



西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 自动控制理论

## Automatic Control Theory

工业自动化系



## 开环对数幅频特性渐近曲线的绘制方法

1. 传递函数的型式（时间常数型式）；
2. 算出各环节的转角频率及 $20\log K$ 的dB值，并将转折频率从低到高排列；（环节划分）
3. 过 $\omega=1$ ， $L=20\log K$  这一点，作斜率为  $-20 \nu$  dB/dec的直线（ $\nu$ 为串联的积分环节数）；
4. 从低频段开始，每经过一个转角频率，按环节性质改变一次渐近线的斜率；
5. 若要画精确曲线，则在各转角频率附近利用误差曲线进行修正。

## 开环对数相频特性渐近曲线的绘制方法

各环节相频特性叠加，工程上往往用分析法计算各相频特性上几个点，然后连接成线。

## 系统开环极坐标图的绘制

概略（大致）开环幅相曲线（极坐标图）反映开环频率特性的三个重要因素：

- 1) 开环幅相曲线的起点 ( $\omega=0_+$ ) 和终点 ( $\omega=\infty$ ) 。
- 2) 开环幅相曲线与实轴的交点。

设 $\omega=\omega_x$ 时,  $G(j\omega_x)H(j\omega_x)$ 的虚部为:

$$\text{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$$

或  $\phi(\omega_x)=\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- 3) 开环幅相曲线的变化范围（象限、单调性）。

起点  
终点  
走向

### 工程设计中对稳定性的判断需求

- 不仅能判断系统的绝对稳定性（即是否稳定），同时能够进一步确定出系统的稳定程度；
- 对于不稳定系统，希望指出如何改进（包括改变系统参数或改变系统结构）从而使其稳定。

奈奎斯特稳定判据（简称奈氏判据）可以根据系统的开环频率特性判断闭环系统的稳定性，能够满足工程设计的需求。

奈奎斯特稳定判据的数学基础是复变函数理论中的幅角定理（或称为映射定理）。

## 映射定理

### 1. 基本思路

设单值有理复变函数 $F(s)$ ，在 $s$ 平面上的指定域内，除有限点 $s=-p_i$ 外处处解析：

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

则对于 $s$ 平面上的指定域内的每一个解析点，在 $F(s)$ 平面上必有一个点与之对应；复变函数如同特殊的映射镜，将 $s$ 平面上的 $-z_j$ 、 $-p_i$ 或轨迹 $s=\alpha+j\beta$ 投射到 $F$ 平面上的点或轨迹。

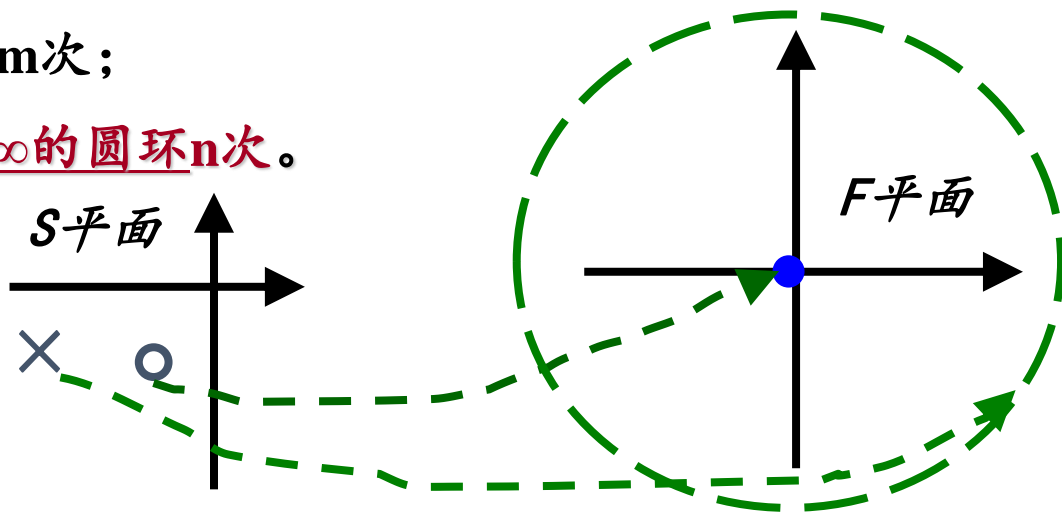
## 映射定理

- ① 点:  $s = -z_j$ ,  $F(s) = 0$ ,  $S$ 平面上的 $\circ$ 点映射为 $F$ 平面上的原点;  
 $s = -p_i$ ,  $F(s) = \infty$ ,  $S$ 平面上的 $\times$ 点映射为 $F$ 平面上的 $\infty$ 处,  
即半径为 $\infty$ 的圆环, 而零点投影成半径无穷小的圆(原)点;

$m$ 个 $\circ$ 点将映射至原点 $m$ 次;

$n$ 个 $\times$ 点将映射成半径 $\infty$ 的圆环 $n$ 次。

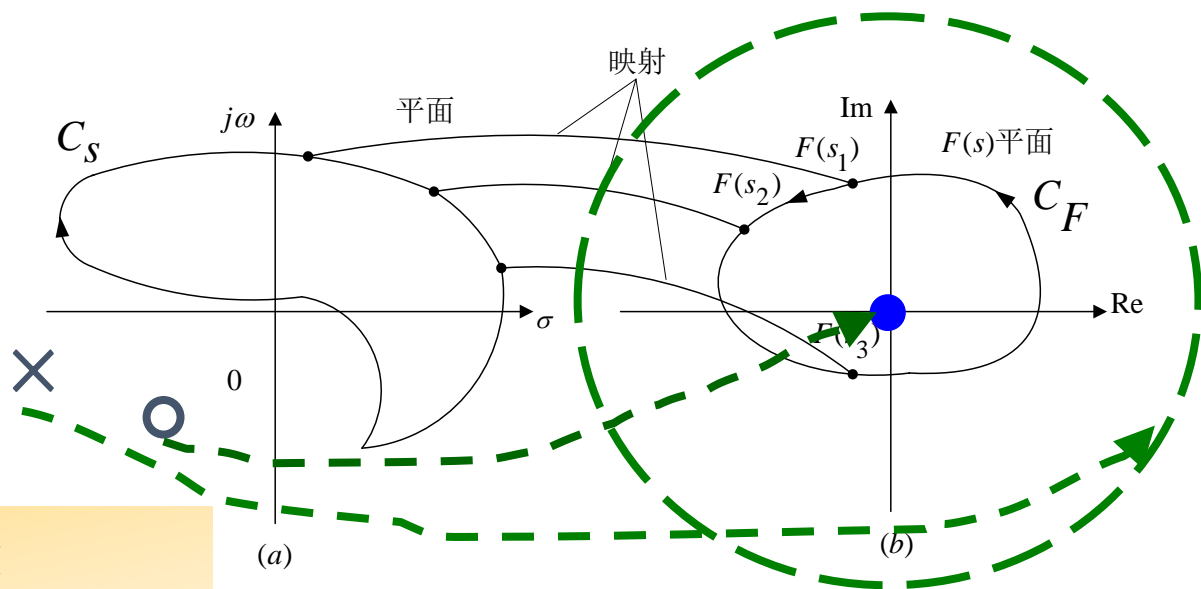
$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$



## 映射定理

② 线(轨迹): 设 $S$ 平面上有封闭曲线 $C_S$ ,  $C_S$ 不穿越 $z_j$ 、 $p_i$  (即 $s \neq -z_j$ 、 $-p_i$ ), 则 $F$ 平面上有映射封闭曲线 $C_F$ ,  $C_F$ 不穿越原点且有界。

