西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

□由高阶微分方程建立动态方程-微分方程不含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u$$

$$x_1=y,\quad x_2=\dot{y},\quad \cdots,\quad x_n=y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u\\ y=x_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx\end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b_0\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]$$

上节课要点复习

由高阶微分方程建立动态方程-微分方程含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

$$\begin{cases}x_1=y-h_0u\\ x_i=\dot{x}_{i-1}-h_{i-1}u\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots n)$$

h_i是待定常数

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=y-h_0u\\ x_2=\dot{x}_1-h_1u=\dot{y}-h_0\dot{u}-h_1u\\ x_3=\dot{x}_2-h_2u=\ddot{y}-h_0\ddot{u}-h_1\dot{u}-h_2u\\ \quad\vdots\\ x_n=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u=y^{(n-1)}-h_0u^{(n-1)}-h_1u^{(n-2)}-\cdots-h_{n-1}u\end{cases}$$

$$\begin{cases}h_0=b_n\\ h_1=b_{n-1}-a_{n-1}h_0\\ \quad\vdots\\ h_{n-1}=b_1-a_{n-1}h_{n-2}-\cdots-+x_n+h_{n-1}u\\ h_n=b_0-a_{n-1}h_{n-1}-\cdots-a_1h_1-a_0h_0\end{cases}$$

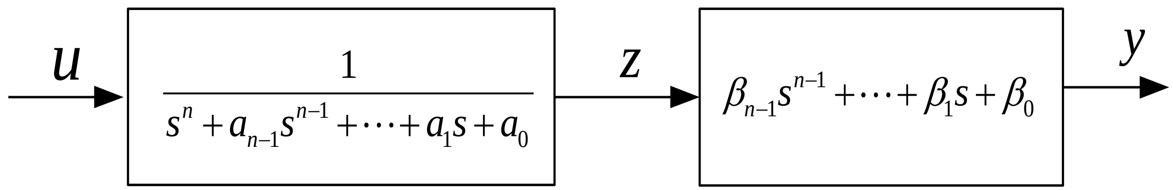
$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_{n-1}\\h_n\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]\quad d=[h_0]$$

上节课要点复习

由系统传递函数建立动态方程 ① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$



$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_c x+b_c u\\ y&=c_c x\end{aligned}\right\}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\quad c_c=[\beta_o\quad \beta_1\quad \cdots\quad \beta_{n-1}]$$

能控标准型

能观标准型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_o x+b_0 u\\ y&=c_o x\end{aligned}\right\}$$

$$A_o=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_o=\begin{bmatrix}\beta_o\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}\quad c_o=[0\quad \cdots\quad 0\quad 1]$$

$$A_c=A_o^T\qquad b_c=c_o^T\qquad c_c=b_o^T$$

对偶关系

上节课要点复习

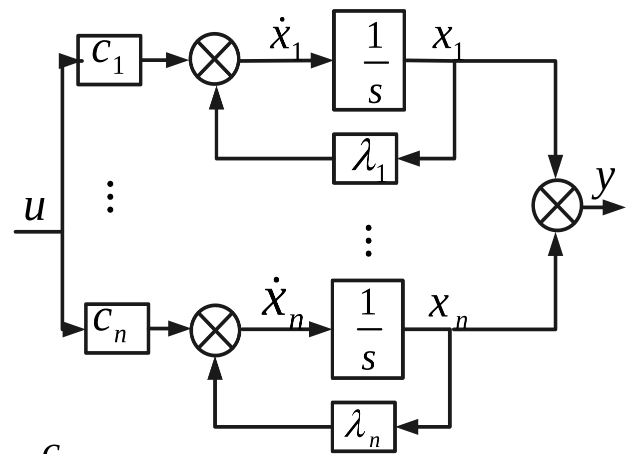
$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

