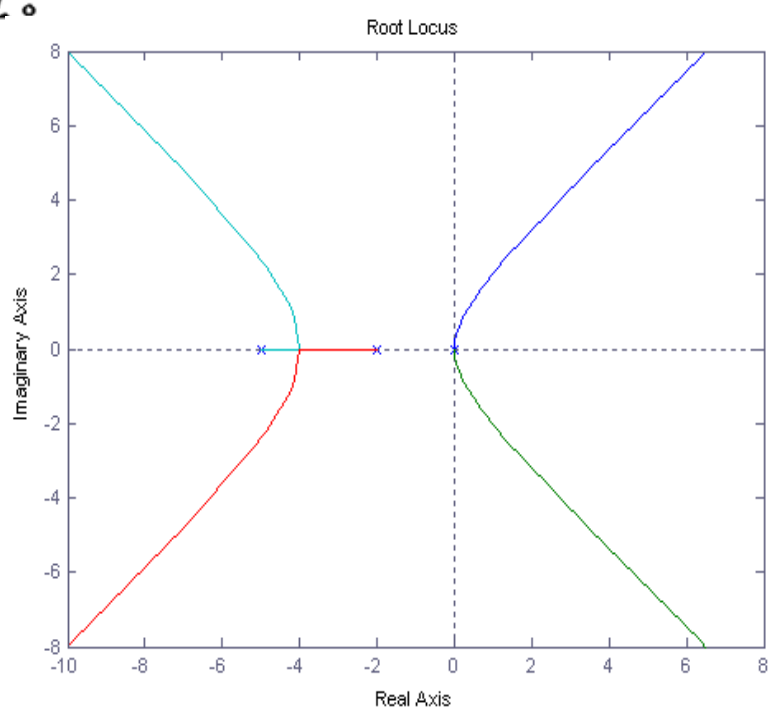
$$G(s)=\frac{K}{s^2(s+2)(s+5)},\quad H(s)=1$$

(1)绘出系统的根轨迹图，判断闭环系统的稳定性；

(2)如果改变反馈通道的传递函数，使 $H(s)=2s+1$，判断 $H(s)$改变后的系统的稳定性，研究由于 $H(s)$改变所产生的效应。

习题4-17解

(1) 由此画出根轨迹图如右：



由p_1,p_2两支根轨迹始终处于正半平面，故系统不稳定。

4.17 设反馈控制系统中

$$G(s)=\frac{K}{s^2(s+2)(s+5)},\quad H(s)=1$$

(1)绘出系统的根轨迹图，判断闭环系统的稳定性；

(2)如果改变反馈通道的传递函数，使 $H(s)=2s+1$，判断 $H(s)$ 改变后的系统的稳定性，研究由于 $H(s)$ 改变所产生的效应。

习题4-17解

(2) 当 $H(s)=2s+1$ 时，$H(s)G(s)=\frac{k(2s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}$

有 $p_1=0$，$p_2=0$，$p_3=-2$，$p_4=-5$，$z_1=-0.5$

特征方程如下：

$$s^2(s+2)(s+5)+k(2s+1)=0$$

劳斯表如右所示：

s^4	1	10	k
s^3	7	$2k$	0
s^2	$\frac{70-2k}{7}$	k	
s^1	$\frac{91k-4k^2}{70-2k}$		
s^0	k		

k=22.75时，根轨迹与虚轴相交即0<k<22.75时，系统稳定，因此新增H(s)改善了系统稳定性

4.18 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}$$

(1)画出其概略根轨迹图，并分析能否取合适的 K 值使闭环系统稳定；

(2)用根轨迹图证明，如果在负实轴上增加一个开环零点 $z_1=-\frac{1}{2}$，可使该系统稳定。

解：(1)由开环传递函数可以求出$p_{1,2}=0$，$p_3=-1$

1）起止点：$p_{1,2}=0$，$p_3=-1$

2）分支数：3条，3支终止于→∞

3）实轴上的根轨迹：[−∞, −1]

4）渐近线：倾角180°，60°，− 60° 相交于(−1/3, 0)