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$



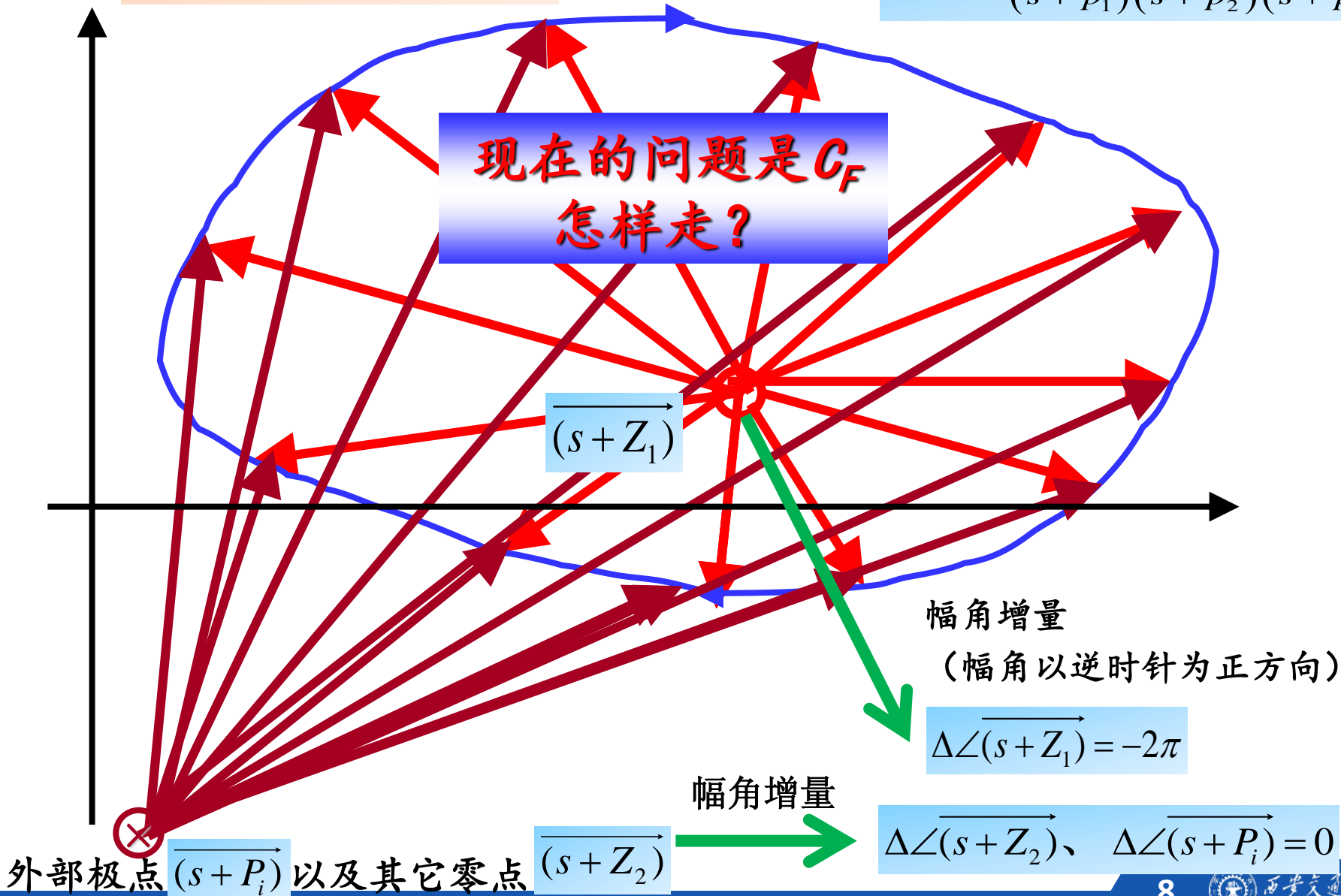
复数 $s = \alpha + j\beta$ , 则复变函数

$$F(s) = |F(s)| \angle F(s) = \text{Re}[F(s)] + j \text{Im}[F(s)]$$

如果  $C_s$  顺时针走一圈:

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

现在的问题是  $C_F$   
怎样走?



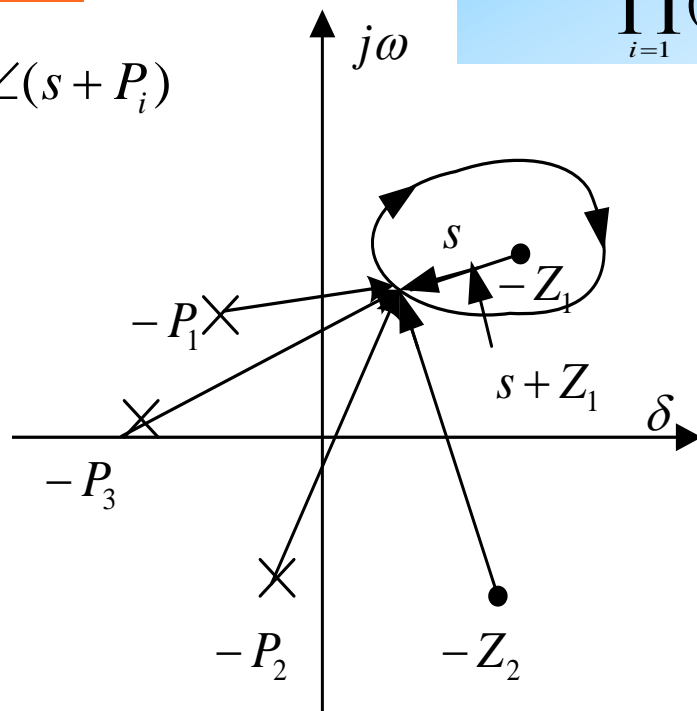
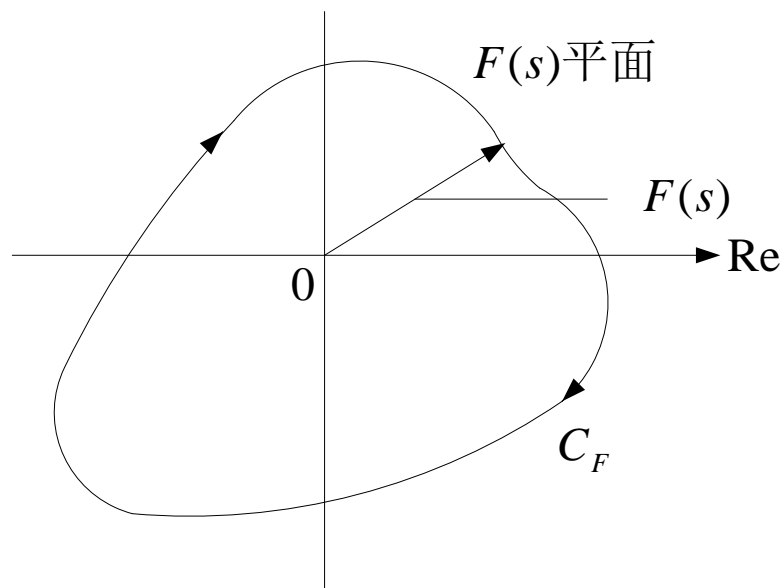


❖ 若  $C_s$  顺时针包围一个  $\circ$  点  $s = -z_1$

F(s) 幅角计算公式 
$$\angle F(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s + Z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + P_i)$$

幅角增量: 改正课本P170

$$\begin{aligned} \Delta \angle F(s) &= \sum_{j=1}^m \Delta \angle(s + Z_j) - \sum_{i=1}^n \Delta \angle(s + P_i) \\ &= -2\pi - 0 = -2\pi \end{aligned}$$



其中  $\Delta \angle(s + Z_1) = -2\pi$

其余  $\circ$ 、 $\times$  点转过的矢量角皆为零。

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

❖ 则  $C_F$  将顺时针包围原点一圈。

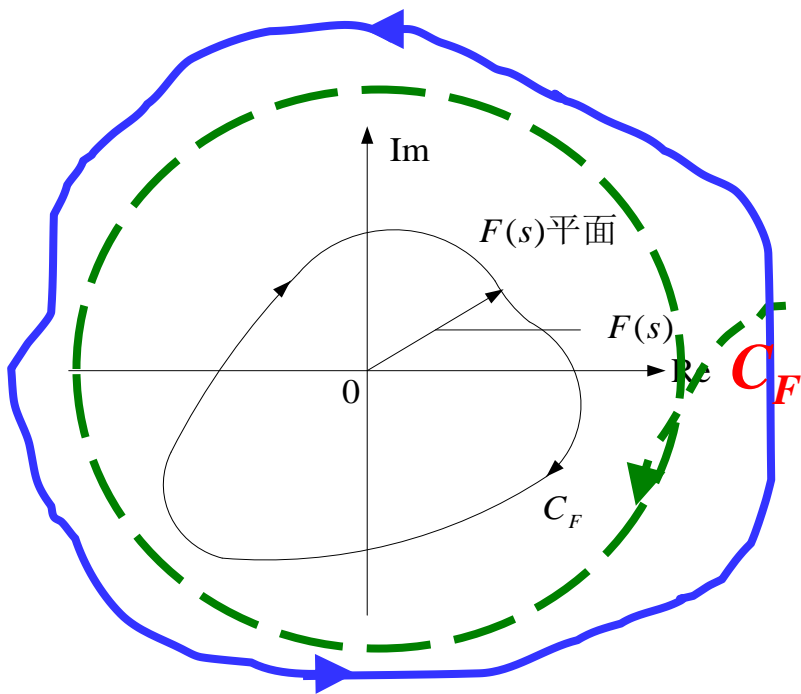
❖ 同理若  $C_S$  顺时针包围一个  $\times$  点  $s = -P_2$ , 则

$$\Delta\angle F(s) = \sum_{j=1}^m \Delta\angle(s + Z_j) - \sum_{i=1}^n \Delta\angle(s + P_i)$$