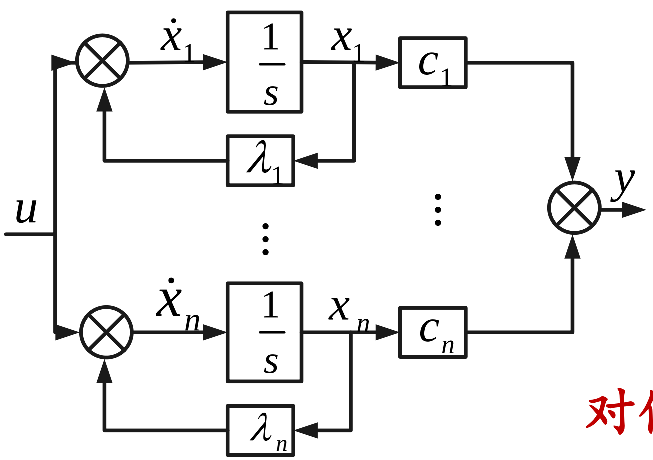
□由系统传递函数建立动态方程② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

状态变量： $X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)$, $\quad i=1,2,\cdots,n$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=[c_1\quad c_2\quad\cdots\quad c_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$





状态变量： $X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u \qquad y=[1\quad 1\quad\cdots\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

对偶关系

8 上节课要点复习

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

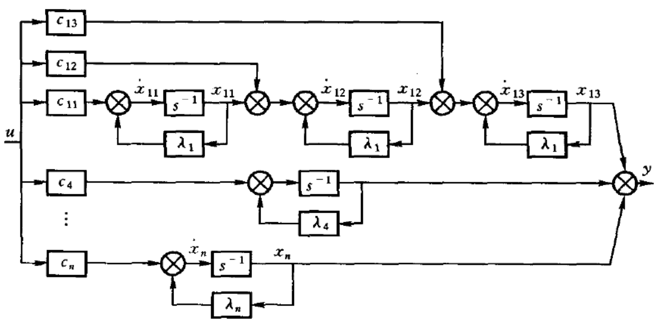
□由系统传递函数建立动态方程 ③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

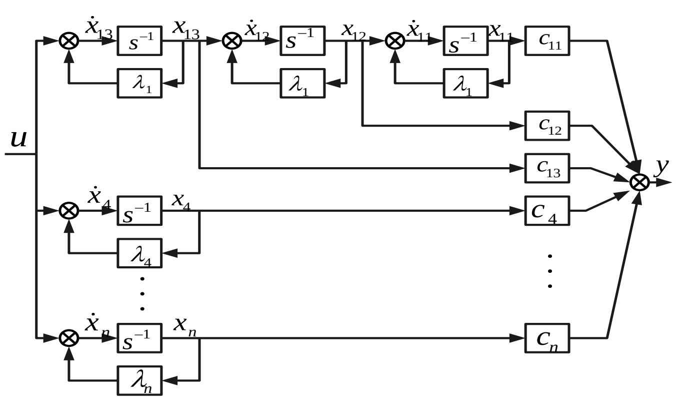
$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_j}\right]U(s)$$

状态变量： $X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)$

约当块

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 1\\ \hline 1\\ \vdots\\ 1\end{array}\right]u \qquad y=\left[\underline{c_{11}\ \cdots c_{1r}}\,\middle|\,c_{r+1}\cdots\ c_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$





对偶关系

状态变量： $X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

约当块

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \ddots & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}c_{11}\\ \vdots\\ c_{1r}\\ \hline c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{array}\right]u \qquad y=\left[\underline{0\ \cdots 1}\,\middle|\,1\cdots\ 0\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

8.2 动态方程的响应（求解）

当系统的状态空间模型建立后，在一定的初始条件和输入信号作用下，就可以求解它的状态响应和输出响应。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad 一阶微分方程$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad 线性代数方程$$

已知：初始状态$x(0)$，输入$u(t)$，当t>0时，求$x(t)$， $y(t)$ 。

分两步：(1) 求齐次方程 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ $u(t)=0$ 零输入响应

(2) 求非齐次方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

全响应 $\begin{cases} \text{零输入响应：} u(t)=0 & \text{仅由} x(0) \text{产生} \\ \text{零状态响应：} x(0)=0 & \text{仅由} u(t) \text{产生} \end{cases}$

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统齐次状态方程的解

齐次状态方程（输入为零即无控制作用下的状态方程）：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad \text{且满足：} x(t)\big|_{t=0} = x_0$$

- 幂级数法（标量微分方程）

一阶系统，标量微分方程：

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad x(t)\big|_{t=0} = x(0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int a dt \Rightarrow \ln x(t) = at + c \qquad \Rightarrow \ln x(0) = c$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{at+c} = e^c e^{at} = x(0)e^{at} = e^{at}x(0)$$

