西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory
总复习

工业自动化系

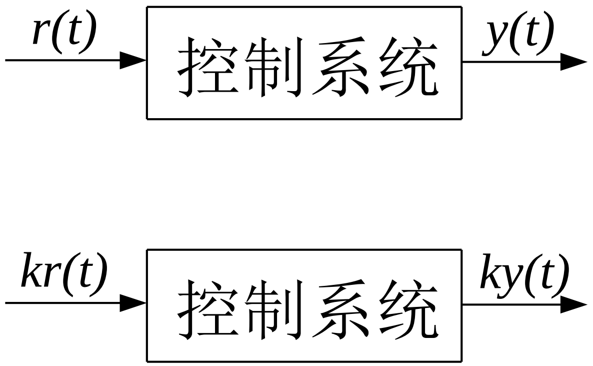
1 绪论

1. 自动控制系统的基本组成
   - 检测器+控制器+执行器
   - 常用术语：偏差、反馈、扰动
2. 自动控制系统的基本控制方式
   - 开环控制系统
   - 闭环控制系统：负反馈
   - 复合控制系统
3. 自动控制系统的基本类型
   - 按给定量的变化规律:恒值控制系统/随动控制系统/程序控制系统:
   - 按输入输出量是否连续:连续控制系统/离散控制系统/采样控制系统;
   - 按输入输出量的数目:单输入单输出控制系统/多输入多输出控制系统;
   - 按输入输出特性:线性控制系统/非线性控制系统;
4. 对控制系统的基本要求（稳、准、好）

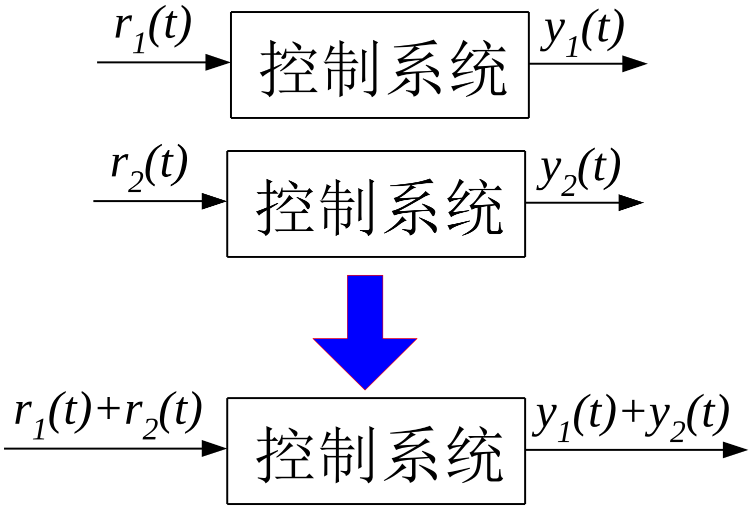
线性系统

输入、输出同时满足齐次性和叠加性原理的系统。

齐次性



叠加性



建立控制系统的数学模型的方法（建模）：

分析法（机理法）

实验法（测试法）

- **分析法：** 对系统各部分的运动机理进行分析，根据他们所依据的主要物理或化学规律分别列写相应的运动方程。
- **实验法：** 给系统施加某种测试信号，记录其输出响应，并用适当的数学模型去逼近--系统辨识--已发展为独立学科分支。
- **本课程仅研究用分析法建立系统数学模型的方法**

数学模型的形式

- **按建模方式分类：**
  - 输入—输出模型
  - 状态空间模型（输入—状态—输出）
- **按域（范畴）分类：**
  - 时域模型：微分方程、差分方程和动态方程
  - 复域模型：传递函数
  - 频域模型：频率特性
  - 图形化模型：结构图、信号流图等

分析法（机理法）建立微分方程的步骤

目的：建立输入--输出关系（模型）已知…, 求…

步骤：

① 按物理系统环节划分，变复杂系统为简单环节组合；

② 根据各种物理、化学、力学等规律，列各环节方程（必要时引入中间变量）；

③ 消去中间变量；

④ 整理，得到微分方程；

⑤ 方程写法（规范：等号左侧输出量，右侧输入量，从高阶导数项到低阶导数项排列）。

传递函数的几种形式

多项式形式：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

零极点形式

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

$$K`=K\frac{\prod_{j=1}^{m}z_j}{\prod_{i-1}^{n}p_i}$$

时间常数形式

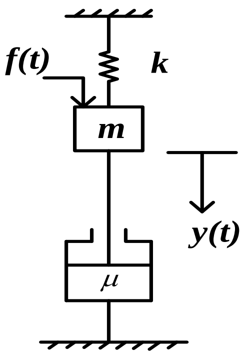
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K'\prod_{j=1}^{m}(T_j s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(T_i s+1)}$$

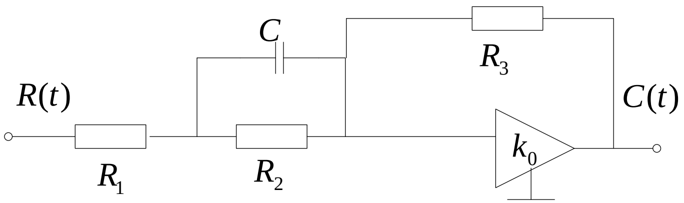
2.3 典型环节的传递函数

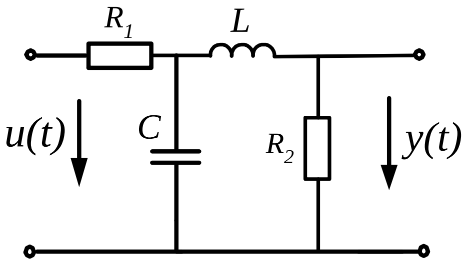
环节名称	传递函数	特点	实例
比例环节（放大环节）	K	输出量无延迟、无失真地反映输入量变化	电位器（输入电压-输出电压） 晶体管放大器(输入电压-输出电压) 测速机（转速-电压） 齿轮箱（主动轴转速-从动轴转速）
惯性环节（非周期环节）	$\dfrac{K}{Ts+1}$	输出量变化落后于输入量的变化	它激直流发电机（激磁电压-电势） RC滤波器（电源电压-电容电压）
振荡环节	$\dfrac{K}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$ $0<\zeta<1$	有两种储能元件，所储能量相互转换	RLC 振荡电路（输入电压-输出电压）
积分环节	$\dfrac{K}{s}$	输出量正比于输入量的积分	传动轴（转速-转角） 积分器 （输入电压-输出电压）
理想微分环节 实际微分环节	Ks $\dfrac{KTs}{Ts+1}$	输出量正比于输入量的微分（导数）	直流测速机（转角-电势） RC串联微分电路（电源电压-电阻电压）
延迟环节（时滞环节）	$Ke^{-\tau s}$	输出量经过延迟 τ 后，才复现输入量	晶闸管整流装置（控制电压-输出电压） 传输带（输入流量-输出流量）

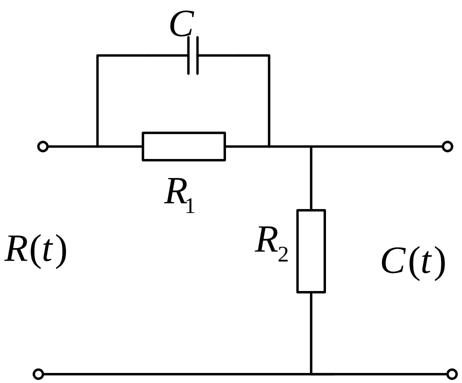
求取典型系统的数学模型（微分方程、传递函数）

- 三类系统：
  - ✓ RLC无源网络
  - ✓ 运放与RLC构成的有源网络
  - ✓ 带有弹簧、阻尼器等部件的机械位移系统
- 方法及难度参考PPT中相关例题及习题
- 注意校正章节中的有源及无源网络
- 典型难度参考



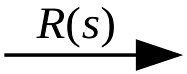




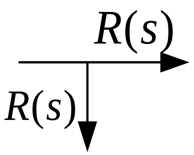


2.4 线性系统结构图—基本组成元素

□信号线：信号的流向

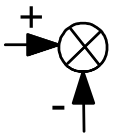


□分支点（引出点）：



同一位置引出，大小、性质完全相同

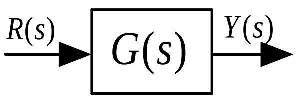
□比较点（误差检测器）：



"+" —— 正反馈
"–" —— 负反馈

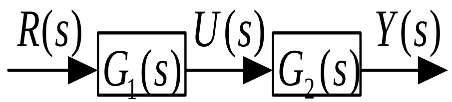
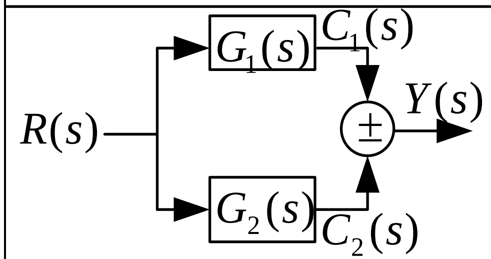
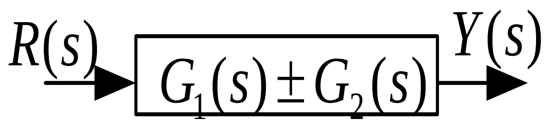
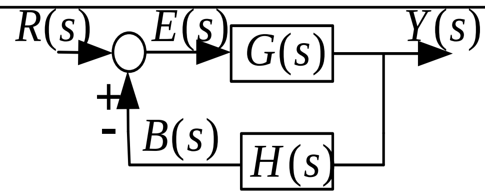
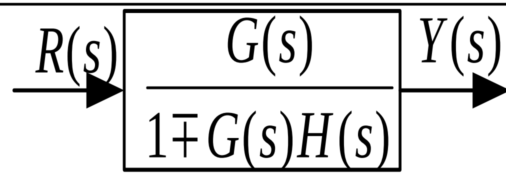
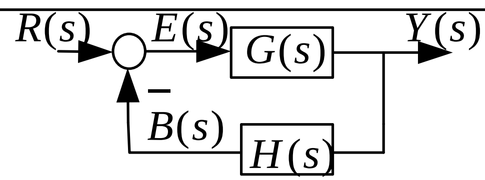
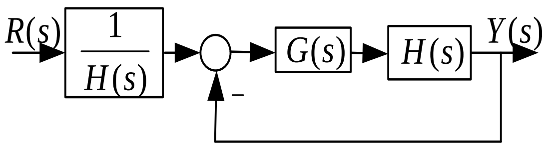
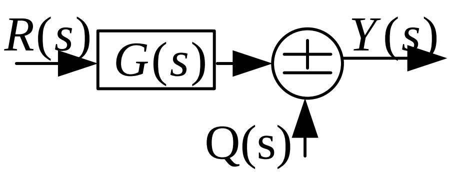
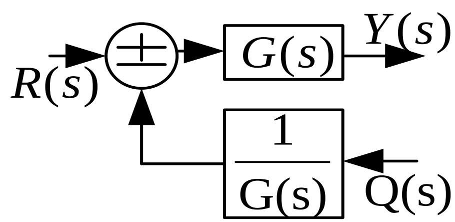
所有输入信号一般必须是同量纲的。

□框（环节）：传函

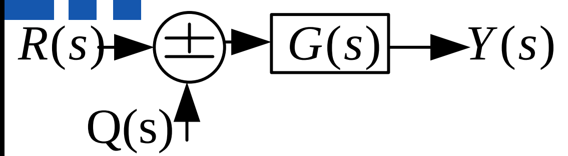
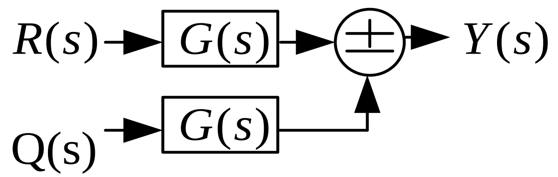
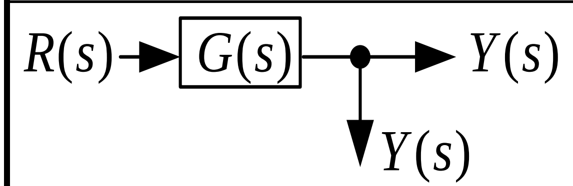
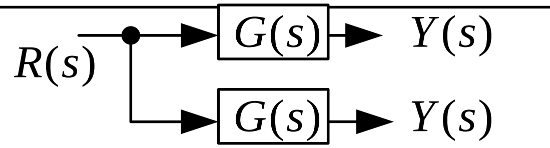
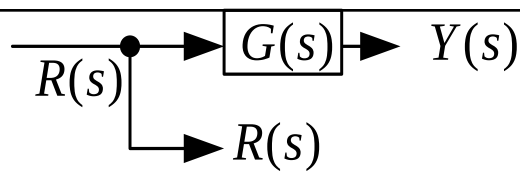
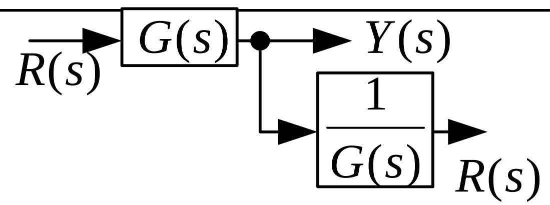
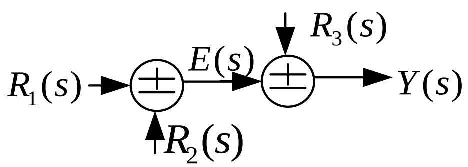
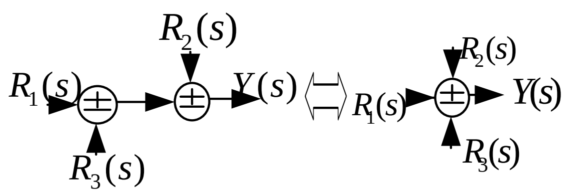
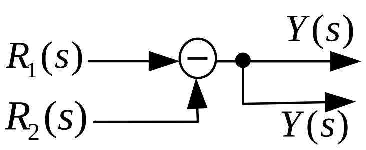
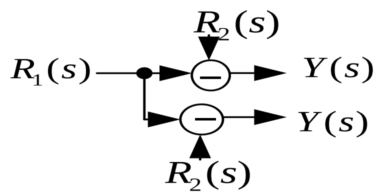
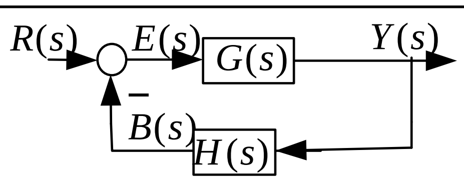
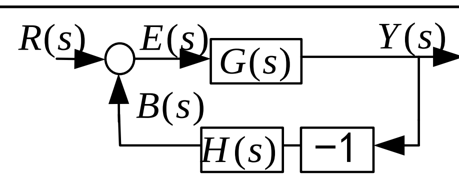