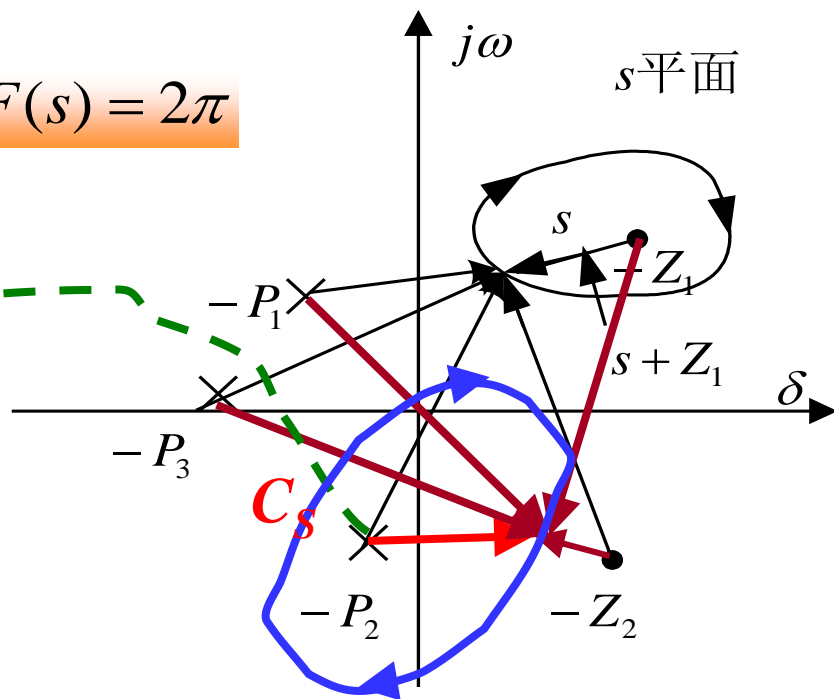
其中  $\Delta\angle(s + P_2) = -2\pi$

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

其余  $\circ$ 、 $\times$  点转过的矢量角皆为零, 即



$$\Delta\angle F(s) = 2\pi$$



❖  $C_F$  逆时针包围原点一次。

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

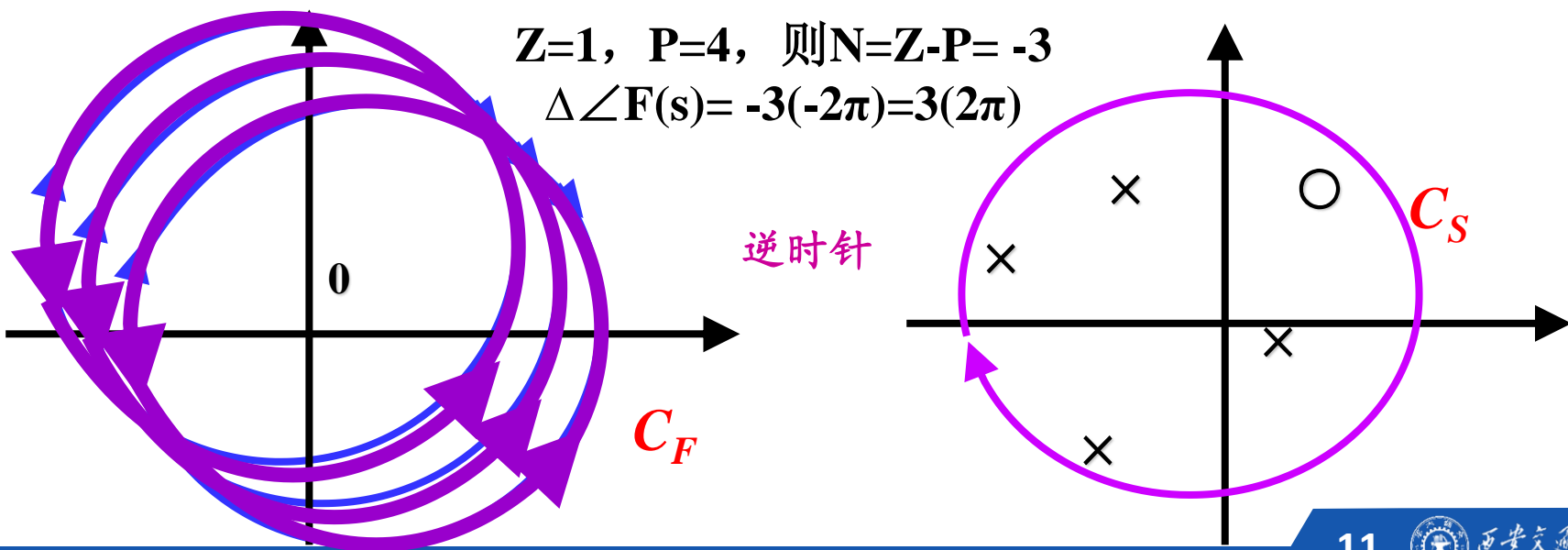
❖ 若 $C_S$ 顺时针包围了 $F(s)$ 的 $Z$ 个零点和 $P$ 个极点，则 $C_F$ 转过的矢量角增量为：

$$\sum_{j=1}^m \Delta \angle (s + Z_j) = Z(-2\pi) \quad \sum_{i=1}^n \Delta \angle (s + P_i) = P(-2\pi)$$

幅角增量：

$$\Delta \angle F(s) = Z(-2\pi) - P(-2\pi) = (Z - P)(-2\pi) = N(-2\pi)$$

➤ 结论：当 $s$ 沿 $C_S$ 顺时针方向运动一周时， $s$ 点映射到 $F$ 平面上相应点的轨迹 $C_F$ 顺时针方向包围原点 $N=Z-P$ 次。



## 奈氏判据

为了利用映射定理判断闭环系统稳定性，就必须把映射定理中的 $F(S)$ 、 $N$ 、 $Z$ 、 $P$ 等与判断系统稳定性的因素联系起来。

□ 设系统的开环传递函数为  $G_0(s) = G(s)H(s)$

□ 闭环特征方程为  $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

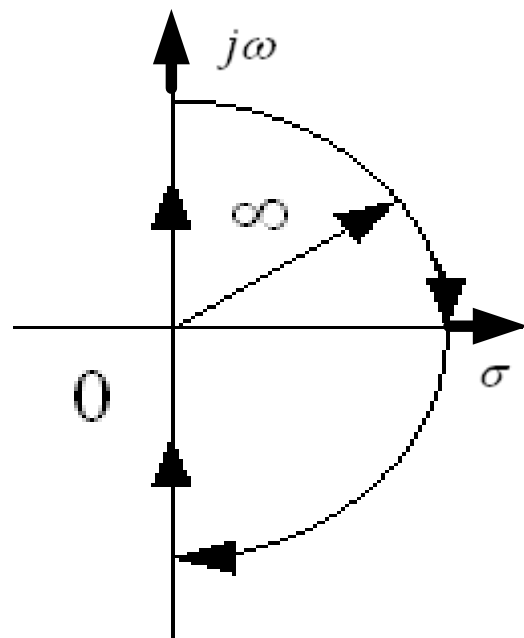
□  $F(s)$ 的零点就是闭环系统的特征根，也就是闭环极点。

□ 为了判断闭环系统稳定性(有无闭环右极点)，就是判断  $F(s)$ 有无 $s$ 平面上的右零点，

## 奈氏轨迹

为了判断稳定性(有无闭环右极点), 需要判断复变函数 $F(s)$ 有无 $s$ 平面上的右零点, 特作封闭曲线 $C_s$ 顺时针包围整个右半 $s$ 平面。

- $C_s$ : 由 $C_{s1}$ 和 $C_{s2}$ 组成, 方向取顺时针方向;
- $C_{s1}$ :  $\omega = -\infty \sim +\infty$ 整条虚轴
- $C_{s2}$ : 以原点为中心, 半径 $R=\infty$ 的右半圆



$C_s$ 称为奈奎斯特轨迹, 简称奈氏轨迹。

切记奈氏轨迹 $\neq$ 奈奎斯特图

闭环系统稳定的条件变为:  $C_s$ 应不包围闭环特征根, 即不包围 $F(s)$ 的零点

## 奈氏判据

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s + Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + P_i)}$$

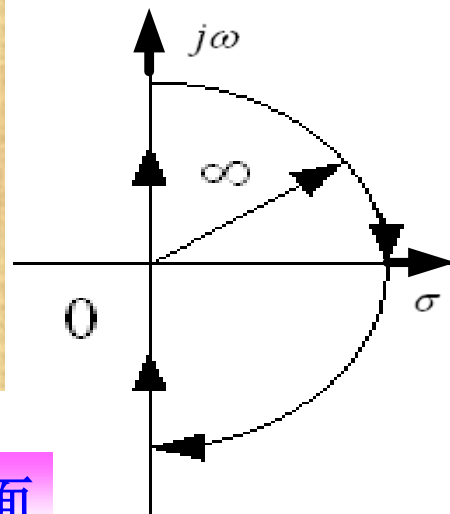
$$\Rightarrow F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s + P_i) + K \prod_{j=1}^m (s + Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + P_i)}$$

$F(s)$ 的零点=闭环特征方程的根或闭环极点

$F(s)$ 的极点=系统的开环极点

若 $Z = F(s)$ 的右零点(闭环系统的右极点数)

$P = F(s)$ 的右极点数(开环系统的右极点数)



当 $s$ 沿 $C_s$ 奈氏轨迹顺时针运动一圈, 则 $C_F$ 在 $F$ 平面上顺时针包围原点的次数为 $N = Z - P$ 。

## 奈氏判据

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s + P_i) + K \prod_{j=1}^m (s + Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + P_i)}$$

则  $C_F$  在  $F$  平面上顺时针包围原点的次数  $N = Z - P$ 。

“-”表示  
与  $C_S$  顺时  
针方向相  
反。

如果闭环系统稳定，则  $Z=0$ ， $N=-P$ ，即闭环系统稳定的条件是： $C_F$  逆时针方向包围原点的次数等于系统的开环右极点数。

由于  $C_F: F(s) = 1 + G(s)H(s) \rightarrow F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$ ，所以  $C_F$  是系统开环极坐标图（Nquist图）向右平移一个单位后得到的。