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统齐次状态方程的解

- 幂级数法（标量→向量微分方程）

$$\dot{x}(t)=ax(t) \quad \Rightarrow \quad x(t)=e^{at}x(0)$$

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \quad \Rightarrow \quad x(t)=??$$

设齐次方程的解是时间t的向量幂级数，即

$$x(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+......+b_kt^k+......$$

其中$x, b_0, b_1, b_k \ldots\ldots$都是n维向量，且$x(0)=b_0$，求导并考虑状态方程

$$\dot{x}(t)=b_1+2b_2t+......+kb_kt^{k-1}+......=Ax(t)=A(b_0+b_1t+b_2t^2......+b_kt^k+......)$$

两边系数相等，即得

$$b_1=Ab_0$$

$$b_2=\frac{1}{2}Ab_1=\frac{1}{2}A^2b_0$$

$$\ldots$$

$$b_k=\frac{1}{k}Ab_{k-1}=\frac{1}{k!}A^kb_0$$

将其连同 $x(0)=b_0$ 代入

$$x(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+......+b_kt^k+......$$

线性定常系统齐次状态方程的解

- 幂级数法（标量→向量微分方程）

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \ldots\ldots)x(0)$$

定义：

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x(0)$$

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统齐次状态方程的解

□ 幂级数法

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{at}x(0)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x(0)$$

是微分方程解的两个条件：(1)解满足方程；

(2)解满足初始条件： $x(t)\big|_{t=0} = x_0$

向量微分方程与标量微分方程在解的形式上是相似的，故e^{At}称为矩阵指数函数。由于$x(t)$由$x(0)$转移而来，e^{At}又称为状态转移矩阵，记为$\phi(t)$，即$\phi(t)= e^{At}$，所以齐次状态方程求解问题的核心就是状态转移矩阵的计算问题。

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统齐次状态方程的解

- 拉氏变换法

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \overset{L}{\Rightarrow} sIX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

$$\Rightarrow x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

$$x(t) = \phi(t)x(0) = e^{At}x(0)$$

$$\phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

线性定常系统状态转移矩阵的性质

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$\Phi(0) = e^{At}\big|_{t=0} = I \qquad (e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt) \qquad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t)$$

若A为n阶对角矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

若A阵为m阶约当阵：

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{m\times m} \Rightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统非齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

□ 积分法

两边同乘e^{-At} $$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

对$e^{-At}x(t)$求导 $$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)]$$

代入前式并求积分 $$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

零输入响应 + 零状态响应 = 全响应

零输入响应：系统对初始状态的响应；
零状态响应：系统对输入作用的响应。

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统非齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

若取t_0为初始时刻，则：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$
$$= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$
$$= C\Phi(t-t_0)x(t_0) + C\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

8.2 动态方程的响应（求解）

线性定常系统非齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

□ 拉氏变换法

$$sIX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow sIX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$x(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1}x(0) + L^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)]$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$= CL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) + CL^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] + Du(t)$$

例8.11： 根据状态方程，且$x(0)=[x_1(0), x_2(0)]^T$，求$u(t)=1(t)$作用下状态方程的解。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

解：

$$x(t)=L^{-1}(sI-A)^{-1}x(0)+L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{[sI-A]^*}{|sI-A|}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}\overset{L^{-1}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}$$

例8.11： 根据状态方程，且$x(0)=[x_1(0), x_2(0)]^T$，求$u(t)=1(t)$作用下状态方程的解。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

解：

$$x(t)=L^{-1}(sI-A)^{-1}x(0)+L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

$$L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

$$=L^{-1}\left[\begin{pmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ -\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}\right]=\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

8.3 线性系统的能控性和能观性

- 能控性和能观性是在动态方程基础上建立起来的两个非常重要的基本概念。

  对于线性定常系统：$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad y(t)=Cx(t)$

  能控性决定输入$u(t)$是否对状态$x(t)$有控制能力，能观性回答状态$x(t)$是否能从输出$y(t)$的测量值重新构造。

- 能控性和能观性是由系统结构决定的系统的内在性质；
- 对闭环控制系统，为了使系统获得理想的动态性能（闭环极点在s平面任意配置），输出反馈往往不够用，必须采用状态反馈。
- 状态反馈的先决条件是系统的每一个状态变量都能控，这是研究系统能控性和能观性的意义。