5）分离点：$\frac{dK}{ds}=-(3s^2+2s)=0$ s=0(舍去)，s=−2/3（舍去）

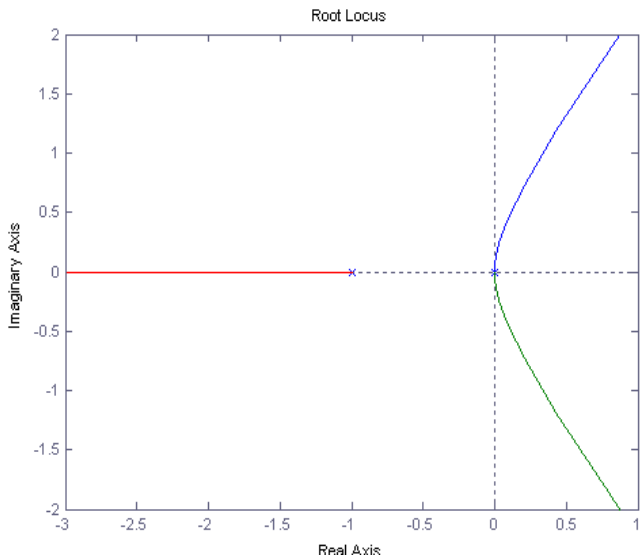
4.18 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}$$

(1)画出其概略根轨迹图，并分析能否取合适的 K 值使闭环系统稳定；

(2)用根轨迹图证明，如果在负实轴上增加一个开环零点 $z_1=-\frac{1}{2}$，可使该系统稳定。

所以绘制的根轨迹如右图：



由根轨迹图可以看出p_1,p_2两支根轨迹始终处于正半平面，故系统无法稳定。

4.18 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}$$

(2)用根轨迹图证明，如果在负实轴上增加一个开环零点 $z_1=-\frac{1}{2}$，可使该系统稳定。

习题4-18解

(2) 当增加一个开环零点$z_1=-\frac{1}{2}$，相当于

$$H(s)G(s)=\frac{k(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

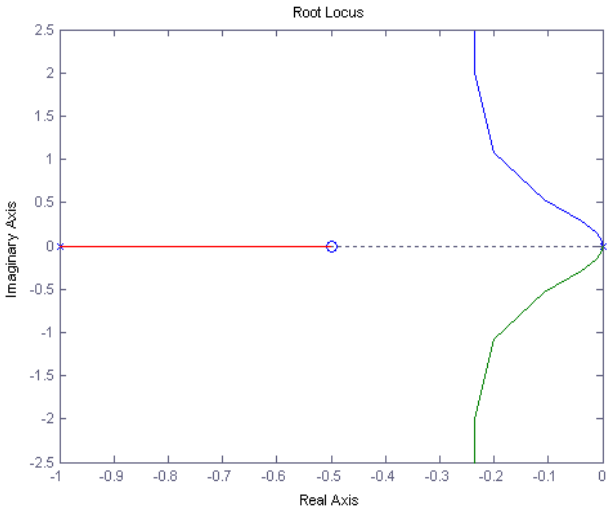
1）起止点： $p_{1,2}=0, p_3=-1. z_1=-0.5$

2）分支数： 3条，2支终止于→∞

3）实轴上的根轨迹：[−1, −0. 5]

4）渐近线：倾角90° 相交于(−1/4, 0)

5）分离点：$\frac{dK}{ds}=-\frac{4s^3+5s^2+2s}{(2s+1)^2}=0$ $s_1=0$(舍去)，$s_{2,3}=\frac{-5\pm j\sqrt{7}}{8}$ S2和S3均不在根轨迹上



所以绘制的根轨迹如右图：

可见，根轨迹均在负半平面，故系统稳定。

作业（12月5日前交）：

1. 提交第2-第4章的复习笔记
2. 设计一道自控题目，并提供答案

word编辑

学号尾数为0/1/2的，设计题目主要考察机理法建模相关内容；

学号尾数为3/4的，设计题目主要考察结构图简化及信号流图相关内容；

学号尾数为5/6/7的，设计题目主要考察时域分析相关内容（包含稳定性、稳态误差、动态性能、高阶系统简化）

学号尾数为8/9的，设计题目主要考察根轨迹相关内容