证明过程见课本P172页，略。

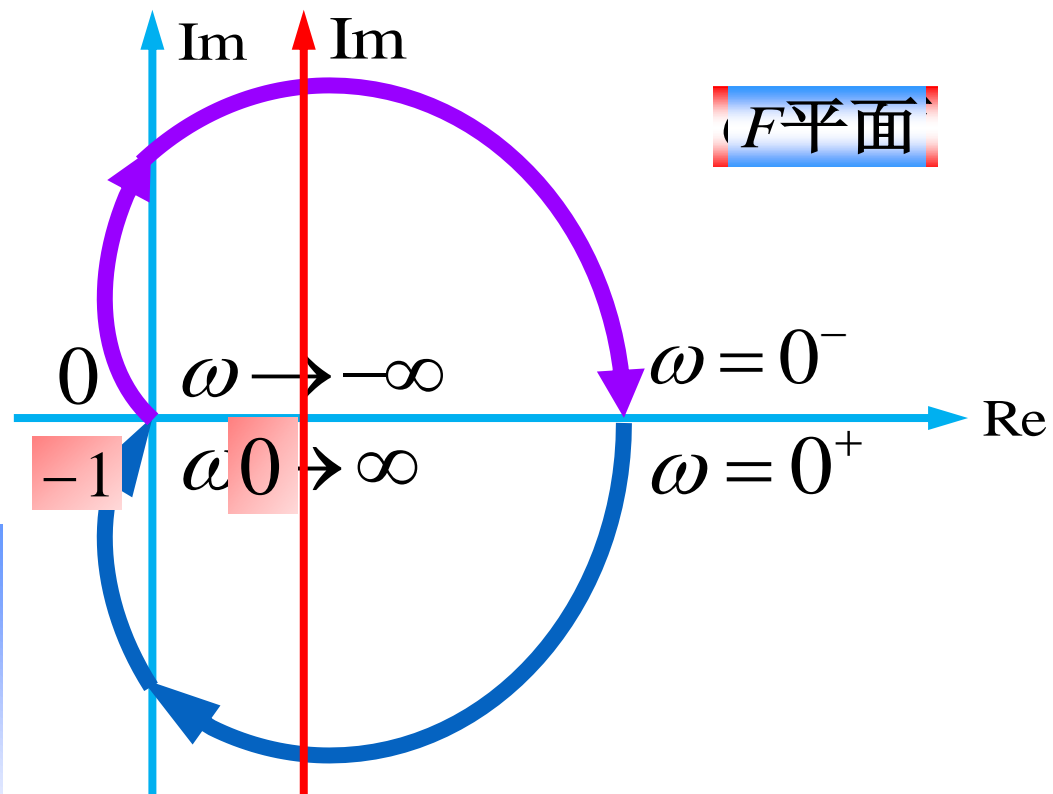
## 奈氏判据

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$C_{GH} : G(j\omega)H(j\omega)$$

$$C_F : F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

- 因此 $C_F$ 逆时针方向包围原点的次数转变为 $GH(j\omega)$ 轨迹包围 $(-1, j0)$ 点的问题。
- 映射关系也转变为 $C_S$ 与 $C_{GH}$ 之间的映射。



$F$ 平面的原点= $Nquist$ 平面的 $(-1, j0)$ 点。



## 奈氏判据

$$C_{GH} : G(j\omega)H(j\omega)$$

$F$ 平面的原点= $Nquist$ 平面的 $(-1, j0)$ 点。

$$C_F : F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

- 如果闭环系统稳定，则 $Z=0$ ， $N = -P$ ，
- $C_F$ 逆时针方向包围原点的次数等于系统的开环右极点数。

因此 闭环系统稳定的条件可重新描述为

当 $s$ 顺时针方向通过奈氏轨迹时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的次数等于系统的开环右极点数。（ $Z=0$ ， $N = -P$ ）

## 奈氏判据

$$Z=0, N=Z-P, N=-P$$

$$Z=N+P, 0=N+P$$

闭环系统稳定条件是：当s顺时针通过奈氏轨迹时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹逆时针 ( $N$ 为负)包围 $(-1, j0)$ 点的次数等于系统的开环右极点数 ( $N=-P$ )。

奈氏判据的推论或解释：

- ①若开环系统稳定( $P=0$ )，则闭环系统稳定的条件是 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹不包围 $(-1, j0)$ 点 ( $N=0$ )；
- ②若开环系统不稳定( $P \neq 0$ )，则闭环系统稳定的条件是 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的次数等于系统的开环右极点数 ( $N=-P$ )；
- ③若 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹顺时针方向包围 $(-1, j0)$ 点，则闭环系统恒不稳定 ( $N=Z-P$ 为正， $F(s)$ 出现右零点，系统出现右极点)。

理解奈氏判据的几个问题：

1. 开环与闭环的关系；
2.  $s$ 平面、 $F$ 平面、 $GH$ 平面的关系；
3.  $GH$ 轨迹 ( $\omega = -\infty \sim +\infty$ ) 与极坐标图的关系；
4. 特征点 $(-1, j0)$ 与 $GH$ 轨迹的关系；
5. 开环右极点数与 $GH$ 平面曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 包围点 $(-1, j0)$ 的次数的关系。

## Nyquist稳定判据应用举例

例:

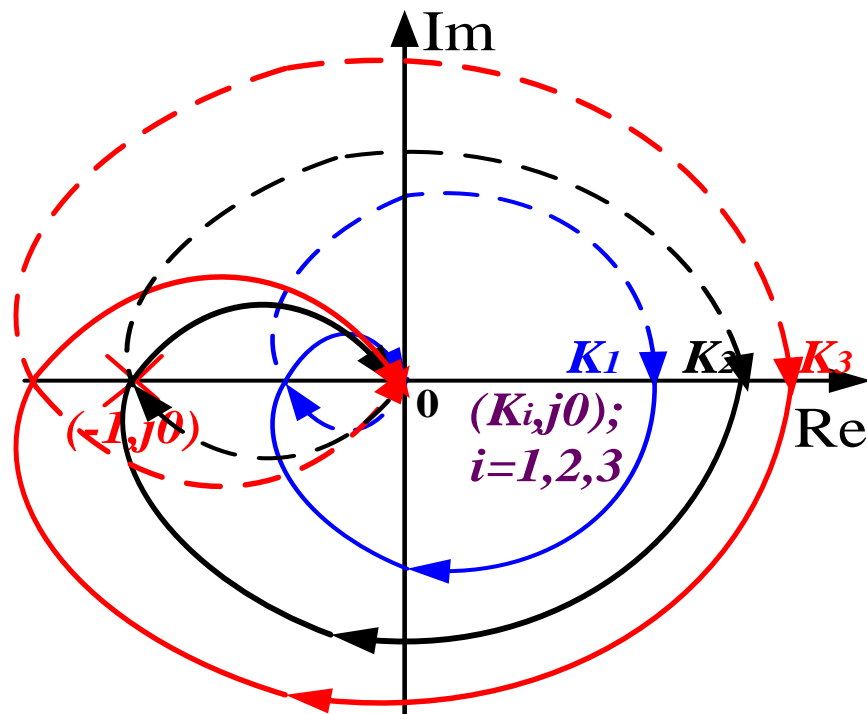
$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \quad (T_1 > T_2 > T_3 > 0)$$

$$G(j0^+)H(j0^+) = K \angle 0^\circ$$

$$G(j+\infty)H(j+\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

开环稳定 $P=0$ ，按关于实轴对称原则补 $\omega \in (-\infty, +\infty)$ 全图，假设曲线与实轴交点为 $(-1, j0)$ 时， $K=K_2$ ，则有以下三种情况 ( $K_1 < K_2 < K_3$ )；

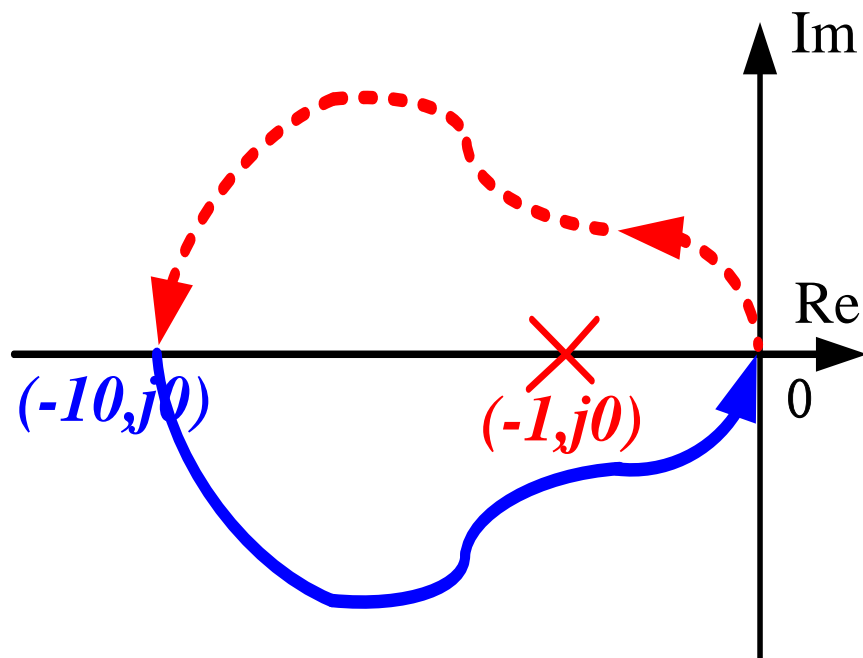
- $K=K_1$ ：不包围 $(-1, j0)$ 点， $N=0=P$ 闭环系统稳定；
- $K=K_2$ ：穿越 $(-1, j0)$ 点，闭环系统临界稳定；
- $K=K_3$ ：顺时针包围 $(-1, j0)$ 点两周， $N=2 \neq P$ ，闭环系统不稳定。



## Nyquist稳定判据应用举例

例：
$$G(s)H(s) = -\frac{10(0.1s+1)}{(-10s+1)(s+1)}$$

- 上节课例题求得其 $0+ \sim +\infty$ 的开环极坐标图，根据实轴对称性补全其奈奎斯特图，发现其逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一次；
- 由开环传函可知，存在1个开环右极点 $s=0.1$ ，因此 $P=1$ ，逆时针包围 ( $N=-1=-P$ )，因此闭环系统稳定。