能控性和能观性的定义

稳定性

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=C\frac{[sI-A]^{*}}{|sI-A|}B+D$$

特征方程 $|sI-A|=0$的所有根位于左半s平面。

能控性

定义：在有限时间间隔$t\in[t_0, t_f]$，如果存在无约束的分段连续控制函数$u(t)$，能使系统从任意初态$x(t_0)$转移至任意终态$x(t_f)$，则称该系统是状态完全能控的，简称是能控的。（输入可以控制系统状态到达状态空间内的任意点）

注：只要有一个状态变量不能控，则称系统状态不完全能控，简称系统不能控。

□ 能控性

例8.12: 判断系统是否能控 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$

解: $\dot{x}_2=-x_2$

输入$u(t)$对$x_1(t)$有控制作用，而$x_2(t)$既不直接受$u(t)$影响，又与$x_1(t)$没关系，因此不受$u(t)$控制，所以系统不能控。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

u直接控制x_2，通过x_2间接控制x_1，所以系统能控。

□ 能控性

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

例8.13： 判断系统是否能控 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$

解：

$$\Phi(t)=e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}$$

是否可以从状态方程直接观察出能控性？

设系统的初始状态为零，则：

$$x(t)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}\\ e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(\tau)d\tau$$

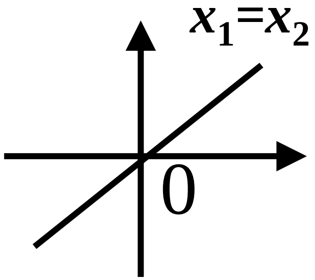
□ 能控性

例8.13： 判断系统是否能控 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$

解：

$$x(t)=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}\\ e^{-(t-\tau)}\end{bmatrix}u(\tau)d\tau=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\int_0^t e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

无论施加何种控制作用$u(t)$，始终有$x_1(t)=x_2(t)$，即状态不可能转移到空间中$x_1(t)\neq x_2(t)$的任意点上（不符合能控性定义），所以系统不能控。



不能从状态方程直接观察出能控性！

能控性和能观性的定义

□ 能观性

定义：对于任意初始时刻 t_0，若能在有限时间$t > t_0$之内，根据从t_0到t系统的输出$y(t)$量测值，唯一地确定在初始时刻t_0的状态$x(t_0)$，则称系统状态完全能观，简称系统能观。（输出可以反映状态空间内的任意状态点）

注：只要有一个状态变量在初始时刻t_0的值不能由输出唯一确定，则称系统状态不完全能观，简称系统不能观。

能观性

例8.14： 判断系统是否能观

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

解： $\dot{x}_2 = -x_2 + u$

$y=x_1$可直接测量，而 $\dot{x}_2 = -x_2 + u$ 与$x_1(t)$没关系，即不可能从y间接得到x_2，所以系统不能观。

$$y(t)=Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)+C\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t)$$

□ 能观性

例8.15： 判断系统是否能观

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[1\quad -1]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

解：

$$\Phi(t)=e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}$$

假设$t_0=0$时，系统的初始状态$x(0)=x_0\neq 0$，并令$u(t)=0$，则：

$$y(t)=Cx(t)=C\Phi(t)x(0)=(x_{10}-x_{20})e^{-3t}$$

$y(t)$反映的是$x_1(0)$与$x_2(0)$的差值随时间衰变的过程，无法得到各自独立的运行状况，所以系统不能观。

不能从状态方程直接观察出能观性！

□ 能控性与能观性的定义

说明与结论：

- 能控性是通过$u(t)$ 控制(掌握)所有未来的状态；能观性是通过$y(t)$测量(“回忆”)过去的所有状态；
- 单从动态方程难以确定系统的能控性和能观性；
- 从动态方程的解中也很难找出判断规律，且求解困难。

线性定常连续系统的能控性判据

1. 秩判据

设n阶线性定常连续系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

记系统的能控性判别矩阵为：

$$S_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

则系统状态完全能控的充要条件为：

$$\mathrm{rank} S_c = \mathrm{rank}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$$

秩判据说明连续系统状态能控性只与状态方程中的A、B矩阵有关。

1. 秩判据

$$\mathrm{rank}S_c = \mathrm{rank}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$$