组成结构图的四种基本元素

2.4 线性系统结构图——等效变换和简化

原方框图	等效方框图	等效运算关系
		串联等效 $Y(s)=G_1(s)G_2(s)R(s)$
		并联等效 $Y(s)=\left[G_1(s)\pm G_2(s)\right]R(s)$
		反馈等效 $Y(s)=\dfrac{G_1(s)R(s)}{1\mp G_1(s)G_2(s)}$
		等效单位反馈 $\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{H(s)}\dfrac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$
		比较点前移 $Y(s)=R(s)G(s)\pm Q(s)$ $=\left[R(s)\pm\dfrac{Q(s)}{G(s)}\right]G(s)$

2.4 线性系统结构图——等效变换和简化

		**比较点后移** $Y(s)=[R(s)\pm Q(s)]G(s)$ $=R(s)G(s)\pm Q(s)G(s)$
		**引出点前移** $Y(s)=R(s)G(s)$
		**引出点后移** $R(s)=R(s)G(s)\dfrac{1}{G(s)}$ $Y(s)=R(s)G(s)$
		**交换或合并比较点** $Y(s)=E_1(s)\pm R_3(s)$ $=R_1(s)\pm R_2(s)\pm R_3(s)$ $=R_1(s)\pm R_3(s)\pm R_2(s)$
		**交换比较点和引出点** **（支路增加不宜采用）** $Y(s)=R_1(s)-R_2(s)$
		**负号在支路上移动** $E(s)=R(s)-H(s)Y(s)$ $=R(s)+H(s)\times(-1)Y(s)$

结构图简化原则—总结

- 利用串联、并联和反馈的结论进行简化
- 解除交叉嵌套，变成大闭环路套小闭环路
- 解除交叉点（同类互移）

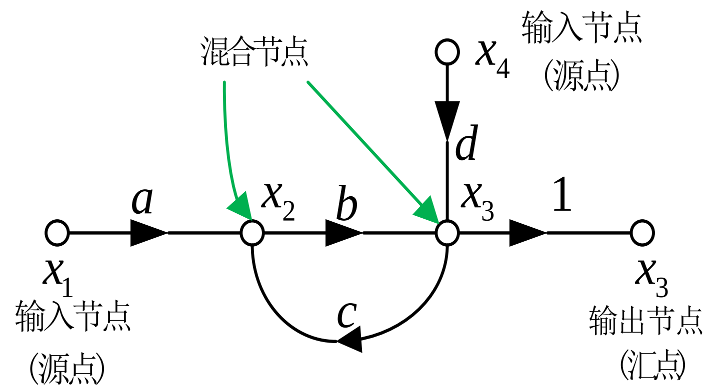
  比较点移向比较点：比较点之间可以互移

  引出点移向引出点：引出点之间可以互移

比较点与引出点不可简单互移

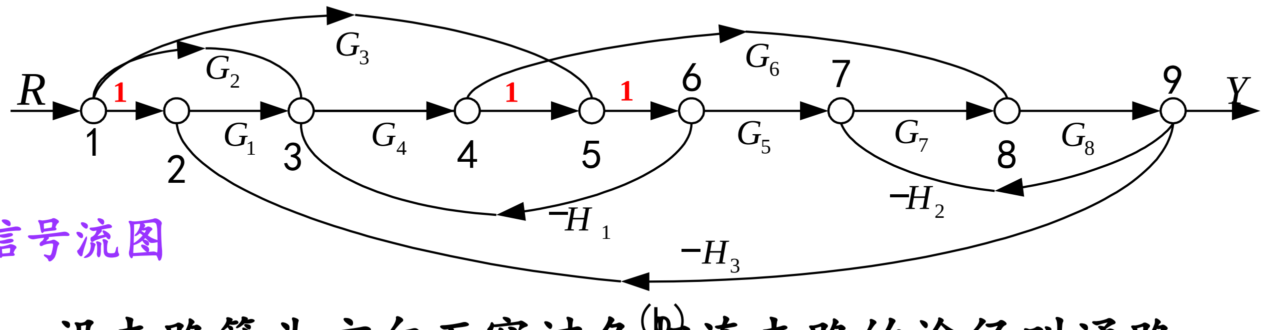
信号流图的基本概念

- **节点**：是用来表示变量；节点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路。
- **支路**：支路是连接两个节点的有向线段，信号只能沿着支路上的箭头方向通过。
- **增益**：支路上标明的乘法因子，反应了节点（信号）间的函数关系；
- **输入节点(源点)**：只有输出支路的节点，对应自变量；
- **输出节点(汇点)**：只有输入支路的节点，对应因变量；
- **混合节点**：既有输入支路，又有输出支路；



信号流图

信号流图的基本概念



信号流图

- **通路：** 沿支路箭头方向而穿过各相连支路的途径叫通路；
- **回环：** 通路的终点就是通路的起点，并且与任何其它节点相交不多于一次；
- **回环增益：** 回环中各支路增益的乘积；
- **不接触回环：** 如果一些回环没有任何公共节点，则叫做不接触回环；
- **前向通道：** 如果从输入节点（源点）到输出节点（汇点）的通路上，通过任何节点不多于一次，则该通路叫做前向通道。
- **前向通道增益：** 前向通道中，各支路增益的乘积，叫前向通道增益。

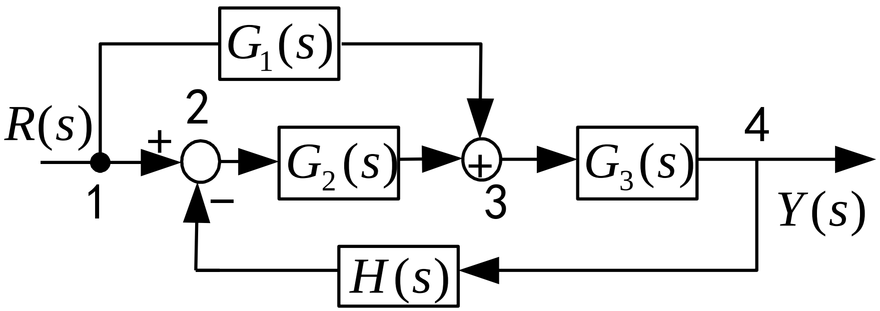
信号流图的绘制

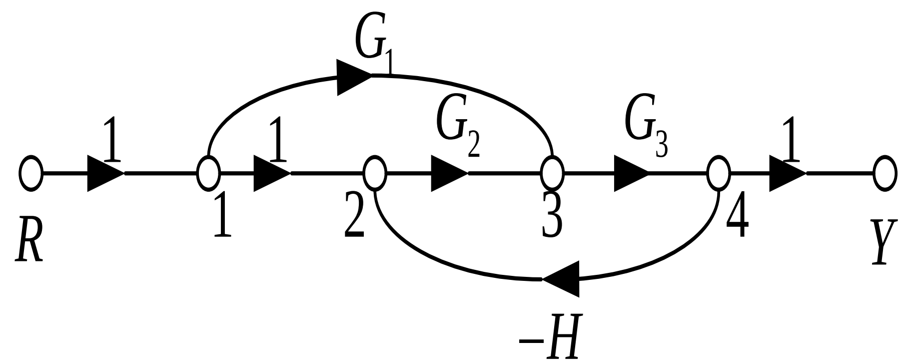
(2) 由方框图绘制

分支点（引出点）、比较点 ➞ 节点

信号线、方框 ➞支路

必要时增加支路、节点





梅逊增益公式

$$P=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_k\Delta_k}{\Delta}$$

$\Delta=1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3+\cdots$ —— 系统特征式；

$\sum L_1$ —— 所有单独回环的增益之和；

$\sum L_2$ —— 所有两两互不接触回环的增益乘积之和；

$\sum L_3$ —— 所有三个互不接触回环的增益乘积之和；

Δ_k —— 第k个残余流图的特征式：把第k条前向通道（包括其中所有的节点和支路）去掉之后，在余下的信号流图(残余流图)上求得的Δ。

梅逊增益公式

$$P=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_k\Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta=1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3+\cdots$$ —— 系统特征式；

用Mason增益公式计算总增益的要点：

① 前向通道（数目，增益；残余流图）；

② 回环（数目，增益；不相接触回环）；

③ 不论前向通道还是回环，每个节点只允许经过一次；

④ 牢记公式。

□ 典型试验信号

阶跃信号、斜坡信号、等加速度信号

脉冲信号、正弦信号

□ 时域响应的构成

暂态分量（自由分量）+稳态分量（强迫分量）

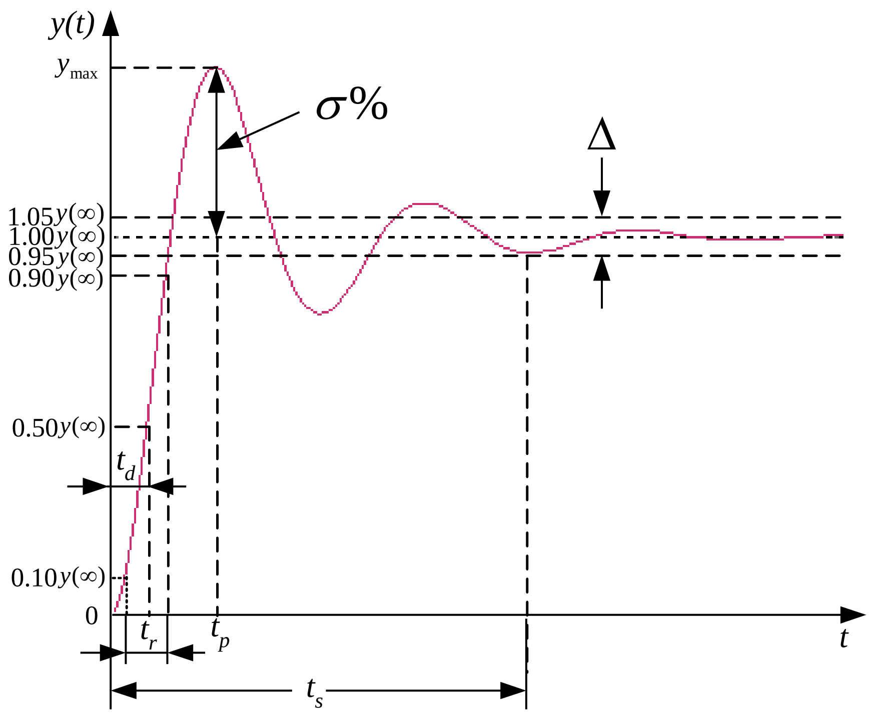
□ 系统性能指标

超调量、延迟时间、上升时间、调节时间

□ 一阶系统的时域分析

单位阶跃响应、单位斜坡响应、单位脉冲响应

系统性能指标



控制系统单位阶跃响应和动态性能指标

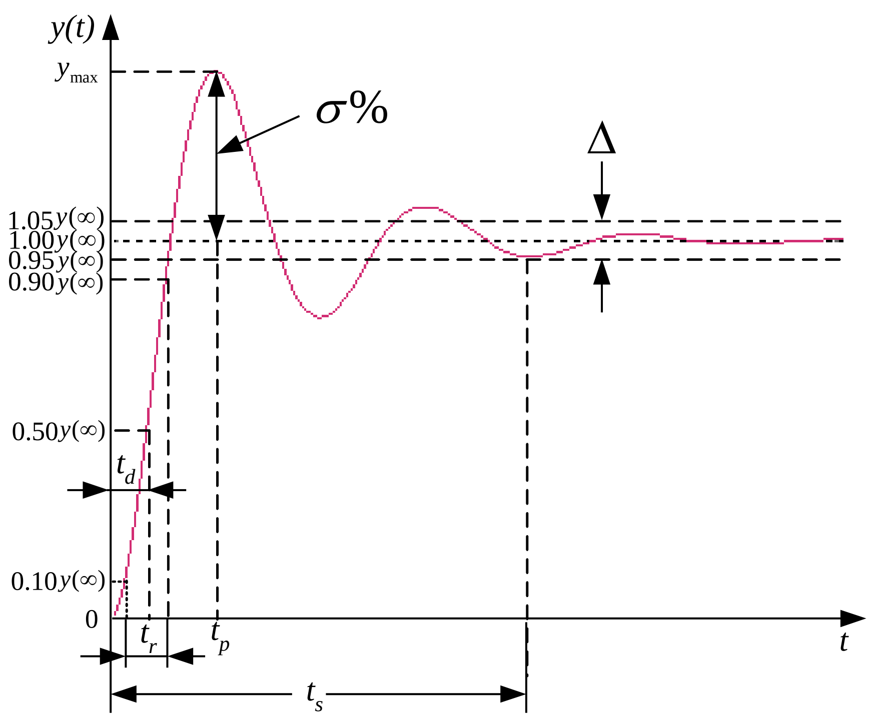
（1）**超调量**：又称最大超调量，反映系统响应振荡的剧烈程度，它定义为：

$$\sigma = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\%$$

$$= \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

（2）**延迟时间** t_d：系统阶跃响应达到稳态值的50%所需的时间。

系统性能指标



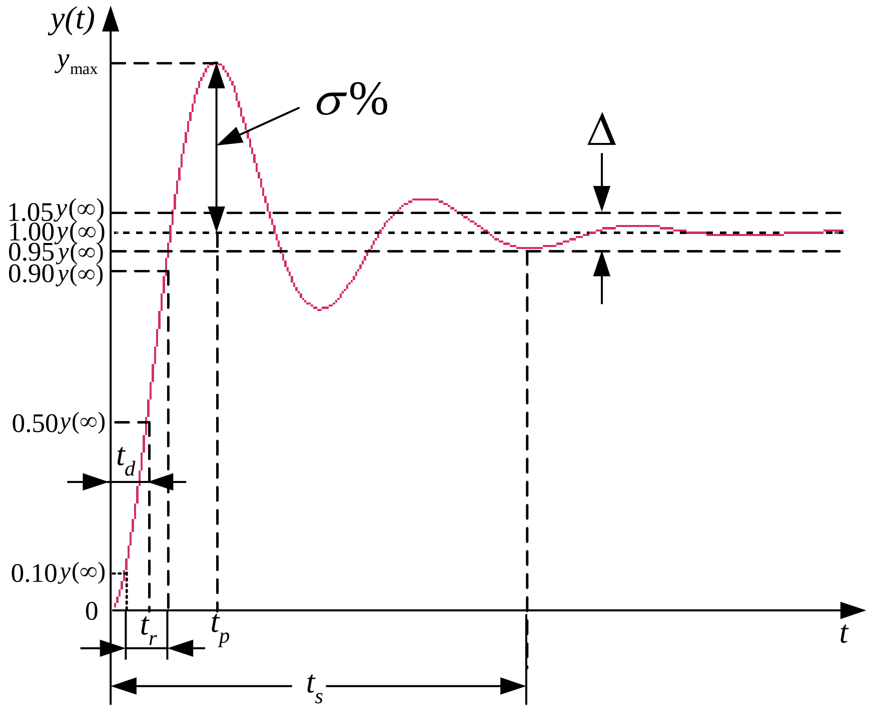
控制系统单位阶跃响应和动态性能指标

（3）上升时间 t_r ：系统阶跃响应从稳态值的10%第一次达到稳态值的90%所需的时间。

（4）调节时间 t_s ：系统阶跃响应 $y(t)$ 和稳态值 $y(\infty)$ 之间误差达到规定允许值，且以后不再超过允许值所需的最短时间，即当 $t > t_s$ 时，