## Nyquist稳定判据应用举例

例:  $G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$

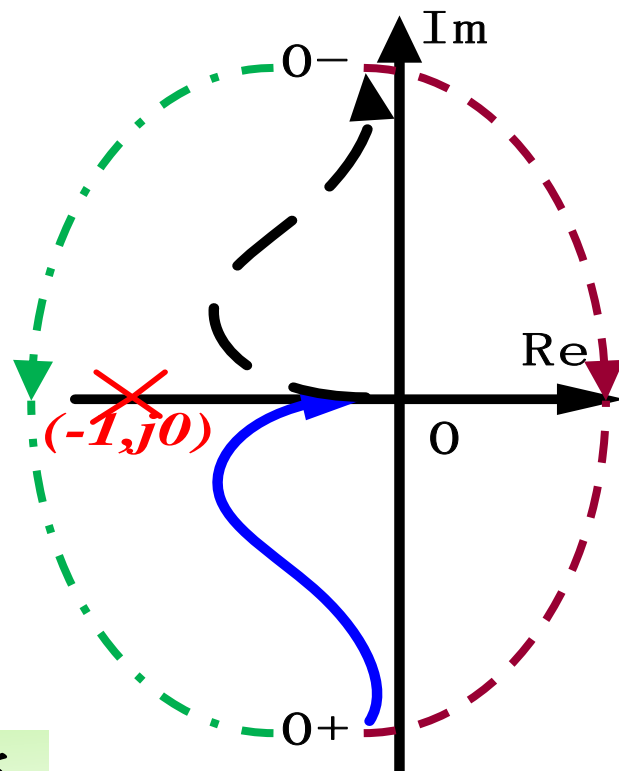
$$\left. \begin{aligned} G(j0^+)H(j0^+) &= \infty \angle -90^\circ \\ G(j+\infty)H(j+\infty) &= 0 \angle -180^\circ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (0^-, -\infty) \text{关于} \\ \text{实轴对称} \end{array}$$

$S=0$ 对应 $G(s)H(s)=\infty$ , 所以图形在 $\omega=0$ 处无界, 需要补全 $\omega$ 从 $0^- \rightarrow 0^+$ 处幅值为 $\infty$ 的图形。

问题: 补图方向? 方向不同稳定性结论相反

原因: 映射定理仅适用于封闭曲线 $C_s$ 不通过 $F(s)$ 零极点的情况, 所以奈氏轨迹不应通过 $F(s)$ 的零点或者极点。但该系统有位于虚轴上的开环极点, 也即奈氏轨迹 $C_s$ 通过了 $F(s)$ 的极点

必须从 $0^- \rightarrow 0^+$ 顺时针方向进行补图!!!

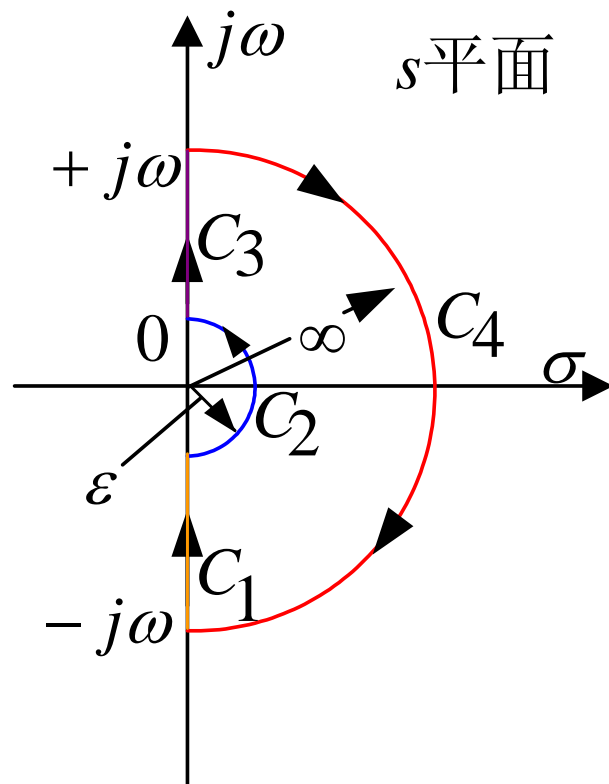


## 奈氏判据

- 必须指出，映射定理只适用于封闭曲线不通过零、极点的情况，所以奈魁斯特轨迹(奈氏轨迹)应不通过零点或极点。
- 如果系统在虚轴上（例如在原点处）有开环极点（为 I 型以上系统）时，则  $F(s)$  在虚轴上也就有极点，由于奈魁斯特轨迹不能通过  $F(s)$  的极点，因此须将它的形状略加修改，使奈魁斯特轨迹绕过虚轴上的开环极点。
- 修改后的奈氏轨迹。

## 修改后的奈氏轨迹

- $C_1$ :  $s$ 由  $-j\infty$  沿负虚轴运动到  $j0^-$ ;
- $C_2$ :  $s$ 沿着以原点为圆心, 半径为  $\varepsilon$  的半圆 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) 从  $j0^-$  逆时针运动到  $j0^+$ , 即  $s = \varepsilon e^{j\theta}$ ,  $\theta$  从  $-\pi/2$  到  $+\pi/2$ ;
- $C_3$ :  $s$ 沿着正虚轴由  $j0^+$  运动到  $+j\infty$ ;
- $C_4$ :  $s$ 沿着以原点为圆心, 以  $R$  为半径的无穷大半圆 ( $R \rightarrow \infty$ ), 从  $+j\infty$  顺时针运动到  $-j\infty$ , 即  $s = \infty e^{j\theta}$ ,  $\theta$  从  $+\pi/2$  到  $-\pi/2$ 。



修改后的奈魁斯特轨迹包围了除原点以外的整个右半  $s$  平面。



## 修改后的奈氏轨迹

若  $G(s)H(s)$  有虚轴极点（原点），即当开环系统含

有积分环节时，设： $G(s)H(s) = \frac{1}{s^v} G_1(s)$  ( $v > 0, |G_1(j\omega)| \neq \infty$ )

则： $A(0_+) = \infty$

$\phi(0_+) = \angle G(j0_+)H(j0_+) = v \times (-90^\circ) + \angle G_1(j0_+)$ ,

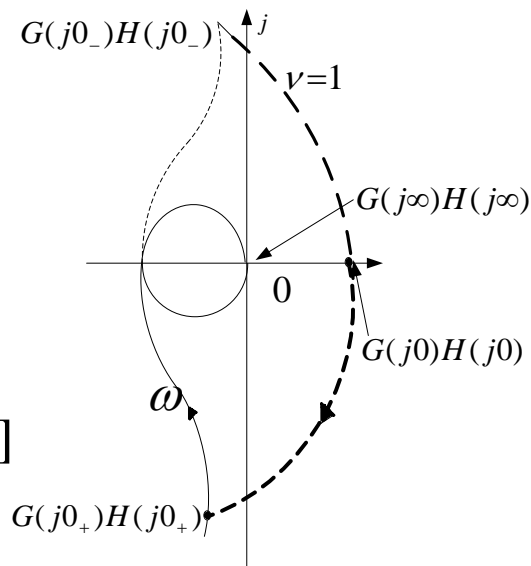
在原点附近，闭合曲线  $C_2$  为  $s = \varepsilon e^{j\theta}$   $\theta \in [-90^\circ, +90^\circ]$

且有  $G_1(\varepsilon e^{j\theta}) = G_1(j0)$

故

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} = \infty e^{j[v \times (-\theta) + \angle G_1(j0)]}$$

对应的曲线为  $G(j0_-)H(j0_-)$  点起，半径为  $\infty$ 、圆心角为  $v \times (-\theta)$  的圆弧，即可从  $G(j0_-)H(j0_-)$  点起顺时针作半径无穷大、圆心角为  $v \times 180^\circ$  的圆弧，如图中虚线所示。



## 修改后的奈氏轨迹

$G(s)H(s)$  轨迹由补全后的开环极坐标图和辅助圆构成。

- 对开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的 $v$ 型系统( $v \geq 1$ )奈氏稳定判据可叙述为:
  - ✓ 如果 $G(s)H(s)$ 在右半 $s$ 平面上有 $P$ 个极点, 则闭环系统稳定的充要条件为,  $s$ 顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时,  $G(s)H(s)$ 轨迹逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 $P$ 次。
  - ✓ 对于 $v$ 型最小相位系统(开环系统), 闭环系统稳定的充要条件为, 当 $s$ 顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时,  $G(s)H(s)$ 轨迹不包围 $(-1, j0)$ 点。