例8.16： 判断系统的能控性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解：

$$S_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$rankS_c = 2 < 3$$ 系统不能控

线性定常连续系统的能控性判据

2. A矩阵为对角阵时的能控性判据

设线性定常系统具有互异的特征值，则系统能控的充要条件是，系统经非奇异变换后的对角线规范形式为：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

其中，$\bar{B}$ 阵不包含元素全为零的行。

2. A矩阵为对角阵时的能控性判据

例：试确定如下几个经非奇异变换后的对角标准型系统的可控性。

√ 1) $\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}u$

√ 3) $\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\4&0\\7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$

× 2) $\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}u$

× 4) $\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\4&0\\7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$

线性定常连续系统的能控性判据

3. *A*矩阵为约当阵时的能控性判据

设线性定常系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 具有重特征值λ_1(m_1重), λ_2(m_2重), …, λ_k(m_k重)，$\sum_{i=1}^{k} m_i=n$，$\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j)$，则系统能控的充要条件是，系统经非奇异变换后的对角规范形式为：

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}\bar{x}+\bar{B}u$$

其中，与每个约当小块J_i(i=1, 2, …, k) 的最后一行相对应的阵 $\bar{B}$ 中的所有那些行，其元素不全为零。

3. *A*矩阵为约当阵时的能控性判据

例： 试确定如下几个经非奇异变换后的约当标准型系统的可控性。

√ 1)
$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 3\end{bmatrix}u$$

× 2)
$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

线性定常连续系统的能观性判据

1. 秩判据

设n阶线性定常连续系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad y(t)=Cx(t)$$

记系统的能观性判别矩阵为：
$$S_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

则系统状态完全能观的充要条件为：$\mathrm{rank}S_o=n$

秩判据说明连续系统状态能观性只与状态方程中的A、C矩阵有关。

1. 秩判据 $\operatorname{rank}S_o = \operatorname{rank}[C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T = n$

例：已知系统的A、C阵，试判断其能观性。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad -1]$$

解：

$$CA = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [5 \quad -5]$$

$$S_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}S_o = 1 \neq 2$$

系统不能观

1. 秩判据 $\text{rank}S_o = \text{rank}[C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T = n$

例： 判断系统的能观性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解：

$$S_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}S_o = 2 = n$$

系统能观

线性定常连续系统的能观性判据

2. *A*矩阵为对角阵时的能观性判据

设线性定常系统具有不相等的特征值，则系统能观的充要条件是，系统经非奇异变换后的对角线标准型为：

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \overline{x} + \overline{B}u \\ y = \overline{C}\,\overline{x} \end{cases}$$

其中，$\overline{C}$ 阵不包含元素全为零的列。

2. A矩阵为对角阵时的能观性判据

例： 判断系统的能观性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \surd$$

线性定常连续系统的能观性判据

3. A矩阵为约当阵时的能观性判据

设线性定常系统具有重特征值$\lambda_1(m_1$重$), \lambda_2(m_2$重$), \ldots, \lambda_k(m_k$重$)$，$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ $\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j)$，则系统能观的充要条件是，系统经非奇异变换后的对角规范方程为：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

其中，与每个约当小块$J_i(i=1, 2, \ldots, k)$的首行相对应的阵$\bar{C}$中的那些列，其元素不全为零。

3. *A*矩阵为约当阵时的能观性判据

例： 判断系统的能观性。

× 1)
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & 0\\ 0 & 2 & & \\ & & 3 & 1\\ 0 & & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

√ 2)
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\qquad y=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

8.3 线性系统的能控性和能观性

例： 判断系统的能控性和能观性。

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow (sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix}s-1 & 0\\ 0 & s+1\end{pmatrix}$$

$(1)\ b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ 能观不能控

$(2)\ b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ 能控不能观

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$(3)\ b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ 能控且能观

能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系

例： 判断系统的能控性和能观性。

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$(1)\ \ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad C=(1\ \ 1)$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=(1\ \ 1)\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{\cancel{s-1}}{(s+1)\cancel{(s-1)}}$$

有零极点对消

$$(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{(s+1)\cancel{(s-1)}}\begin{pmatrix} \cancel{s-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(sI-A)^{-1}b$存在零极对消，不能控

$$C(sI-A)^{-1}=(1\ \ 1)\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}=\underline{(s-1\ \ s+1)}\frac{1}{\underline{(s+1)(s-1)}}$$