$$\left|\frac{y(t)-y(\infty)}{y(\infty)}\right| \le \Delta$$

系统性能指标



控制系统单位阶跃响应和动态性能指标

4个指标中，超调量和调节时间反映了对系统动态性能最重要的要求——相对稳定性和快速性；

而上升时间和延迟时间也不同侧面反映了系统响应的快慢程度。

3.3 二阶系统的时域分析

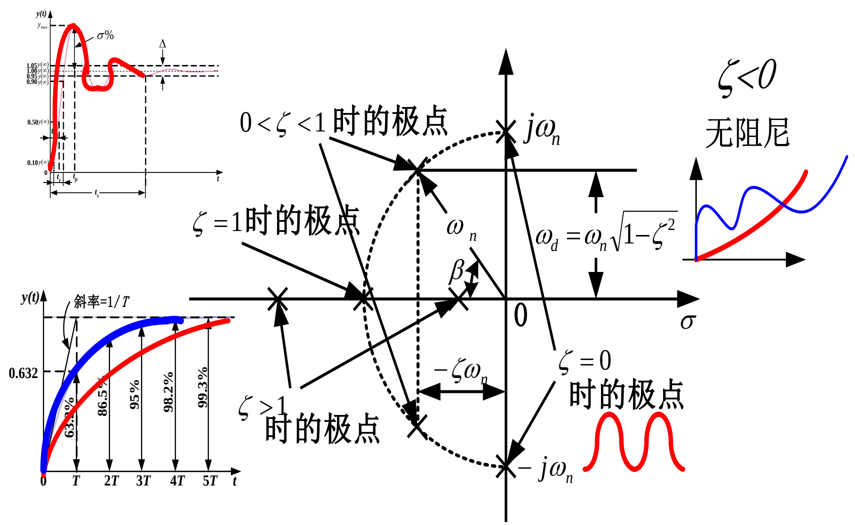
$$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

特征方程式与解的对应关系

二阶系统的特征方程式： $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$$s_{1,2}=\begin{cases}\pm j\omega_n, & \zeta=0\\ -\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, & 0<\zeta<1\\ -\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}, & \zeta\geq 1\end{cases}$$



当ζ<0（对应的有−1<ζ<0，ζ=−1，ζ<−1等情况），特征根将位于右半平面（实部为正），对应系统不稳定，不予考虑。

当ζ不同时，特征根有不同的形式，系统的阶跃响应形式也将不同。

3.3 二阶系统的时域分析

二阶系统的时域分析

性能指标计算（以下三个指标都要掌握）

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

高阶系统的时域分析

传递函数的零极点形式

降阶处理方法

主导极点

劳斯（Routh）稳定判据

- 控制系统稳定的必要条件是：控制系统特征方程式的所有系数符号相同且不为零（不缺项）（未要求 $a_n>0$ ）。
- 控制系统稳定的充分必要条件：劳斯表中第一列所有元素符号相同。第一列元素符号改变的次数等于实部为正特征根的个数（不稳定极点个数）。

$$D(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s + a_0 = 0$$

劳斯（Routh）稳定判据

系统的特征方程为：

$$D(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0 =0$$

已知特征方程系数$\mathbf{a_n}$, $\mathbf{a_{n-1}}$, …. , $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_0}$

$$b_1=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad b_2=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad b_3=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$c_1=\frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \quad c_2=\frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} \quad c_3=\frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}$$

……

劳斯表（阵列）

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^2 & d_1 & d_2 & d_3 & & \\
s^1 & e_1 & e_2 & & & \\
s^0 & f_1(a_0) & & & &
\end{array}$$

注：$f_1=a_0$，可用来验证劳斯表的计算正确与否。

劳斯（Routh）稳定判据

1）最高次项为偶数次 $D(s)=a_6s^6+a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$b_1=\frac{-(a_6a_3-a_5a_4)}{a_5}$	$b_2=\frac{-(a_6a_1-a_5a_2)}{a_5}$	$b_3=\frac{-(a_6 0-a_5a_0)}{a_5}=a_0$	
s^3	$c_1=\frac{-(a_5b_2-b_1a_3)}{b_1}$	$c_2=\frac{-(a_5b_3-b_1a_1)}{b_1}$	0	
s^2	$d_1=\frac{-(b_1c_2-c_1b_2)}{c_1}$	$d_2=\frac{-(b_1 0-c_1b_3)}{c_1}=b_3=a_0$		
s^1	$e_1=\frac{-(c_1d_2-d_1c_2)}{d_1}$	0		
s^0	$f_1=\frac{-(d_1 0-e_1d_2)}{e_1}=d_2=a_0$			

从高到低
从左到右

负号

补0

分母为上一行第一个数

0次项（常数项）系数隔行跳

劳斯（Routh）稳定判据

2）最高次项为奇数次 $D(s)=a_5s^5+a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & b_1=\dfrac{-(a_5a_2-a_4a_3)}{a_4} & b_2=\dfrac{-(a_5a_0-a_4a_1)}{a_4} & 0 \\
s^2 & c_1=\dfrac{-(a_4b_2-b_1a_2)}{b_1} & c_2=\dfrac{-(a_40-b_1a_0)}{b_1}=a_0 & \\
s^1 & d_1=\dfrac{-(b_1c_2-c_1b_2)}{c_1} & 0 & \\
s^0 & e_1=\dfrac{-(c_10-d_1c_2)}{d_1}=c_2=a_0 & &
\end{array}
$$

从高到低
从左到右

负号

补0

分母为上一行第一个数

0次项（常数项）系数隔行跳

应用劳斯稳定判据时的两种特例

构造劳斯表（阵列）时，有时会发生如下两种特殊情况：

（1）第一列出现零元素，但该零元素所在行的其它元素不为零；

对于该种情况，可以用任意小的正数代替第一列中的零元素，继续完成劳斯表。然后，令$\varepsilon\rightarrow 0$（小正数），检查表中第一列元素的符号是否相同来判定系统是否稳定。

应用劳斯稳定判据时的两种特例

（2）全行元素为零。

说明特征方程有对称于复平面原点的根。它们可能是大小相等符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或两对实部相反的共轭复根。这种情况下，系统必然不稳定。

这时可利用前一行的元素作为系数构造辅助方程A(s)=0。将辅助方程对s求导，然后用此系数替换元素为零的那一行，继续完成劳斯表。判定存在几个不稳定的极点。

这里需要指出，辅助方程中只会出现偶次幂，它的根是特征根的一部分。也就是说辅助方程是特征多项式的因子。因此，令A(s)=0可解出此时的特征根。

3.6 线性系统的稳态误差计算

$$G(s)H(s)=\frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^{\gamma}(T_{\gamma+1}s+1)(T_{\gamma+2}s+1)\cdots(T_{n-\gamma}s+1)}$$

稳态误差系数及稳态误差计算

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

1. 位置误差系数K_p

单位阶跃输入作用下，$R(s)=\frac{1}{s}$ ，系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+\underline{\lim_{s\to 0}G(s)H(s)}}$$

位置误差系数为：$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)$

稳态误差为： $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\gamma}}$$

不同类型系统对应结果

0型系统	$K_p=K$	$e_{ss}=1/(1+K)$
I型系统	$K_p=\infty$	$e_{ss}=0$
II型系统	$K_p=\infty$	$e_{ss}=0$

稳态误差系数及稳态误差计算

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

2．速度误差系数K_v

单位速度（斜坡）输入作用下，$R(s)=\frac{1}{s^2}$，系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^2}}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)H(s)}=\frac{1}{\underline{\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)}}$$

速度误差系数为：$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)$

稳态误差为：$e_{ss}=\frac{1}{K_v}$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^\gamma}$$

不同类型系统对应结果

0型系统	$K_v=0$	$e_{ss}=\infty$
I型系统	$K_v=K$	$e_{ss}=1/K$
II型系统	$K_v=\infty$	$e_{ss}=0$

稳态误差系数及稳态误差计算

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

3. 加速度误差系数K_a

单位加速度输入作用下，$R(s)=\frac{1}{s^3}$，系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^3}}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)}$$

加速度误差系数为：$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)$

稳态误差为：$e_{ss}=\frac{1}{K_a}$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^\gamma}$$

不同类型系统对应结果

0型系统	K_a=0	$e_{ss}=\infty$
I型系统	K_a=0	$e_{ss}=\infty$
II型系统	$K_a=K$	$e_{ss}=1/K$

稳态误差系数及稳态误差计算

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

开环传递函数中积分环节个数γ，即系统型数，决定了系统在阶跃、速度及加速度信号输入时系统是否存在稳态误差。因此γ又称为无差度，它反映了系统对参考输入信号的跟踪能力。

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Ⅰ型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
Ⅱ型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

折衷！

减小和消除给定输入信号作用引起的稳态误差的有效方法有：提高系统的开环放大倍数和提高系统的类型数，但这两种方法都会影响甚至破坏系统的稳定性，因而将受到应用的限制。

□ 根轨迹的概念（开环根轨迹增益K）

□ 根轨迹的基本方程

$$\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=-1$$

幅值条件：
$$\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left|s+z_j\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|s+p_i\right|}=1$$
与*K*有关

相角条件：
$$\sum_{j=1}^{m}\theta_{zj}-\sum_{i=1}^{n}\theta_{pi}=\pm(2k+1)180^\circ$$
与*K*无关

$$\theta_{zj}=\angle(s+z_j)\qquad \theta_{pi}=\angle(s+p_i)$$

绘制根轨迹的基本规则

规则1　绘制根轨迹的方程形式

$$1+\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=0$$

规则2　根轨迹的分支数及起点和终点

对于一个n阶系统，当参变量K从零到无穷大变化时，根轨迹有n条分支，它们分别从n个开环极点出发，其中有m条根轨迹分支终止在m个有限开环零点上，其余$(n-m)$条根轨迹分支终止在$(n-m)$个无限零点上。

绘制根轨迹的基本规则

规则3 根轨迹在实轴上的分布

根轨迹在实轴上总是分布在两个相邻的开环实零、极点之间，且线段右边开环实零、极点的总数为奇数。

规则4 根轨迹的对称性

根轨迹必然关于实轴对称。绘制根轨迹图时，只需画出上半平面根轨迹，下半平面的根轨迹可根据对称性原理得出。

绘制根轨迹的基本规则

规则5 根轨迹的渐近线

当系统$n \geq m$时，根轨迹的渐近线共有$(n-m)$条，各条根轨迹的渐近线与实轴的倾角为：

$$\theta_k = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0,1,2,\cdots,(n-m-1)$$

2π等分射线

根轨迹的渐近线交于实轴上一点，交点坐标为：

$$-\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} -p_i - \sum_{j=1}^{m} -z_j}{n-m}$$

绘制根轨迹的基本规则

规则6 根轨迹的分离点和会和点

- 根轨迹的分离点和会合点实质上都是特征方程式的重根，因而可用求解特征方程式重根方法确定它们在平面上的位置。

$$A(s)B'(s)-A'(s)B(s)=0$$

$$\frac{dK}{ds}=\frac{A(s)B'(s)-A'(s)B(s)}{[B(s)]^2}=0$$

确定根轨迹的分离点或会合点的坐标及相应的*K*值

绘制根轨迹的基本规则

规则7 根轨迹的出射角和入射角

- 计算根轨迹出射角和入射角可由根轨迹的相角条件来确定。

相角条件：

$$\sum_{j=1}^{m}\theta_{zj}-\sum_{i=1}^{n}\theta_{pi}=\pm(2k+1)180^{\circ} \qquad k=0,1,2,\cdots \qquad \begin{aligned}\theta_{zj}&=\angle(s+z_j)\\ \theta_{pi}&=\angle(s+p_i)\end{aligned}$$

根轨迹在第a个开环复数极点$-p_a$处的出射角为：

$$\theta_{p_a}=\mp(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\theta_{zj}-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq a}}^{n}\theta_{pi} \qquad \begin{aligned}&\theta_{pi}=\angle(-p_a+p_i),\quad i=1,2,\cdots,n\ \ (i\neq a)\\ &\theta_{zj}=\angle(-p_a+z_j),\quad j=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

根轨迹在第b个开环复数零点$-z_b$处的入射角为：

$$\theta_{z_b}=\pm(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{n}\theta_{pi}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq b}}^{m}\theta_{zj} \qquad \begin{aligned}&\theta_{pi}=\angle(-z_b+p_i),\quad i=1,2,\cdots,n\\ &\theta_{zj}=\angle(-z_b+z_j),\quad j=1,2,\cdots,m\ \ (j\neq a)\end{aligned}$$

绘制根轨迹的基本规则

规则8 根轨迹与虚轴的交点

1）用劳斯判据，求临界稳定的*K*值和根轨迹与虚轴的交点；

2）令特征方程的$s=j\omega$，并令方程左边实部和虚部分别等于零，就可求出ω和 *K*值。

规则9 特征方程的根之和与根之积

$$\sum_{i=1}^{n}(-p_{ci})=\sum_{i=1}^{n}(-p_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(-p_{ci})=\prod_{i=1}^{n}(-p_i)+K\prod_{j=1}^{m}(-z_j)$$

□ 参量根轨迹的绘制

- ✓ 研究除开环根轨迹增益K以外的其它可变参量（如时间常数、反馈系数，开环零、极点等）对系统性能的影响，就需要绘制参量根轨迹。
- ✓ 首先需要按照根轨迹基本绘制规则1，对根轨迹方程形式进行必要处理。（例参量为时间常数T）

$$1+TG_1(s)H_1(s)=0$$

$$1+\frac{T\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=0$$

- ✓ 然后按照根轨迹基本绘制规则2~9绘制参量根轨迹。

5.1 频率特性的基本概念

$G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}$ 称为系统的频率特性，也是描述系统的一种数学模型（RL电路为例）

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]=\dfrac{K}{1+(\omega T)^2} & \text{实频特性} \\ \mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]=-j\dfrac{\omega TK}{1+(\omega T)^2} & \text{虚频特性} \end{cases}$$