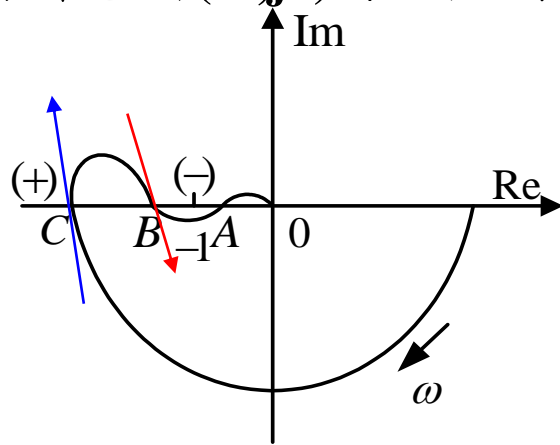
## 奈氏判据

闭合曲线包围特征点圈数（次数） $N$ 的计算

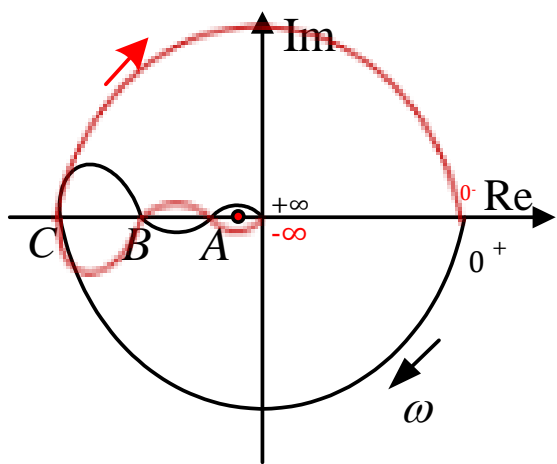
设 $N$ 为闭合曲线穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴的次数， $N_+$ 表示闭合曲线从下向上穿越（正穿越，意味着闭合曲线的顺时针包围）的次数和， $N_-$ 表示闭合曲线从上向下穿越（负穿越，意味着闭合曲线的逆时针包围）的次数和，则闭合曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 特征点圈数为：

$$N = N_+ - N_-$$

另一种判断稳定的方式。



半闭合曲线示意穿越方向。

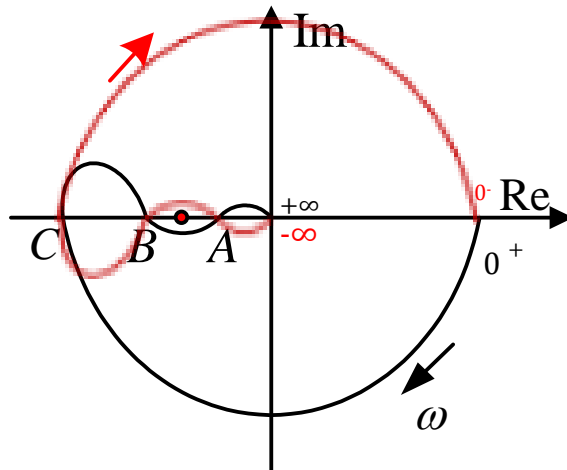


$$N_+ = 4$$

$$N_- = 2$$

$$N = 4 - 2 = 2$$

顺时针包围2圈

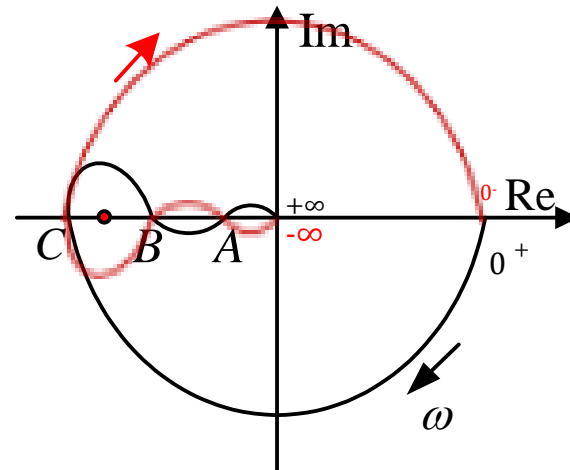


$$N_+ = 2$$

$$N_- = 2$$

$$N = 2 - 2 = 0$$

顺时针包围0圈



$$N_+ = 2$$

$$N_- = 0$$

$$N = 2 - 0 = 2$$

顺时针包围2圈

例: 
$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)} \quad \tau, T > 0$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{K(\tau j\omega + 1)}{\omega^2(Tj\omega + 1)} \quad \varphi(\omega) = -180^\circ + \operatorname{tg}^{-1}(\omega\tau) - \operatorname{tg}^{-1}(\omega T)$$

$$G(j0^+)H(j0^+) = \infty \angle -\pi$$

$$G(j+\infty)H(j+\infty) = 0 \angle -\pi$$

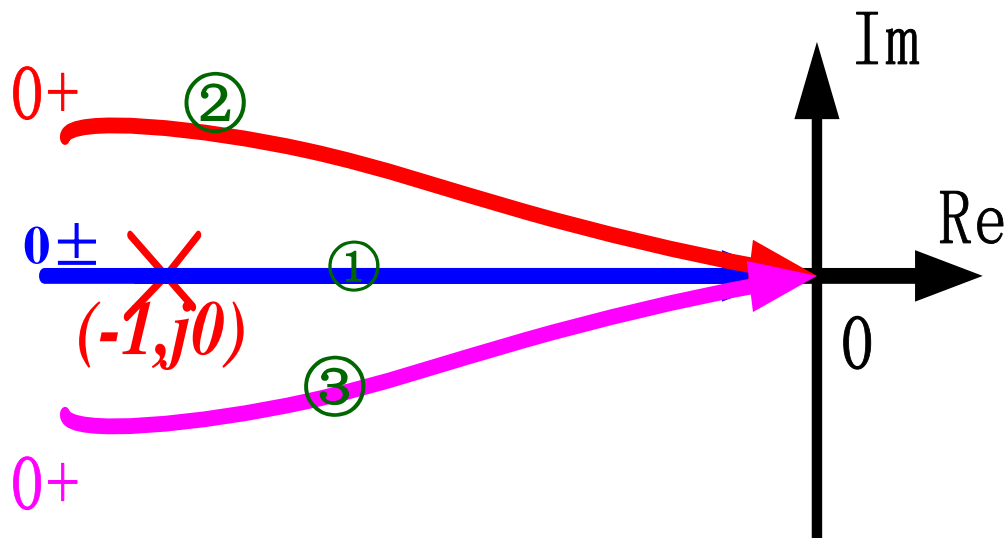
$\omega \in [0^+, +\infty)$  之间走向  
取决于 $\tau$ 与 $T$ 的大小。

①  $\tau = T$ , 沿负实轴 $\rightarrow$ 原点。

②  $\tau < T$ ,  $\operatorname{tg}^{-1}\omega\tau < \operatorname{tg}^{-1}\omega T$ ,  
相角 $< -180^\circ$ ;

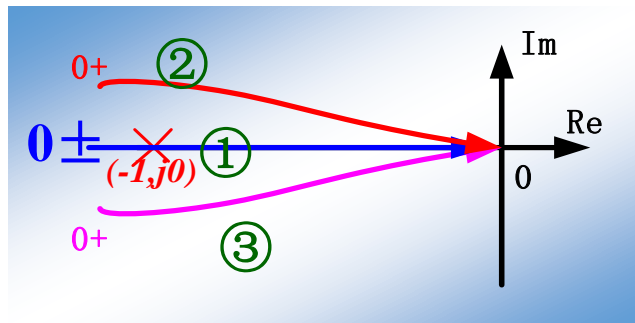
③  $\tau > T$ ,  $\operatorname{tg}^{-1}\omega\tau > \operatorname{tg}^{-1}\omega T$ ,  
相角 $> -180^\circ$ ;

补图:  $v=2$ ,  $0^- \rightarrow 0^+$  顺时针、  
转过 $2\pi$ 角度、 $R \rightarrow \infty$ 。



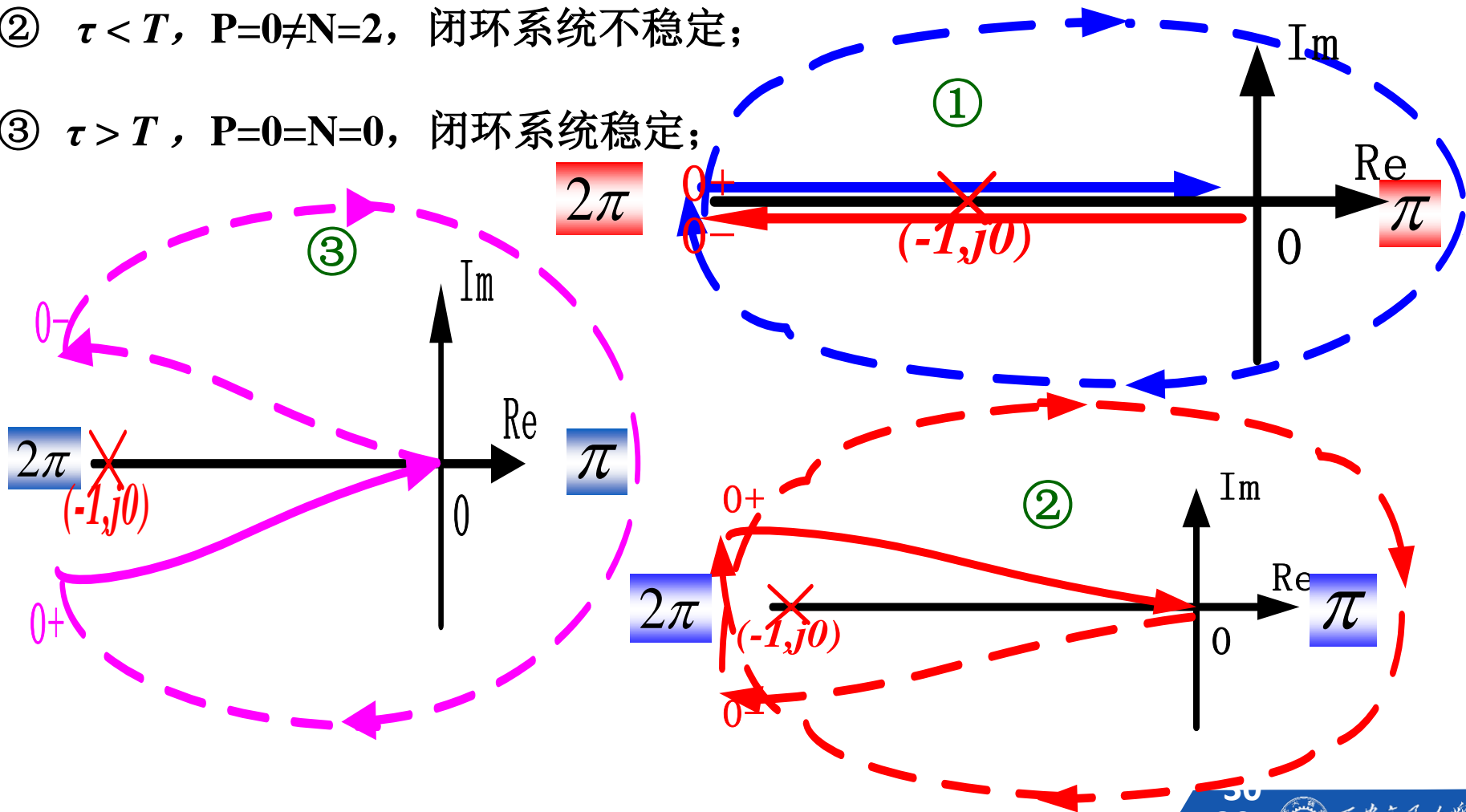
# 5 5.4 用频率法分析系统稳定性

①  $\tau = T$ , 穿越 $(-1, j0)$ 点, 闭环系统临界稳定;