$C(sI-A)^{-1}$不存在零极对消（分项对消不是整体对消），能观

能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系

例： 判断系统的能控性和能观性。$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$

$(2)\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C=(1\quad 0)$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=(1\quad 0)\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{\cancel{s-1}}{(s+1)\cancel{(s-1)}}$$

有零极点对消

$$C(sI-A)^{-1}=(1\quad 0)\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}=(\cancel{s-1}\quad 0)\frac{1}{\cancel{(s+1)}(s-1)}$$

***c*(*sI-A*)$^{-1}$存在零极对消，不能观**

$$(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 \\ s+1 \end{pmatrix}$$

(*sI-A*)$^{-1}$*b*不存在零极对消（分项对消不是整体对消），能控

能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系

例： 判断系统的能控性和能观性。$(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$

$$(3)\ \ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{2s}{(s+1)(s-1)}$$

无零极点对消，能控且能观

能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系

结论：对动态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t)$

- 单输入-单输出系统能控、能观测的充要条件是：由动态方程导出的传递函数不存在零、极点对消；
- 系统能控的充要条件是$(sI-A)^{-1}B$不存在零、极点对消；
- 系统能观的充要条件是$C(sI-A)^{-1}$不存在零、极点对消；
- 若传递函数有可对消的零、极点，在推导状态方程时不应实施对消，以免掩盖稳定性、能控/观性。
- 传递函数（低维空间描述）不是完全描述，只有系统能控又能观时，传递函数描述与状态空间描述才是等价的。

8 本节课小结

动态方程的响应

✓ 线性定常系统齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(t) = e^{At}x(0)$$

✓ 矩阵指数函数的计算与性质

$$\Phi(t) = e^{At} \qquad e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

✓ 线性定常系统非齐次状态方程的解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

$$x(t) = L^{-1}(sI-A)^{-1}x(0) + L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= CL^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0) + CL^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)] + Du(t) \end{aligned}$$

线性系统的能控性定义和判据

✓ 稳定性判据　特征方程 $|sI\text{-}A|=0$的所有根位于左半s平面。

1.秩判据： $S_c=[B\quad AB\quad \cdots\quad A^{n-1}B]\quad \mathrm{rank}S_c=\mathrm{rank}[B\quad AB\quad \cdots\quad A^{n-1}B]=n$

2.A矩阵为对角阵时： 系统经非奇异变换后的对角线标准型方程为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\bar{x}+\bar{\mathrm{B}}u$$

其中，$\bar{\mathrm{B}}$ 阵不包含元素全为零的行。

3.A矩阵为约当阵时： 系统经非奇异变换后的对角规范方程为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k\end{bmatrix}\bar{x}+\bar{\mathrm{B}}u$$

其中，与每个约当小块J_i(i=1, 2, …, k) 的最后一行相对应的阵 $\bar{\mathrm{B}}$ 中的所有那些行，其元素不全为零。

□ 线性系统的能观性定义和判据

1.秩判据： $\operatorname{rank} S_o = \operatorname{rank}[C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T = n$

2.A矩阵为对角阵时： 系统经非奇异变换后的对角线标准型方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases}$$

其中，$\bar{C}$ 阵不包含元素全为零的列。

3.A矩阵为约当阵时： 系统经非奇异变换后的对角规范方程为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

其中，与每个约当小块J_i(i=1, 2, …, k) 的首行相对应的阵 $\bar{C}$ 中的那些列，其元素不全为零。

□ 能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系

结论：对动态方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad y(t)=Cx(t)$

- ✓ 单输入-单输出系统能控、能观测的充要条件是：由动态方程导出的传递函数不存在零、极点对消；
- ✓ 系统能控的充要条件是$(sI-A)^{-1}B$不存在零、极点对消；
- ✓ 系统能观的充要条件是$C(sI-A)^{-1}$不存在零、极点对消；
- ✓ 若传递函数有可对消的零、极点，在推导状态方程时不应实施对消，以免掩盖稳定性、能控/观性。
- ✓ 传递函数（低维空间描述）不是完全描述，只有系统能控又能观时，传递函数描述与状态空间描述才是等价的。

8.9

8.10

8.12（1）

8.13（2）

写清题号，不用抄题；

下次课交作业。