复数的表示形式

1）代数式：$A=a+jb$

2）三角式：$A=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$

3）指数式：$A=re^{j\varphi}$

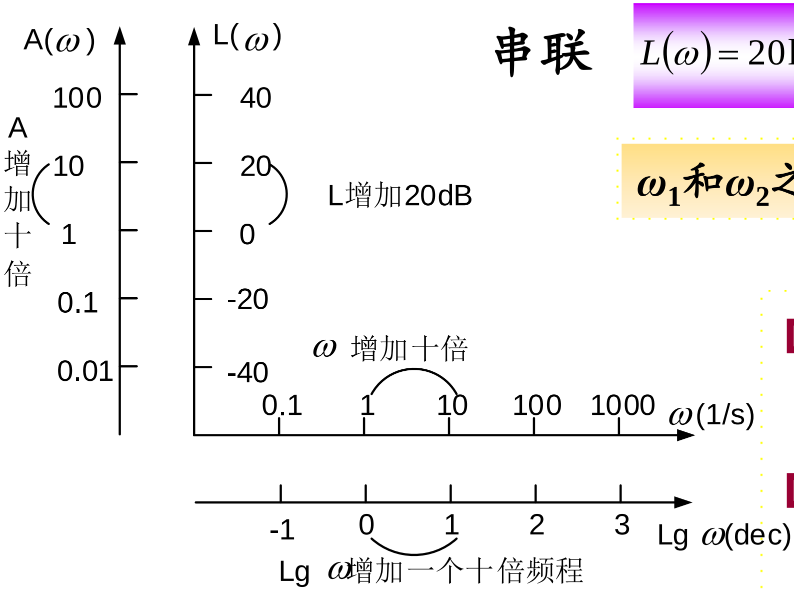
4）幅值幅角：$A=r\angle\varphi$

$$A(\omega)=\left|G(j\omega)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]^2+\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$ 幅频特性

$$\phi(\omega)=\angle G(j\omega)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]}\right)=-\arctan(\omega T)$$ 相频特性

频率特性——正弦稳态输出与正弦输入之比。包括“相频特性和幅频特性”或者“实频特性和虚频特性”两部分。

1. 对数坐标图或伯德图（Bode）图



串联 $L(\omega)=20\lg A(\omega)=\sum_{i=1}^{n}20\lg A_i(\omega)$ $\phi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(\omega)$

ω_1和ω_2之间的距离是$lg\omega_2$-$lg\omega_1$，而不是ω_2- ω_1。

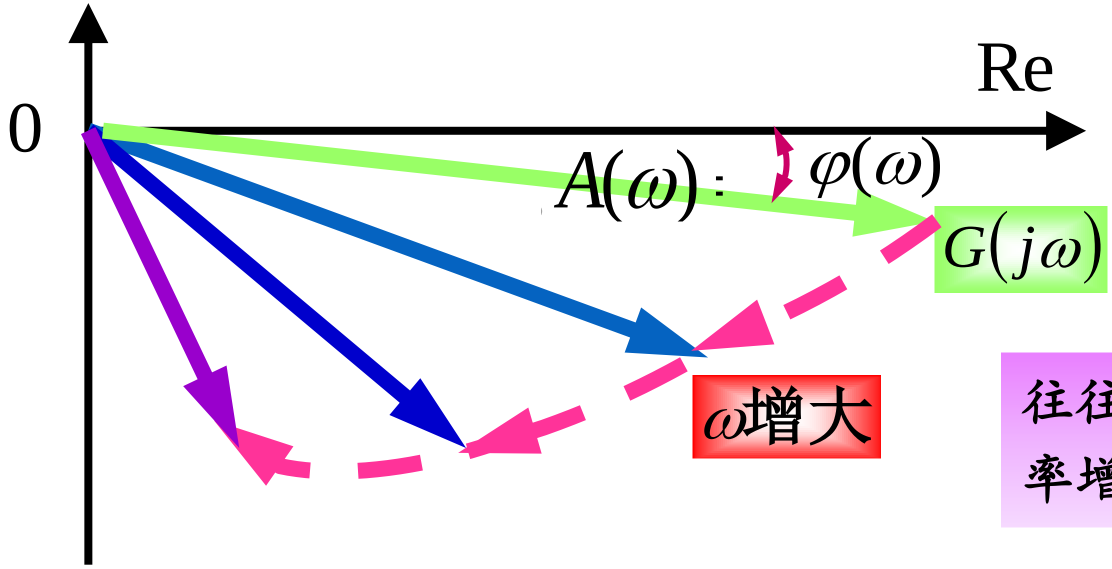
- 幅频特性将各环节的幅值乘除关系转变为加减关系，简化了作图过程。
- ω轴对数刻度，将低频段相对展宽了，而将高频段相对压缩了，便于在较大频率范围内反映频率特性的变化情况。

若把系统的开环对数频率特性划分为低频段，中频段和高频段，这三部分对控制系统动态过程的影响是不同的。低频段主要影响阶跃响应动态过程的最后阶段，而开环频率特性的高频段主要影响阶跃响应动态过程的起始阶段。对动态性能影响最重要的是中频段。所以，常用低频段估计系统的稳态性能，而用中频段估计系统的动态响应过程和性能。

2. 极坐标图或幅相频率特性（Nyquist图）

$A(\omega)$和$\phi(\omega)$均是ω的函数，当ω变化时$G(j\omega_i)$的幅值和相角均随之变化，因此表示它的向量也随之变化。

当ω从0变化到∞时，这些向量的端点将描绘出一条去向，这条曲线叫$G(j\omega_i)$的极坐标图，或叫奈魁斯特（Nyquist）曲线。



往往用箭头表示频率增大的方向。

典型环节的频率特性绘制及分析

- 系统的开环传递函数通常可分解为若干个典型环节的乘积，因此为了更好的研究开环系统的频率特性，首先需要了解各典型环节的频率特性

典型环节
- 最小相位环节
  - 比例环节
  - 积分环节
  - 惯性环节
  - 振荡环节
  - 纯微分环节
  - 比例微分环节
  - 二阶微分环节
- 非最小相位环节
  - 比例环节
  - 惯性环节
  - 振荡环节
  - 比例微分环节
  - 二阶微分环节

除了比例环节以外，非最小相位环节和与之对应的最小相位环节的区别在于开环零极点的位置，最小相位环节的零极点全都位于s平面的左半平面。

开环对数幅频特性渐近曲线的绘制方法

1. 传递函数的型式（时间常数型式）；
2. 算出各环节的转角频率及L=20lg*K*的dB值，并将转角频率从低到高排列；（环节划分）
3. 过 ω=1，L=20lg$K$ 这一点，作斜率为 −20N dB/dec的直线（N为串联的积分环节数）；
4. 从低频段开始，每经过一个转角频率，按环节性质改变一次渐近线的斜率；
5. 若要画精确曲线，则在各转角频率附近利用误差曲线进行修正。

开环对数相频特性渐近曲线的绘制方法

各环节相频特性叠加，工程上往往用分析法计算各相频特性上几个点，然后连接成线。

系统开环极坐标图的绘制

概略（大致）开环幅相曲线（极坐标图）反映开环频率特性的三个重要因素：

1）开环幅相曲线的起点（$\omega=0_+$）和终点（$\omega=\infty$）。

2）开环幅相曲线与实轴的交点。

设$\omega=\omega_x$时，$G(j\omega_x)H(j\omega_x)$的虚部为：

$$\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$$

或 $\phi(\omega_x)=\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=k\pi$，$k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

3）开环幅相曲线的变化范围（象限、单调性）。

起点

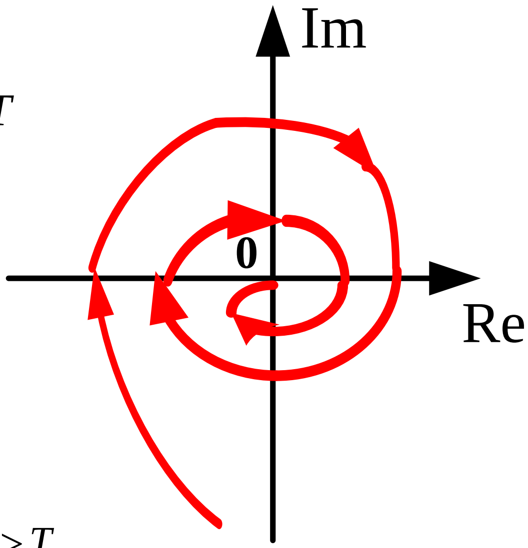
终点

走向

5.3 系统开环频率特性的绘制

例：$G(s)H(s)=\frac{1}{s}e^{-Ts}$ $\quad G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega T}=\frac{1}{j\omega}[\cos(-\omega T)+j\sin(-\omega T)]$

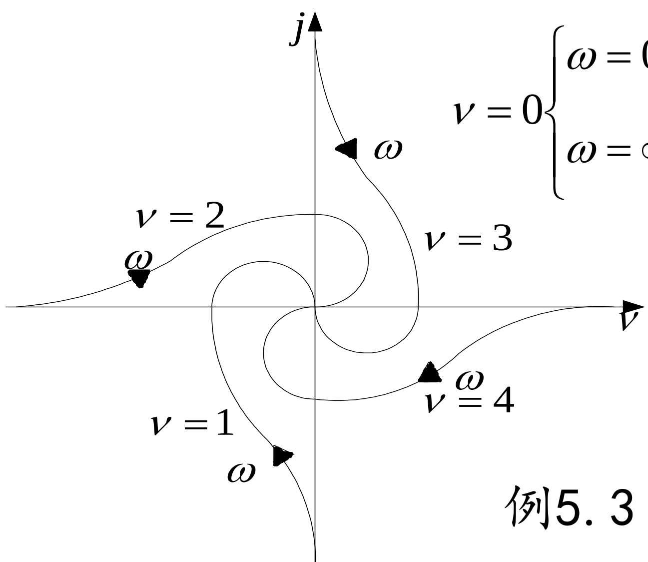
$$G(j\omega)H(j\omega)=\begin{cases}\infty\angle-\frac{\pi}{2},\omega=0;\\ 0\angle-\infty,\omega=\infty.\end{cases}\qquad \phi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\omega T$$



最小相位系统草图绘制规律总结

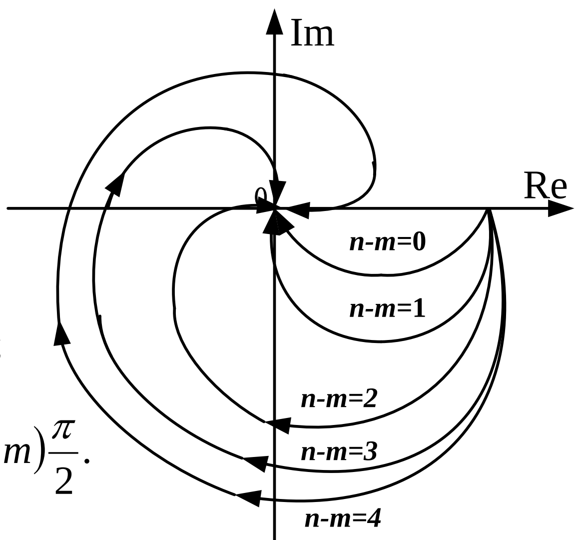
——抓住起止点，中间判交点。

设开环传递函数$(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K\prod\limits_{j=1}^{m}(1+j\omega T_j)}{(j\omega)^{\nu}\prod\limits_{i=1}^{n-\nu}(1+j\omega T_i)}$ $\quad (n>m)$设$T_i>T_j$



$$\nu=0\begin{cases}\omega=0,G(j\omega)=K\angle0^{\circ};\\ \omega=\infty,G(j\omega)=0\angle-(n-m)\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$\nu\geq1\begin{cases}\omega=0,G(j\omega)=\infty\angle-\nu\frac{\pi}{2};\\ \omega=\infty,G(j\omega)=0\angle-(n-m)\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

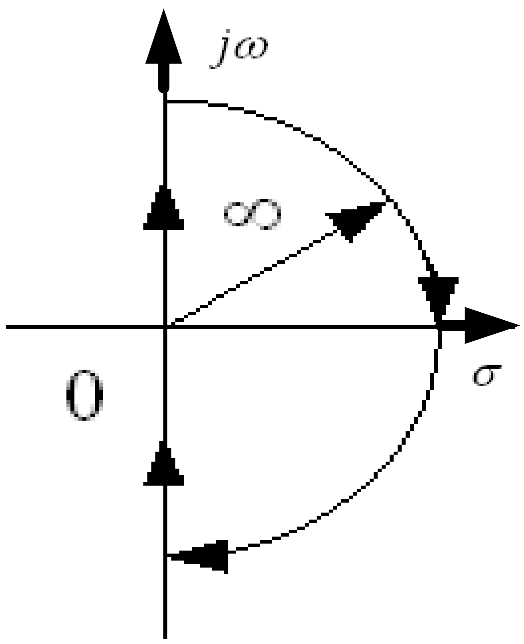


例5.3 $\quad G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K}{(j\omega)^{\nu}(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$

奈氏轨迹

为了判断稳定性(有无闭环右极点)，需要判断$F(s)$有无s平面上的右零点，特作封闭曲线C_S顺时针包围整个右半s平面。

- Cs：由Cs1和Cs2组成，方向取顺时针方向；
- Cs1：$\omega = -\infty \sim +\infty$整条虚轴
- Cs2 ：以原点为中心，半径R=∞的右半圆



Cs称为奈奎斯特轨迹，简称奈氏轨迹。

切记奈氏轨迹≠ 奈奎斯特图

闭环系统稳定的条件变为：Cs应不包围闭环特征根，即不包围F（s）的零点

奈氏判据

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)}$$

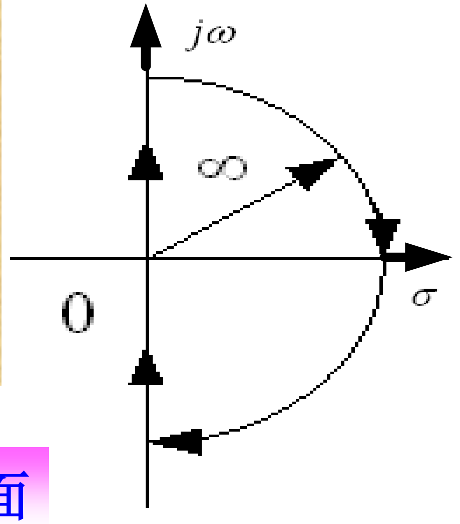
$$\Rightarrow F(s)=1+G(s)H(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)+K\prod_{j=1}^{m}(s+Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)}$$

$F(s)$的零点＝闭环特征方程的根或闭环极点

$F(s)$的极点＝系统的开环极点

若Z= $F(s)$的右零点数(闭环系统的右极点数)

P= $F(s)$的右极点数(开环系统的右极点数)



当s沿Cs奈氏轨迹顺时针运动一圈，则C_F在F平面上顺时针包围原点的次数为$N=Z-P$。

奈氏判据

$C_{GH}: G(j\omega)H(j\omega)$

***F*平面的原点=*Nquist*平面的(-1, *j*0)点。**

$C_F: F(j\omega)=1+G(j\omega)H(j\omega)$

- 如果闭环系统稳定，则$Z=0$，$N=-P$，
- C_F逆时针方向包围原点的次数等于系统的开环右极点数。

因此*闭环系统稳定的条件*可重新描述为

当s顺时针方向通过奈氏轨迹时，$G(j\omega)H(j\omega)$轨迹逆时针方向包围(-1, *j*0)点的次数等于系统的开环右极点数。（$Z=0$，$N=-P$）