②  $\tau < T$ ,  $P=0 \neq N=2$ , 闭环系统不稳定;

③  $\tau > T$ ,  $P=0=N=0$ , 闭环系统稳定;



## 5.4 用频率法分析系统稳定性

例：非最小相位系统  $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$   $K > 0$

解：

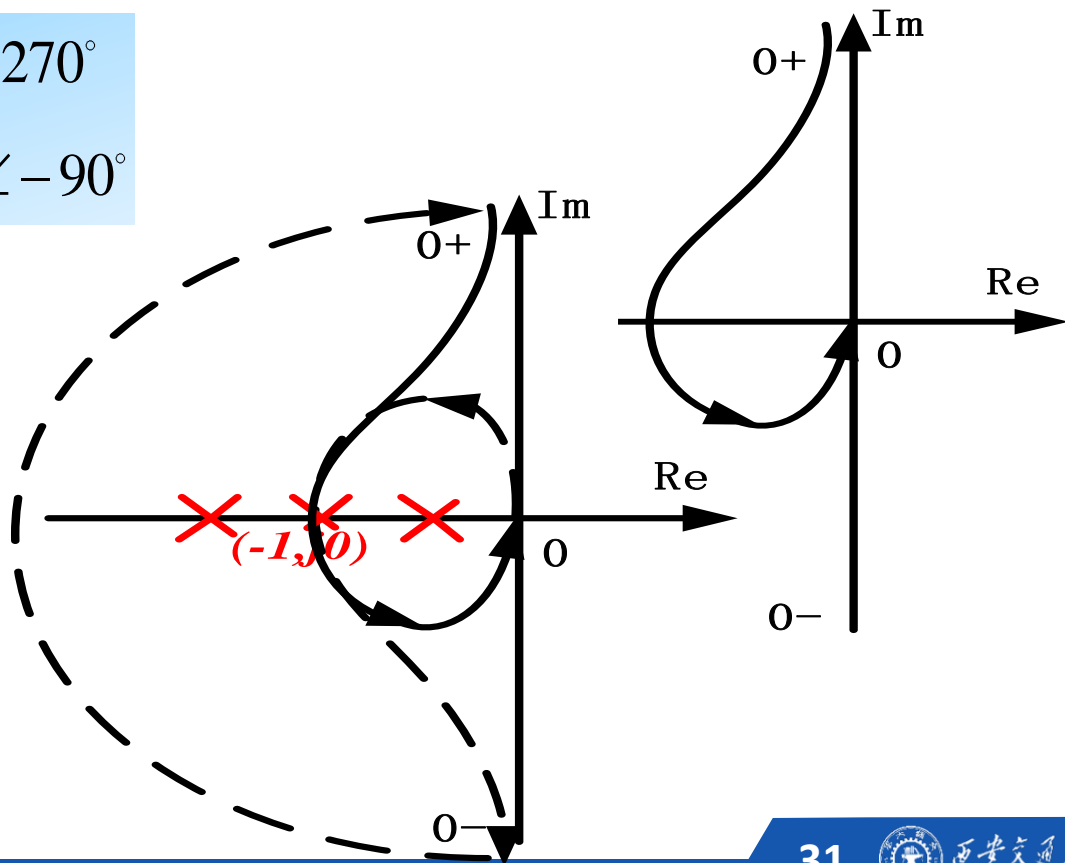
$$\phi(\omega) = -90^\circ + \underline{tg^{-1} \frac{\omega}{3}} - 180^\circ + tg^{-1} \omega = -270^\circ + tg^{-1} \frac{\omega}{3} + tg^{-1} \omega$$

$$G(j0^+)H(j0^+) = \infty \angle -270^\circ$$

$$G(j+\infty)H(j+\infty) = 0 \angle -90^\circ$$

补图： $v=1$ ,  $0^- \rightarrow 0^+$

顺时针转 $\pi$ 。需要确定与负实轴的交点后  
再作稳定性判断。



## 5.4 用频率法分析系统稳定性

求与负实轴的交点:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

$$\varphi(\omega) = -270^\circ + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{3} + \operatorname{tg}^{-1} \omega$$

$$\phi(\omega) = -180^\circ \rightarrow \omega = \sqrt{3}$$

代入:

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \left| \frac{K(3+j\sqrt{3})}{\sqrt{3}(j\sqrt{3}-1)} \right| = K$$

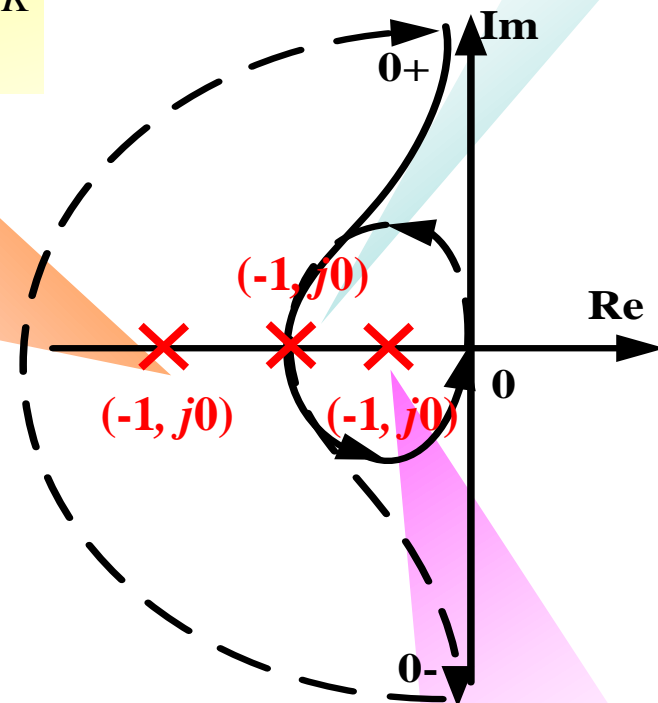
交点:  $(-K, j0)$ 

$K < 1$ ,  $P=1$ ,  
 $N=1$ , 顺时针  
 包围一圈,  
 $Z=N+P=2$ ,  
 会出现两个  
 闭环右极点  
 闭环不稳定。

◆ 本例系统稳定的增益范围为  $K > 1$ 。

$K > 1$ ,  $P=1$ , ( $N=-1=-P$ ), 逆时针包围  
 一圈,  $Z=N+P=-1+1=0$  闭环稳定。

$K=1$  临界稳定。





## 5.4 用频率法分析系统稳定性

例：非最小相位系统  $G(s)H(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-\tau s}$  ( $K > T > 0$ )

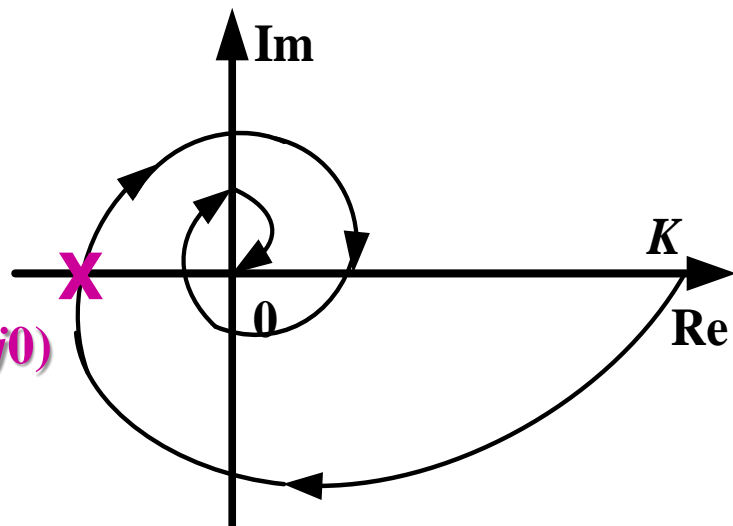
求临界稳定时的  $\tau = f(K)$ 。

解：  $\phi(\omega) = -tg^{-1}(\omega T) - \omega\tau$

$$G(j0^+)H(j0^+) = K \angle 0^\circ$$

$$G(j+\infty)H(j+\infty) = 0 \angle -\infty$$

若临界稳定，则  $G(j\omega)H(j\omega)$  最外圈穿越  $(-1, j0)$  点。

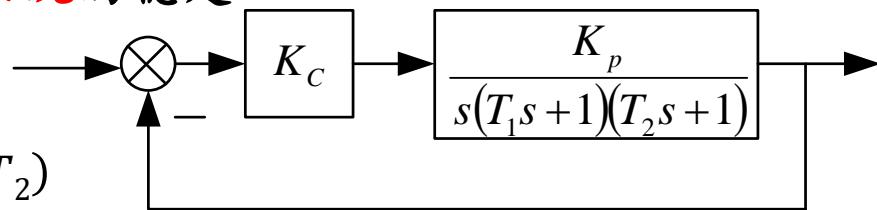


$$\begin{cases} |G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} = 1 & \Rightarrow \tau = \frac{T(\pi - tg^{-1}\sqrt{K^2-1})}{\sqrt{K^2-1}} \\ \phi(\omega) = -tg^{-1}\omega T - \omega\tau = -(2k+1)180^\circ \end{cases}$$