奈氏判据

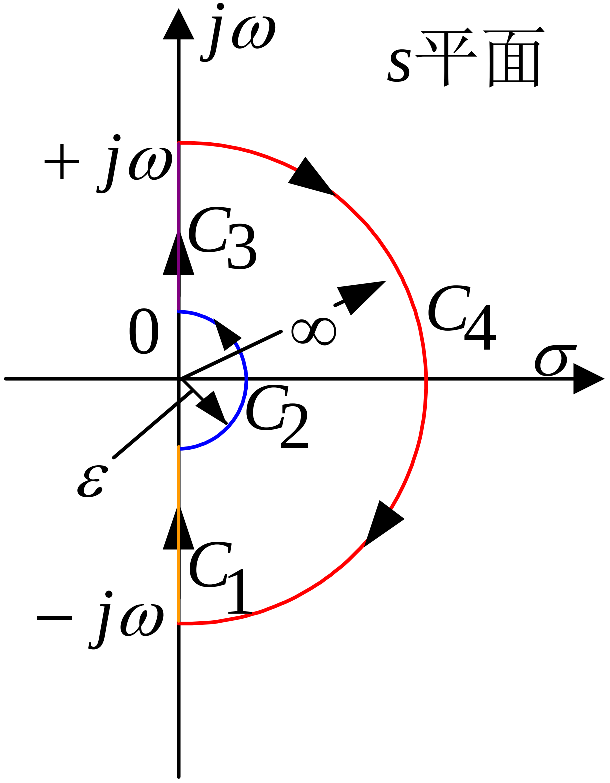
- 必须指出，映射定理只适用于封闭曲线不通过零、极点的情况，所以奈魁斯特轨迹(奈氏轨迹)应不通过零点或极点。

- 如果系统在虚轴上（例如在原点处）有开环极点（为 I型以上系统）时，则$F(s)$在虚轴上也就有极点，由于奈魁斯特轨迹不能通过$F(s)$的极点，因此须将它的形状略加修改，使奈魁斯特轨迹绕过虚轴上的开环极点。

- 修改后的奈氏轨迹 。

修改后的奈氏轨迹

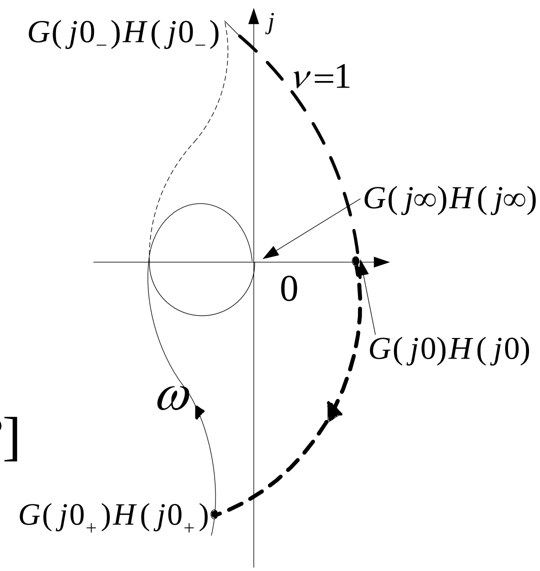
- C_1：s由 $-j\infty$ 沿负虚轴运动到 $j0^-$；
- C_2：s沿着以原点为圆心，半径为ε的半圆（$\varepsilon\to0$）从$j0^-$运动到$j0^+$，即$s=\varepsilon e^{j\theta}$，$\theta$从$-\pi/2$到$+\pi/2$；
- C_3：s沿着正虚轴由 $j0^+$运动到$+j\infty$；
- C_4：s沿着以原点为圆心，以R为半径的无穷大半圆（$R\to\infty$），从$+j\infty$运动到$-j\infty$，即$s=\infty e^{j\theta}$，θ从$+\pi/2$到$-\pi/2$。



修改后的奈魁斯特轨迹包围了除原点以外的整个右半s平面。

修改后的奈氏轨迹

若$G(s)H(s)$有虚轴极点，即当开环系统含有积分环节时，设：$G(s)H(s)=\frac{1}{s^v}G_1(s) \quad (v>0,\ |G_1(j\omega)|\neq\infty)$



则：$A(0_+)=\infty$

$$\phi(0_+)=\angle G(j0_+)H(j0_+)=v\times(-90°)+\angle G_1(j0_+),$$

在原点附近，闭合曲线C_2为 $s=\varepsilon e^{j\theta} \quad \theta\in[-90°,+90°]$

且有 $G_1(\varepsilon e^{j\theta})=G_1(j0)$

故

$$G(s)H(s)\Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}}=\infty e^{j[v\times(-\theta)+\angle G_1(j0)]}$$

对应的曲线为$G(j0-)H(j0-)$点起，半径为∞、圆心角为v×(-θ)的圆弧，即可从$G(j0-)H(j0-)$点起顺时针作半径无穷大、圆心角为v×180°的圆弧，如图中虚线所示。

修改后的奈氏轨迹

$G(s)H(s)$轨迹由补全后的开环极坐标图和辅助圆构成。

- 对开环传递函数$G(s)H(s)$的N型系统($N\geq1$)奈氏稳定判据可叙述为：

✓ 如果$G(s)H(s)$在右半s平面上有P个极点，则闭环系统稳定的充要条件为，s顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时，$G(s)H(s)$轨迹逆时针方向包围(-1, j0)点P次。

✓ 对于N型最小相位系统，闭环系统稳定的充要条件为，当s顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时，$G(s)H(s)$轨迹不包围(-1, j0)点。

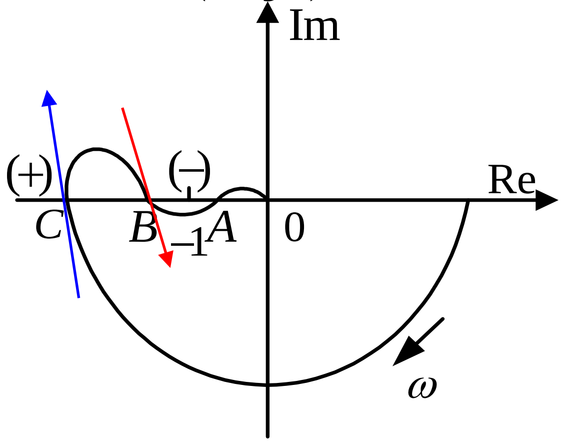
奈氏判据

闭合曲线包围特征点圈数（次数）N的计算

设N为闭合曲线穿越 (-1, j0)点左侧负实轴的次数，N_+表示闭合曲线从下向上穿越（正穿越，意味着闭合曲线的顺时针包围）的次数和，$N_$表示闭合曲线从上向下穿越（负穿越，意味着闭合曲线的逆时针包围）的次数和，则闭合曲线顺时针包围(-1,j0)特征点圈数为：

$$N = N_+ - N_-$$

另一种判断稳定的方式。



半闭合曲线示意穿越方向。

开环极坐标图与开环对数坐标图的对应关系：

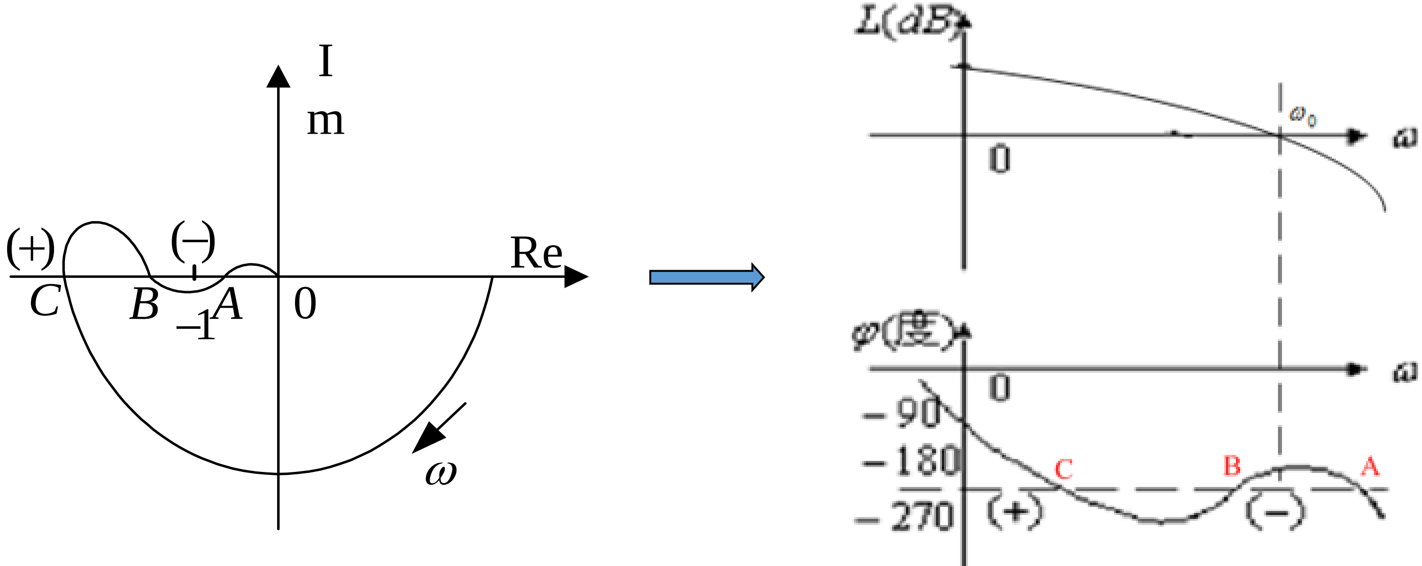
A=1的单位圆 → L = 0 dB的水平线

负实轴（ϕ = -180°的直线） → Φ = -180°的水平线

使$L(\omega)$=0时的频率称增益交界频率或开环截止频率、剪切频率，通常以ω_0表示。

开环极坐标图与开环对数坐标图的对应关系：

极坐标图（奈氏图）每穿越(-1, *j*0)点左侧负实轴一次，必在开环对数幅频特性$L(\omega)>0$的条件下，相频特性穿越 -180°线一次。正穿越对应于$\phi(\omega)$曲线自上而下穿越 -180°线，负穿越对应于$\phi(\omega)$曲线自下而上穿越 -180°线。



奈氏判据中自下而上穿越---正穿越---对数判据中自上而下穿越
奈氏判据中自上而下穿越---负穿越---对数判据中自下而上穿越

对数判据具体内容：

设ω_0为系统的增益交界频率（开环截止频率或剪切频率），N_+、N_-分别为正、负穿越次数，P 为系统开环右极点数，则闭环系统稳定的充要条件为：

在开环对数坐标图上，在$\omega<\omega_0$的频段内，相频特性穿越-180°线的次数为 。

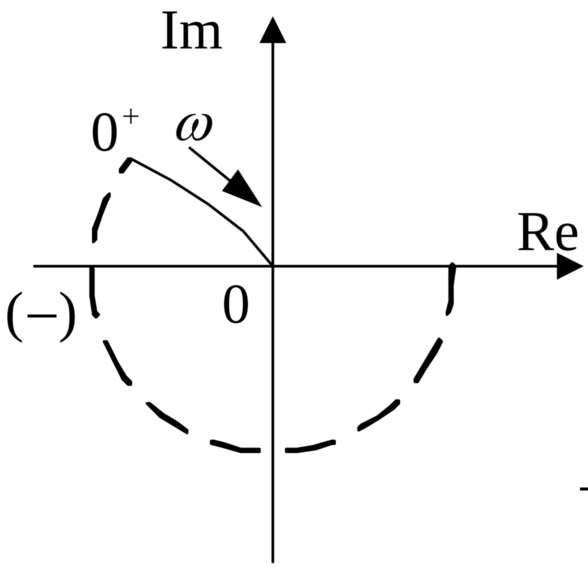
$$N_+ - N_- = -\frac{P}{2}$$

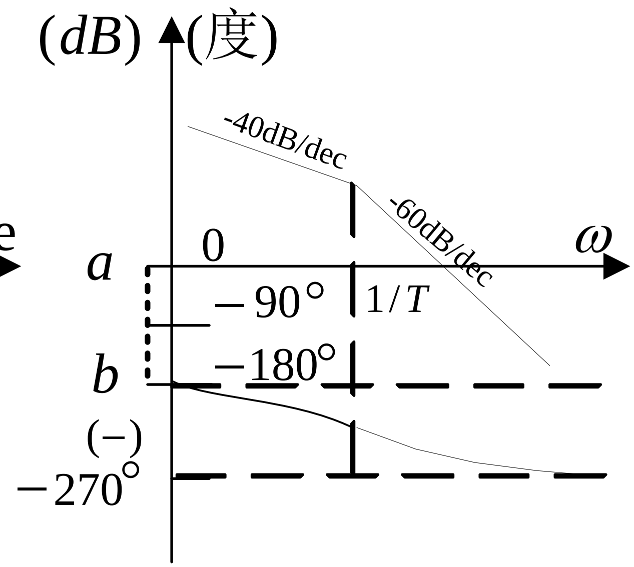
跟奈氏判据相比，为何变P/2？

例5.8： 开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{K_0}{s^2(Ts+1)}$ 判断闭环系统的稳定性。

解： 根据对数判据，P=0，闭环稳定应该满足 $N_+ - N_- = 0$，相应奈氏图如左下图，开环对数坐标图如右下图。

由于在 $\omega=0 \rightarrow 0^+$ 时，在 GH 平面上 $G(s)H(s)$ 的轨迹为辅助圆，从原点到辅助圆上点的向量，幅值 $A(\omega)=\infty$，相角由0°~180°，对应开环对数坐标图上的虚线ab（由于当 $\omega=0$ 时在对数坐标图上无法表示，所以用虚线标出。）





不论 K_0 为何值，开环对数频率特性图上的穿越次数不变，系统总是不稳定，即该系统为结构不稳定系统。

由图可知，闭环稳定则满足 $N_+ - N_- = 1-0=1$，故闭环系统不稳定。

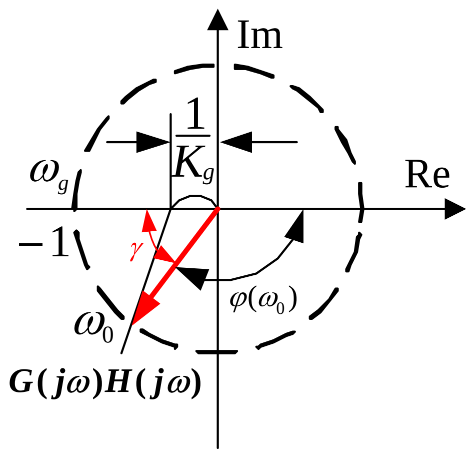
相位（相角）裕量

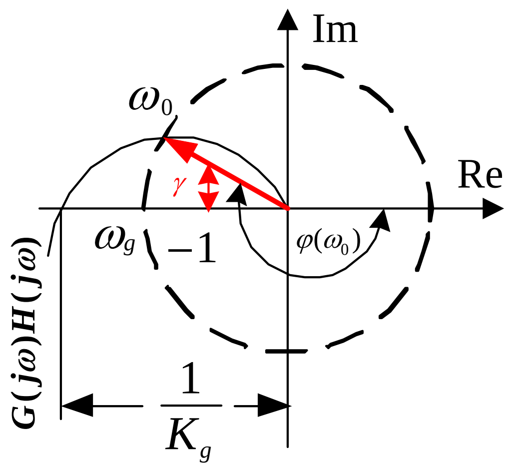
在增益交界频率ω_0上，使系统达到临界稳定状态所需附加的相位迟后量，叫相位裕量，以γ表示。

在开环极坐标图上，从原点到$G(j\omega)H(j\omega)$曲线与单位圆交点作一直线，从负实轴到该直线所转过的角度即为相位裕量γ，逆时针方向转为正，反之为负，即

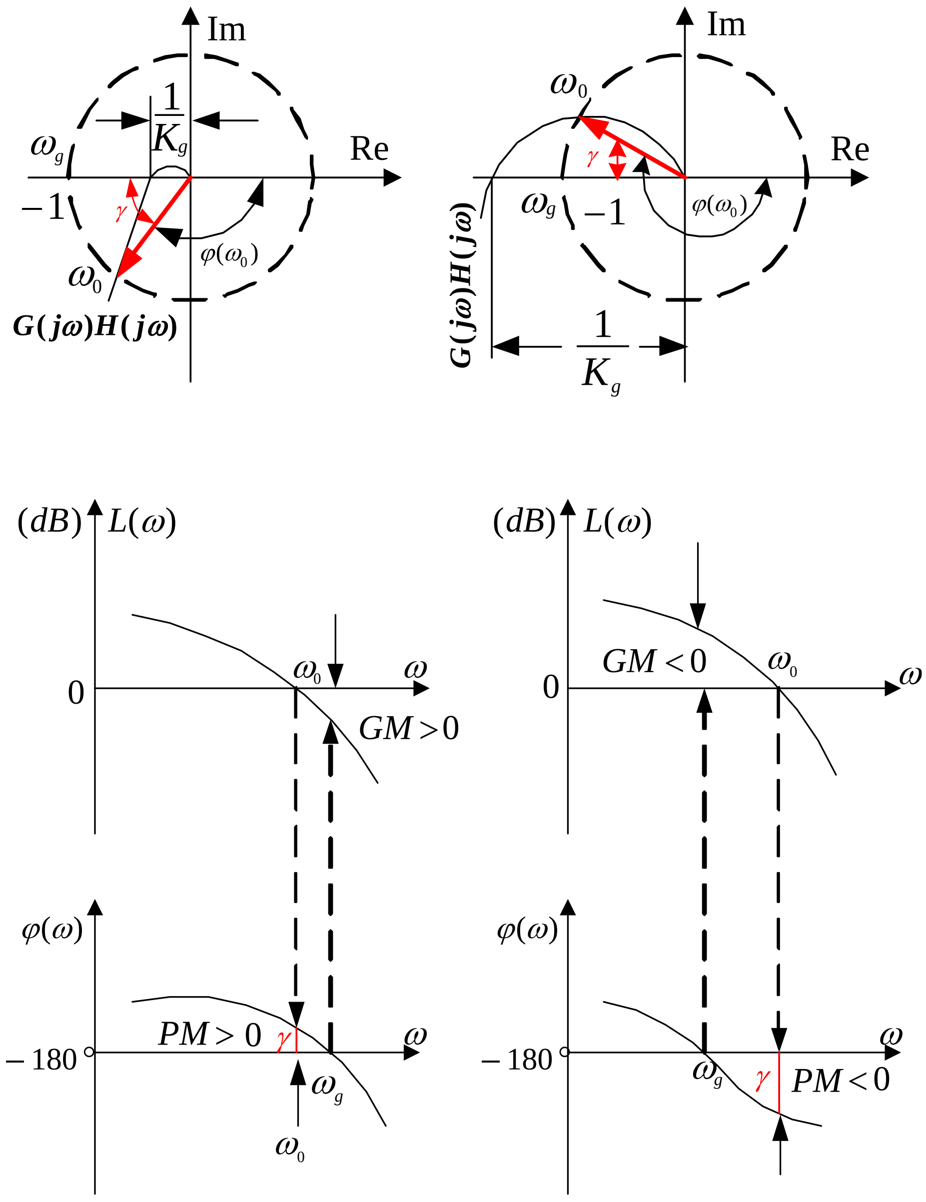
$$\varphi(\omega_0)-\gamma=-180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma=180^\circ+\phi(\omega_0)$$





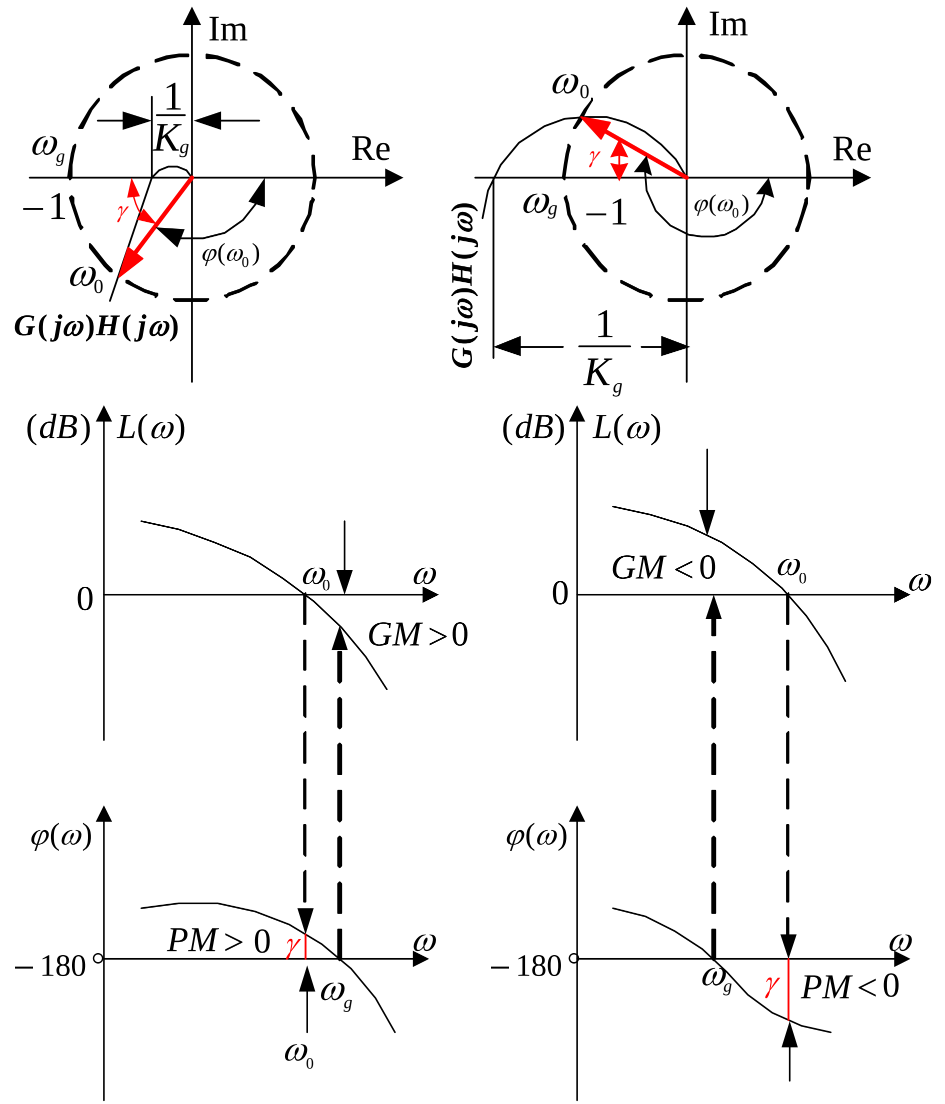
相位裕量



在对数坐标图上，γ 为在 ω=开环截止频率ω_0时$\phi(\omega)$曲线与-180°线之距离。

γ 在-180°线以上时 γ 为正，γ 在-180°线以下时 γ 为负。

增益裕量



在$\phi(\omega_g)$= -180° 的频率上（ω_g *称为相位穿越频率*），使$|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|=1$所应增大的增益倍数，即 $K_g\cdot|G(j\omega)H(j\omega)|=1$，式中$K_g$为增益裕量，得：

$$K_g=\frac{1}{\left|G(j\omega_g)H(j\omega_g)\right|}$$

一般增益裕量用分贝数表示：

$$K_g=-20\lg\left|G(j\omega_g)H(j\omega_g)\right| \quad (dB)$$

当$K_g>1$时，上式中增益裕量为正；当$K_g<1$时，增益裕量为负。

增益裕量

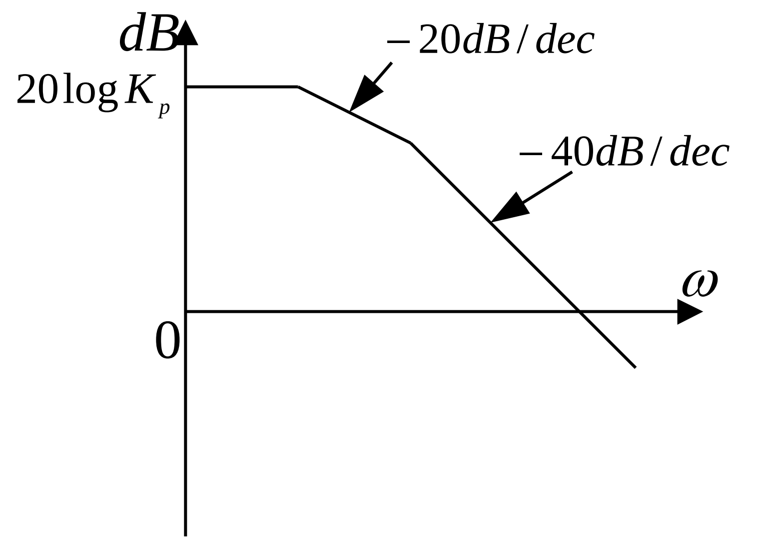
- 对于最小相位系统，若其相角随着ω增大而单调减小时，增益裕量和相位裕量为正的系统，是稳定的，反之是不稳定的（对数判据即可得到该结论）。
- 仅用单一的相位裕量或增益裕量，往往不足以说明曲线$G(j\omega)H(j\omega)$与特征点的靠近程度，也即不足以说明系统相对稳定程度；所以一般应同时求出相位裕量和增益裕量。

从对数频率特性分析系统的稳态性能

1) 0型系统

0型系统对数幅频特性如图所示，在低频段有：

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega)H(j\omega)=K_p$$



0型系统对数幅频特性在低频段是一条水平线，高度为：

$$20\lg K_0 = 20\lg K_p$$

当系统开环对数幅频特性低频段是水平线时（为0型系统），系统是静态有差系统，跟随阶跃输入信号时有稳态误差，误差大小与开环对数幅频特性低频段高度有关（$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$）。

5.6 用频率法分析系统品质

从对数频率特性分析系统的稳态性能

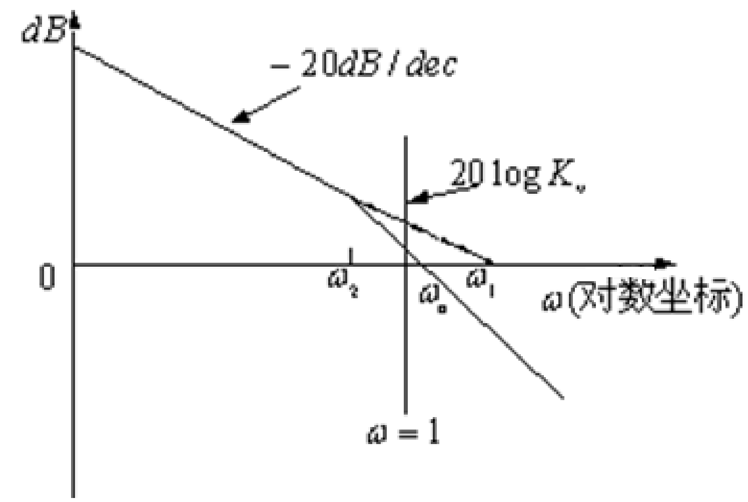
1) I型系统

在$\omega<<\omega_2$ (转角频率)时，有： $G(j\omega)=\dfrac{K_0}{j\omega}$

低频渐近线为：$L(\omega)=20\lg K_0-20\lg\omega$　　对于I型系统：$K_v=K_0$。

当$\omega=1$时，$L(\omega)=20\lg K_v$； 当$L(\omega)=0$时，$\omega=K_v$ (图中ω_1)

- I型系统开环对数幅频特性起始阶段的斜率是 -20 dB/dec；
- 当$\omega=1$时，低频渐近线的高度是$20\lg K_v$；
- 低频渐近线与0 dB水平线的交点频率$\omega_1=K_v$。



5.6 用频率法分析系统品质

从对数频率特性分析系统的稳态性能

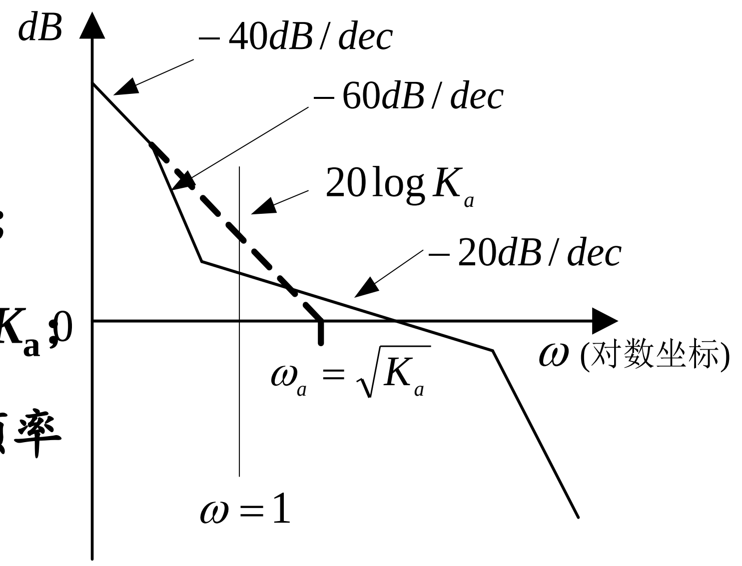
3) II型系统

在$\omega<<\omega_1$ (转角频率)时，有： $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K_a}{(j\omega)^2}$ **II型系统：$K_a=K_0$。**