( $k=0$ 时第一次穿越)

# 5.4 用频率法分析系统稳定性

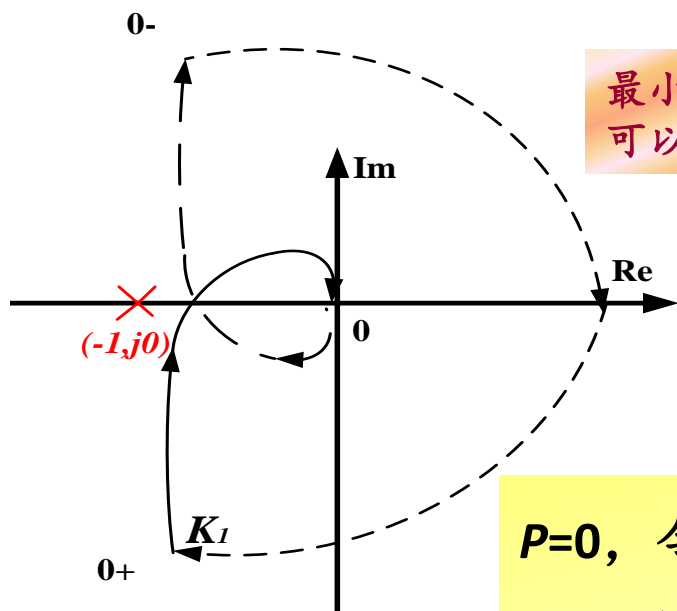
**例：**试用奈氏判据分析图示**最小相位系统**的稳定性与系统开环总增益的关系。



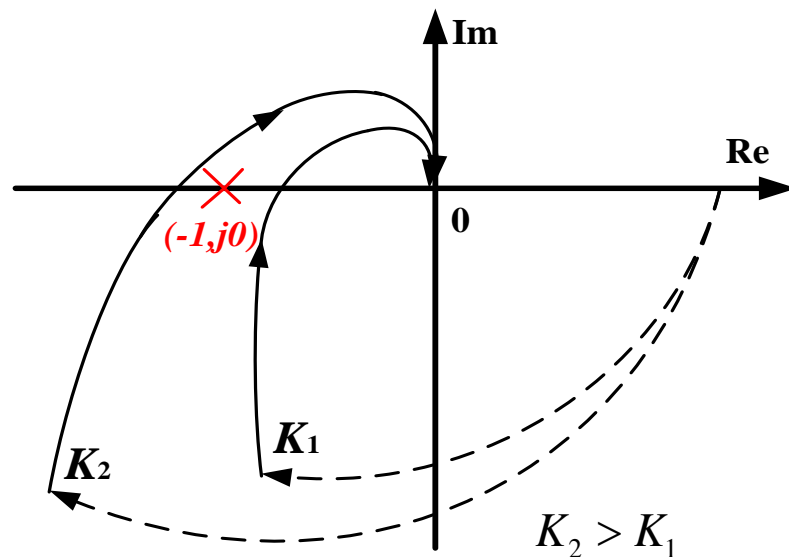
解：  $\phi(\omega) = -90^\circ - \text{tg}^{-1}(\omega T_1) - \text{tg}^{-1}(\omega T_2)$

$$G(j0^+)H(j0^+) = \infty \angle -90^\circ$$

$$G(j+\infty)H(j+\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

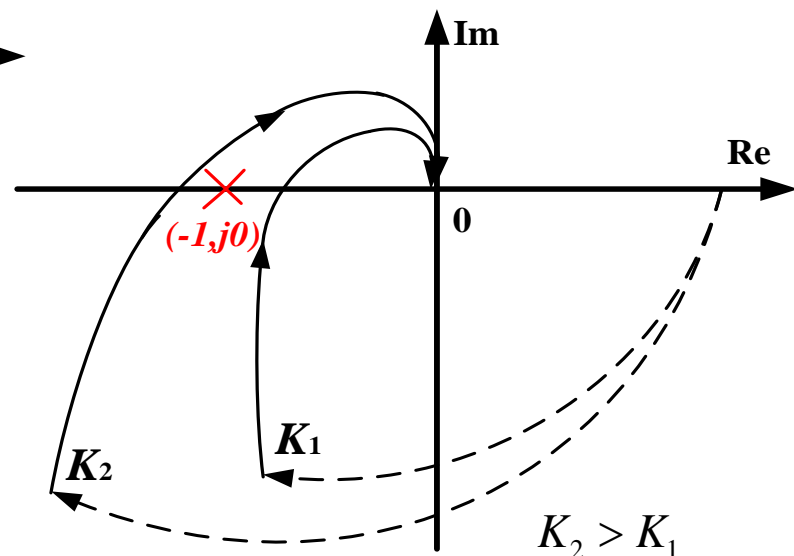
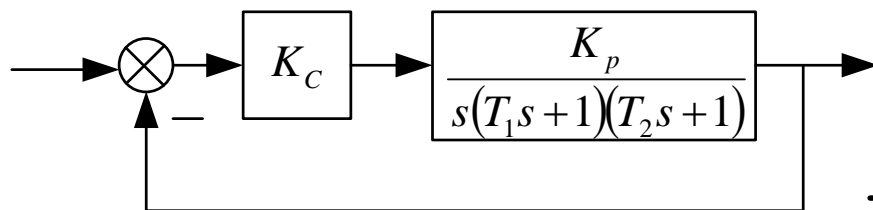


最小相位系统  
可以用半张图



$P=0$ ，令  $K=K_C K_p$  则：

- 1)  $K=K_2$ 时，顺时针包围两圈，不稳定；
- 2)  $K=K_1$ 时，不包围，稳定。



确定穿越时 $K$ 的临界值:

$$\begin{cases} |G(j\omega)H(j\omega)| = 1 \\ \phi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{K}{\omega \sqrt{1+(\omega T_1)^2} \sqrt{1+(\omega T_2)^2}} = 1 \\ -(\operatorname{tg}^{-1} \omega T_1 + \operatorname{tg}^{-1} \omega T_2 + 90^\circ) = -180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \\ K = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \end{cases}$$

闭环系统稳定的 $K$ 值范围是:  $0 < K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$ 。

## 映射定理

- ✓  $F(s)$  为单值有理复变函数， $C_s$  为  $s$  平面上的封闭曲线，设  $P$  及  $Z$  分别表示  $F(s)$  在  $C_s$  内的极点数和零点数。当  $s$  沿顺时针方向通过  $C_s$  运动一周时， $s$  点映射到  $F$  平面上的轨迹  $C_F$  顺时针方向包围原点的次数为  $N=Z-P$ ，若  $N$  为负，则表示  $C_F$  逆时针方向

## 奈氏判据

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s + Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + P_i)}$$

$$\Rightarrow F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s + P_i) + K \prod_{j=1}^m (s + Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + P_i)}$$

$F(s)$  的零点 = 闭环特征方程的根或闭环极点

$F(s)$  的极点 = 系统的开环极点

若  $Z = F(s)$  的右零点数 (闭环系统的右极点数)

$P = F(s)$  的右极点数 (开环系统的右极点数)

如果闭环系统稳定，则  $Z=0$ ， $N = -P$ ，即闭环系统稳定的条件是： $C_F$  逆时针方向包围原点的次数等于系统的开环右极点数。

## □ 奈氏判据

$$C_{GH} : G(j\omega)H(j\omega)$$

$F$ 平面的原点= $Nquist$ 平面的 $(-1, j0)$ 点。

$$C_F : F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

因此 **闭环系统稳定的条件**可重新描述为

当 $s$ 顺时针方向通过奈氏轨迹时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的次数等于系统的开环右极点数。 ( $Z=0, N=-P$ )

## □ 闭合曲线包围特征点圈数（次数） $N$ 的计算

设 $N$ 为闭合曲线**穿越**  $(-1, j0)$ 点**左侧负实轴**的次数， $N_+$ 表示闭合曲线从下向上穿越的次数和， $N_-$ 表示闭合曲线从上向下穿越的次数和，则：

$$N = N_+ - N_-$$

## □ 修改后的奈氏轨迹

$G(s)H(s)$  轨迹由开环极坐标图和辅助圆构成。

- 对开环传递函数  $G(s)H(s)$  的  $v$  型系统 ( $v \geq 1$ ) 奈氏稳定判据可叙述为：
  - ✓ 如果  $G(s)H(s)$  在右半  $s$  平面上有  $P$  个极点，则闭环系统稳定的充要条件为， $s$  顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时， $G(s)H(s)$  轨迹逆时针方向包围  $(-1, j0)$  点  $P$  次。
  - ✓ 对于  $v$  型最小相位系统，闭环系统稳定的充要条件为，当  $s$  顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时， $G(s)H(s)$  轨迹不包围  $(-1, j0)$  点。