所以：低频渐近线为：$L(\omega)=20\lg K_a-40\lg\omega$

当$\omega=1$时，$L(\omega)=20\lg K_a$；

当$L(\omega)=0$时，$\omega_a=\sqrt{K_a}$



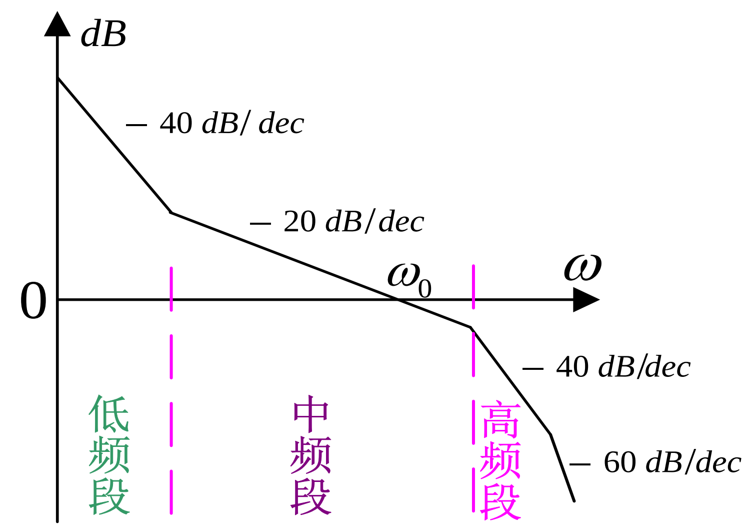
- **II型系统低频的斜率是 -40 dB/dec;**
- **当$\omega=1$时，低频渐近线的值是$20\lg K_a$;**
- **低频渐近线与0 dB水平线的交点频率ω_a等于$\sqrt{K_a}$ 。**

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

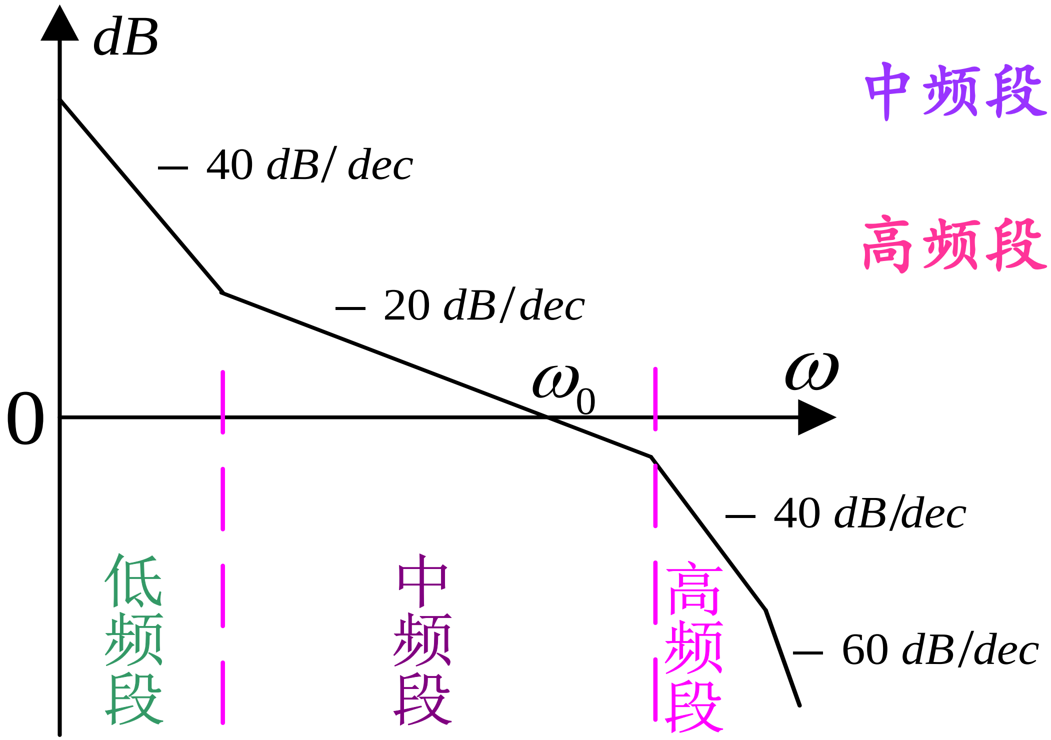
（2） 开环频率特性与时域响应的关系

开环频率特性与时域响应的关系通常分为三个频段来分析：

- 低频段(第一个转折频率以前的频段)的频率特性形状主要影响系统瞬态响应的结尾段，影响系统的稳态指标；
- 中频段(开环截止频率附近的频段)主要影响瞬态响应的中间段，时域响应的动态指标主要是由中频段的形状所决定的(时域响应的快速性、振荡性)。
- 高频段(中频段以后的频段)主要影响瞬态响应的起始段；



典型系统的开环频率特性

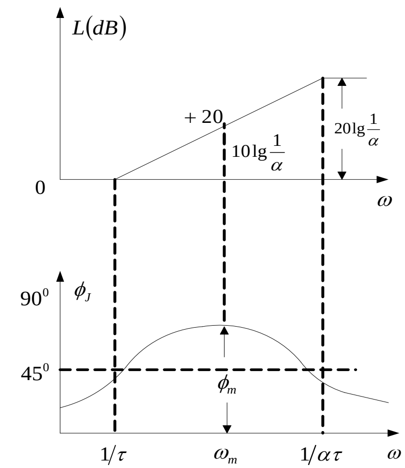


低频段:一定的高度和斜率

中频段:足够的宽高度

高频段:迅速衰减

超前校正装置



$$G_J(j\omega)=\frac{j\omega\tau+1}{j\alpha\omega\tau+1}$$

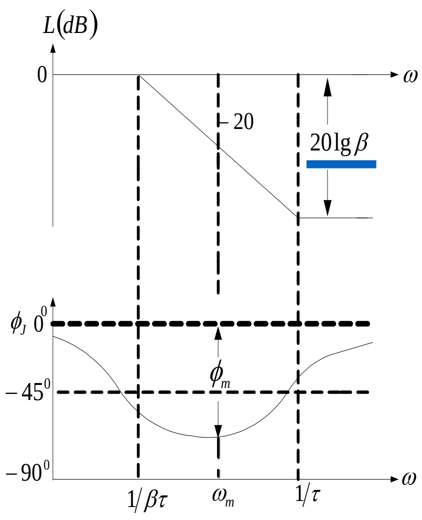
$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}$$

$$\phi_m=\sin^{-1}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{1-\sin\phi_m}{1+\sin\phi_m}$$

特点：相位超前，幅值增加

思想：利用其相角超前特性，将校正装置产生最大超前角的频率配置在新系统开环截止频率处，从而产生最大相位裕量。

迟后校正装置



$$G_J(j\omega)=\frac{j\omega\tau+1}{j\beta\omega\tau+1}$$

$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\beta}\tau}$$

$$\phi_m=\sin^{-1}\frac{1-\beta}{1+\beta}\quad\Rightarrow\quad\beta=\frac{1-\sin\phi_m}{1+\sin\phi_m}$$

特点：幅值衰减，相位迟后

思想：利用幅值衰减带来相位裕量的增加特性，利用其后段产生稳定的$20\lg\beta$衰减，同时配置转折频率$\frac{1}{\tau}$远离ω_0（距离越远，迟后装置带来的相位迟后影响越小）

应用频率法的串联超前校正

- 从伯德图来看，如果串联一个超前校正网络，使在截止频率处产生超前相位，以增加系统的相位稳定裕量，那么系统的瞬态响应性能将会得到改善。
- 因此，在校正时，应使校正网络的最大超前角出现在系统的开环截止角频率处。

应用频率法的串联超前校正

$$G_J(s)=\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}$$

应用频率法进行超前校正的步骤：

(1) 画出未校正系统的伯德图，求出ω_0和相角裕量γ_g。

(2) 根据给定的相角裕量γ，计算出需增加的相角超前量，即：

$$\phi_J=\gamma-\gamma_g+\varepsilon$$

式中：ε是考虑到校正装置对截止频率位置的影响而增加的相角裕量，当未校正系统中频段斜率为-40 dB/dec时，取 ε =5°；当未校正系统中频段斜率为-60dB/dec时，取 ε=15°~20°。

应用频率法的串联超前校正

$$G_J(s)=\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}$$

应用频率法进行超前校正的步骤：

(3) 令校正装置的最大超前角$\phi_m=\phi_J$，计算出：

$$\alpha=\frac{1-\sin\phi_m}{1+\sin\phi_m}$$

若ϕ_m大于60°，则应考虑采用二级串联。

(4) 计算校正网络在ω_m处的幅值10log1/α。显然，未校正系统在幅值为 -10log1/α处的频率即为校正后系统新的开环截止角频率 ω_0'，即 $\omega_0'=\omega_m$ 。

应用频率法的串联超前校正

$$G_J(s)=\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}$$

应用频率法进行超前校正的步骤：

(5) 计算校正网络的转折频率ω_1和ω_2：

$$\omega_1=\frac{1}{\tau}=\omega_m\sqrt{\alpha} \qquad \omega_2=\frac{1}{\alpha\tau}=\frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}}$$

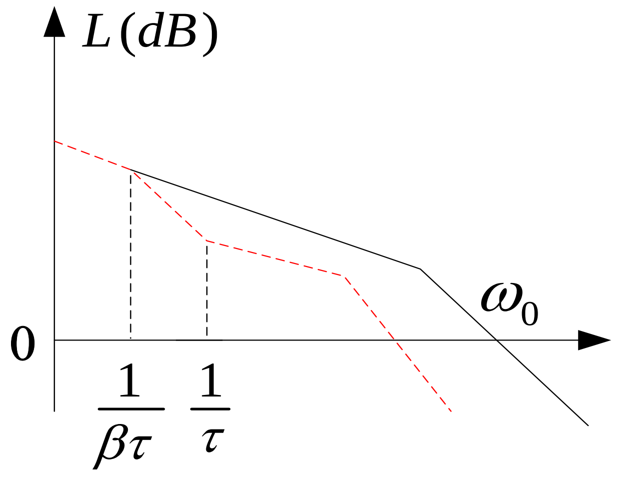
$$\tau=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} \qquad \alpha\tau=\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_m}$$

$$\Rightarrow \quad G_J(s)=\frac{\frac{1}{\omega_1}s+1}{\frac{1}{\omega_2}s+1}=\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}$$

(6) 画出校正后系统的伯德图，验算相位裕量，如不满足要求，则可增大 ε 从(2)重新计算。

应用频率法的串联迟后校正

- 串联迟后校正可以用来改善系统的动态性能，其方法是利用迟后网络的低通滤波特性所造成的高频衰减，降低系统的开环截止角频率，增大相角裕量，从而改善系统的动态性能。
- 显然，这种方法能够减少超调量和振荡次数，但由于频带变窄，所以过渡过程时间变长了。



应用频率法的串联迟后校正

$$G_J(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$$

应用频率法进行迟后校正的步骤：

(1) 根据给定的稳态性能指标确定系统的开环放大倍数K_0。

(2) 画出未校正系统的伯德图，求出ω_0和相角裕量γ_g。

(3) 找到未校正系统的相角裕量等于 $\gamma+\varepsilon$ 处的频率ω_0'，并以此作为校正后系统的开环截止频率。

其中，γ 是要求的相角裕量，ε是用来补偿迟后网络在ω_0处造成的相角迟后，通常取$\varepsilon = 5°\sim15°$。

应用频率法的串联迟后校正

$$G_J(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$$

应用频率法进行迟后校正的步骤：

(4) 令未校正系统在 $\omega_0^{'}$ 处的幅值增益为**20log*β***，由此确定迟后网络的 β 值。

$$20\log\beta=20\log\left|G(j\omega_0')H(j\omega_0')\right|$$

再按下式计算迟后网络的转折频率ω_2和ω_1，即

$$\omega_2=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_0'}{2}\sim\frac{\omega_0'}{10}\qquad \tau=\frac{(2\sim10)}{\omega_0'}\qquad \omega_1=\frac{1}{\beta\tau}$$

(5) 画出校正后系统的伯德图，校验相角裕量。

(6) 校验其他指标，若不能满足要求，可改变 τ 值后重新设计。

- 基本概念：串联校正、并联校正
- 无源校正网络、有源校正网络数学模型
- 应用频率法对系统进行串联校正
  - ✓ 串联超前校正：例题6.4
  - ✓ 串联迟后校正：例题6.5
- 按期望模型对系统进行串联校正

按最佳二阶系统校正后开环传函为：

$$G_J(s)G_g(s)=\frac{1}{2Ts(Ts+1)}$$

$$\begin{cases}\sigma=4.3\% \\ \omega_n t_s=6 \\ \gamma=65.5^\circ\end{cases}$$

则校正网络传函为：

$$G_J(s)=\frac{G_0(s)\left[=G_J(s)G_g(s)\right]}{G_g(s)}=\frac{1}{2Ts(Ts+1)G_g(s)}$$

信号的采样与保持

信号采样 $e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$ $E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs}$

香农定理 $\omega_s \geq 2\omega_h$

零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$

z变换理论

z变换：级数求和法和部分分式法

$$E(z)=Z[e^*(t)]=Z[e(t)]=Z[E(s)]$$

$$\Rightarrow E(z)=E^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

z反变换：部分分式法、幂级数法和反演积分法(留数法)

线性离散系统的数学模型

- **线性常系数差分方程：** 迭代法(递推法),z变换法
- **脉冲传递函数定义：**

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)z^{-n}}$$

- **由传递函数求脉冲传递函数** $G(s)\Rightarrow L^{-1}[G(s)]=k(t)\Rightarrow$ 离散化 $k(t)=k(nT)\Rightarrow Z[k(nT)]=G(z)$
- **开环系统的脉冲传递函数**

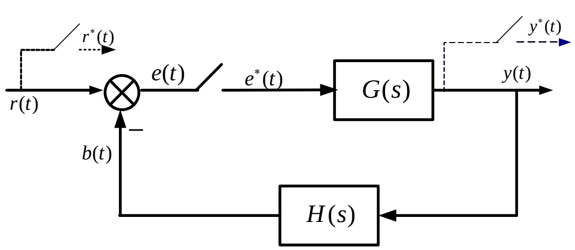
串联环节之间有采样开关时 $$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$$

串联环节之间无采样开关时 $$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_1G_2(z)$$

有零阶保持器时 $$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

- **闭环系统脉冲传递函数**

结构图，注意采样开关的位置



$$\Rightarrow W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

离散系统稳定性判定

线性定常离散系统稳定的充要条件

系统闭环脉冲传递函数的全部极点均分布在平面上以原点为圆心的单位圆内，或者系统所有特征根的模均小于1。

通过线性变换：$z=\frac{w+1}{w-1}$

将以z为变量的特征多项式

$\rightarrow$以w为变量的特征多项式

z为变量的特征根是否都位于z平面的单位圆内

$\rightarrow$ 以w为变量的特征根是否都位于w左半平面

应用劳斯判据即可判断系统稳定性。

对于简单定常二阶系统，也可简单求根判断稳定性。

离散系统稳态误差计算

□ 线性离散系统的稳态误差

单位反馈离散系统稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t)=A\cdot 1(t)$	速度误差 $r(t)=A\cdot t$	加速度误差 $r(t)=\frac{At^2}{2}$
0型	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I 型	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
II 型	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

$$\lim_{z\to 1} G(z)=\lim_{z\to 1}\frac{K}{(z-1)^{\gamma}}\cdots$$

$$K_p=\lim_{z\to 1} G(z)$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$$

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2 G(z)$$

与连续系统相比较，离散系统的速度、加速度稳态误差不仅与K_v、K_a有关，而且与采样周期T有关。

闭环极点与动态响应的关系（结论）

- 当闭环实极点位于z平面的左半单位圆内时，输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差。
- 当闭环复极点位于z平面的左半单位圆内时，输出是衰减的高频脉冲，故系统的动态过程性能欠佳。
- 因此，在设计离散系统时，应把闭环极点安置在Z平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点。

- 零点的影响较难定性分析。

8.1 线性系统的状态空间描述

□基本概念

状态、状态变量、状态方程、动态方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t)\end{aligned}\right\}$$

□动态方程与传递函数的关系

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

□线性定常系统动态方程的建立(建模)

根据系统物理机理建立动态方程(机理法)

状态变量的选取（尽量选取独立储能元件输出的物理量）

动态方程的构成(型式：状态方程+输出方程)

状态变量选取的不唯一性（但传递函数矩阵是唯一的，不变）。

由高阶微分方程建立动态方程-微分方程不含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u$$

$$x_1=y\,,\quad x_2=\dot{y}\,,\quad \cdots,\quad x_n=y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u\\ y=x_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx\end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b_0\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]$$

8 8.1 线性系统动态方程的建立

□由高阶微分方程建立动态方程-微分方程含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

$$\begin{cases} x_1=y-h_0u \\ x_i=\dot{x}_{i-1}-h_{i-1}u \end{cases}$$

$$(i=1,2,\cdots n)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=y-h_0u \\ x_2=\dot{x}_1-h_1u=\dot{y}-h_0\dot{u}-h_1u \\ x_3=\dot{x}_2-h_2u=\ddot{y}-h_0\ddot{u}-h_1\dot{u}-h_2u \\ \quad\vdots \\ x_n=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u=y^{(n-1)}-h_0u^{(n-1)}-h_1u^{(n-2)}-\cdots-h_{n-1}u \end{cases}$$

h_i是待定常数

$$\begin{cases} h_0=b_n \\ h_1=b_{n-1}-a_{n-1}h_0 \\ \quad\vdots \\ h_{n-1}=b_1-a_{n-1}h_{n-2}-\cdots-+x_n+h_{n-1}u \\ h_n=b_0-a_{n-1}h_{n-1}-\cdots-a_1h_1-a_0h_0 \end{cases}$$

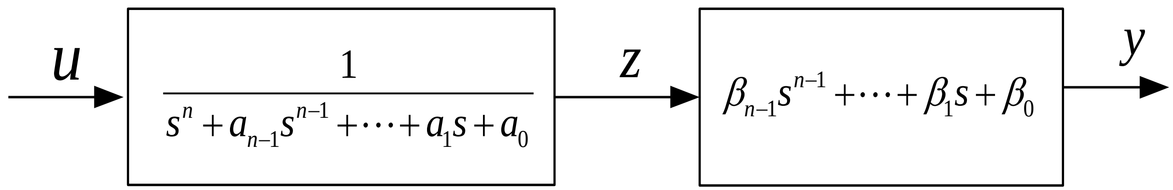
$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+bu \\ y=cx+du \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} \quad c=[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad d=[h_0]$$

8.1 线性系统动态方程的建立

□由系统传递函数建立动态方程 ① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$



$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_c x+b_c u\\ y&=c_c x\end{aligned}\right\}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\quad c_c=[\beta_o\quad \beta_1\quad \cdots\quad \beta_{n-1}]$$

能控标准型

$$A_c=A_o^T\qquad b_c=c_o^T\qquad c_c=b_o^T$$

对偶关系

能观标准型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_o x+b_0 u\\ y&=c_o x\end{aligned}\right\}$$

$$A_o=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_o=\begin{bmatrix}\beta_o\\\beta_1\\\vdots\\\beta_{n-1}\end{bmatrix}\quad c_o=[0\quad\cdots\quad 0\quad 1]$$

8.1 线性系统动态方程的建立

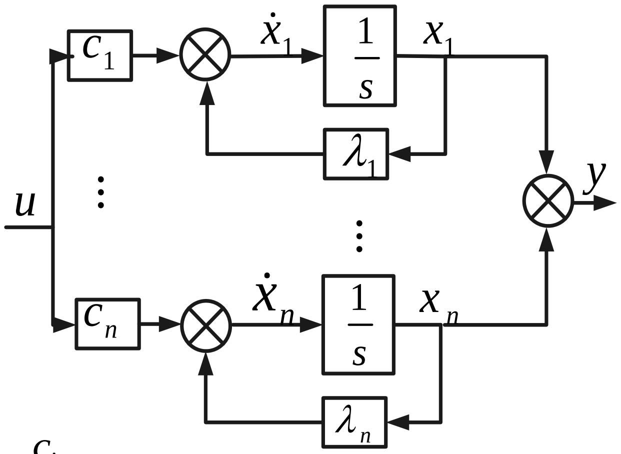
$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

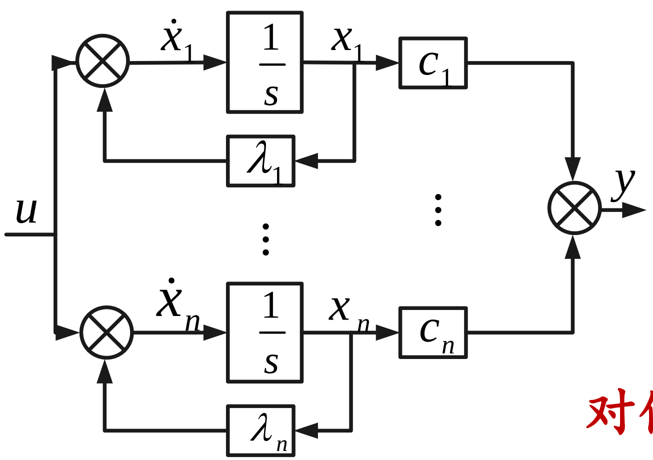
□由系统传递函数建立动态方程② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

状态变量：$X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s),\quad i=1,2,\cdots,n$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=[c_1\quad c_2\quad\cdots\quad c_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$





对偶关系

状态变量：$X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u \qquad y=[1\quad 1\quad\cdots\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

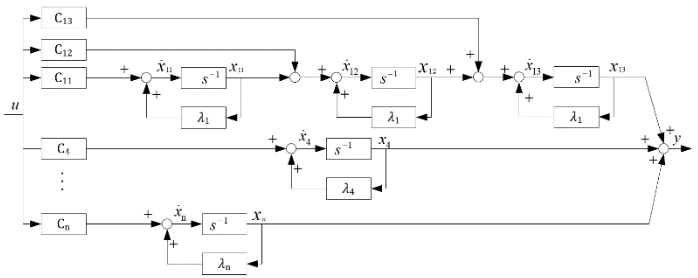
□由系统传递函数建立动态方程 ③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_j}\right]U(s)$$

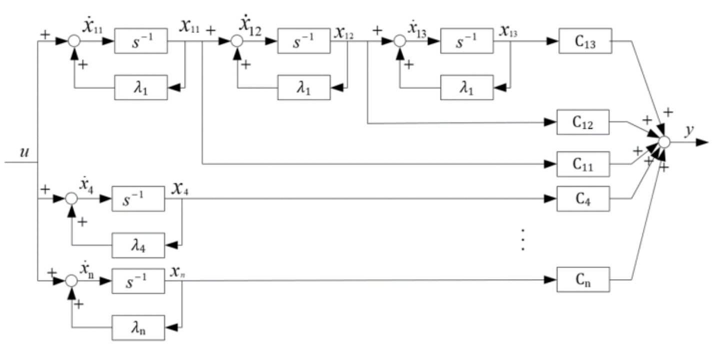
状态变量： $X_i(s)=\dfrac{1}{s-\lambda_i}U(s)$

约当块

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1r}\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & \ddots & 0\\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\left[c_{11}\ \cdots c_{1r}\ \middle|\ c_{r+1}\cdots\ c_n\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$



状态变量： $X_i(s)=\dfrac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$



约当块

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1r}\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \ddots & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & \ddots & 0\\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{11}\\ \vdots\\ c_{1r}\\ c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u \qquad y=\left[0\ \cdots 1\ \middle|\ 1\cdots\ 1\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

对偶关系

动态方程的响应

- 线性定常系统齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \qquad x(t)=e^{At}x(0)$$

- 矩阵指数函数的计算与性质

$$\Phi(t)=e^{At} \qquad e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

- 线性定常系统非齐次状态方程的解

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t)=Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)+C\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t)$$

$$x(t)=L^{-1}(sI-A)^{-1}x(0)+L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$$

$$\begin{aligned}y(t)&=Cx(t)+Du(t)\\&=CL^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0)+CL^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]+Du(t)\end{aligned}$$

线性系统的能控性定义和判据

✓ 稳定性判据 特征方程 |s*I*-*A*|=0的所有根位于左半s平面。

1.秩判据： $S_c=[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad \mathrm{rank}S_c=\mathrm{rank}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]=n$

2.A矩阵为对角阵时：系统经非奇异变换后的对角线标准型方程为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\bar{x}+\bar{\mathrm{B}}u$$

其中，$\bar{\mathrm{B}}$阵不包含元素全为零的行。

3.A矩阵为约当阵时：系统经非奇异变换后的对角规范方程为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k\end{bmatrix}\bar{x}+\bar{\mathrm{B}}u$$

其中，与每个约当小块J_i(i=1, 2, …, k) 的最后一行相对应的阵 $\bar{\mathrm{B}}$ 中的所有那些行，其元素不全为零。

线性系统的能观性定义和判据

1.秩判据： $\mathrm{rank}S_o = \mathrm{rank}[C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T = n$

2.A矩阵为对角阵时：系统经非奇异变换后的对角线标准型方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} \\ y = \overline{cx} \end{cases}$$

其中，$\bar{C}$ 阵不包含元素全为零的列。

3.A矩阵为约当阵时：系统经非奇异变换后的对角规范方程为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{\mathrm{B}}u$$

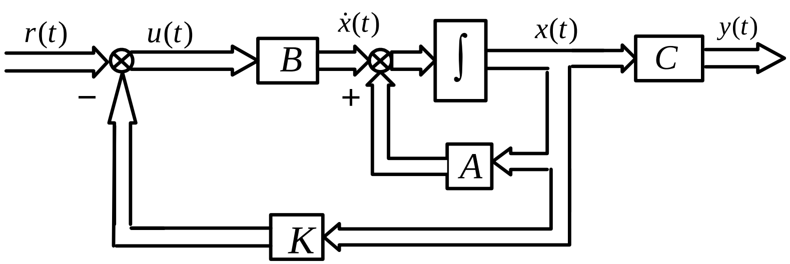
其中，与每个约当小块J_i(i=1, 2, …, k) 的首行相对应的阵 $\bar{C}$ 中的那些列，其元素不全为零。

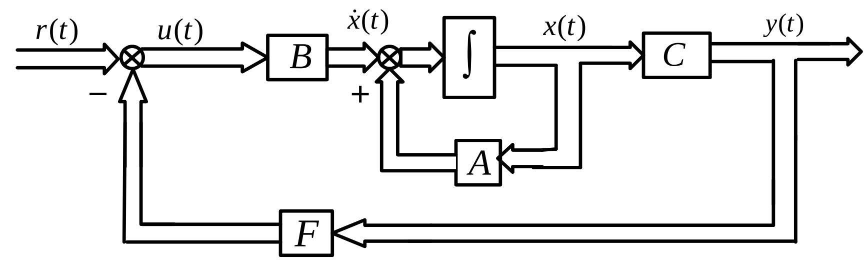
能控性、能观测性与传递函数矩阵的关系

结论：对动态方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad y(t)=Cx(t)$

- ✓ 单输入-单输出系统能控、能观测的充要条件是：由动态方程导出的**传递函数不存在零、极点对消**；
- ✓ 系统能控的充要条件是$(sI-A)^{-1}B$不存在零、极点对消；
- ✓ 系统能观的充要条件是$C(sI-A)^{-1}$不存在零、极点对消；
- ✓ 若传递函数有可对消的零、极点，在推导状态方程时不应实施对消，以免掩盖稳定性、能控/观性。
- ✓ 传递函数（低维空间描述）不是完全描述，只有系统能控又能观时，传递函数描述与状态空间描述才是等价的。

状态反馈与输出反馈的定义





u=r-Kx

u=r-Fy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{x} = (A - BFC)x + Br$$
$$y(t) = Cx(t)$$

则传递函数为：

$$G_K(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

状态反馈

则传递函数为：

$$G_F(s) = C(sI - A + BFC)^{-1}B$$

输出反馈

□ 状态反馈与极点配置（定理）

✓ 任意配置系统闭环极点的充要条件：

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$
$$y(t) = Cx$$

所表示的系统(*A*, *B*, *C*)能控。

✓ 状态反馈阵*K*的设计

实际求解状态反馈矩阵时，只须校验系统是否能控，然后计算特征多项式| λI-(A-BK)| （其系数均为$k_1, k_2, \ldots, k_n$的函数）和特征值，并通过与所希望特征值的特征多项式相比较，便可确定*K*矩阵。

$$\Delta = \left|\lambda I - (A - bK)\right|$$
$$K = \left[k_1, k_2, \cdots, k_n\right]$$

□ 状态重构与状态观测器设计

✓ 全维状态观测器动态方程：

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

✓ 状态观测矩阵H的设计

系统能观测，可设计全维状态观测器估计状态值，观测矩阵H设计首先特征多项式|λI-(A-HC)|（其系数均为$h_1, h_2, \ldots, h_n$的函数）和特征值，并通过与所希望特征值的特征多项式相比较，便可确定H矩阵。

$$\Delta = \left|\lambda I - (A - HC)\right|$$
$$H_{n\times 1} = [h_1, h_2, \cdots, h_n]^T$$

□带有状态观测器的状态反馈设计

分离定律：只要给定的系统能控且能观，状态反馈设计和状态观测器（重构）设计可各自独立进行。