

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

<http://wanghg.gr.xjtu.edu.cn>



信号的频域分析

连续周期信号的频域分析

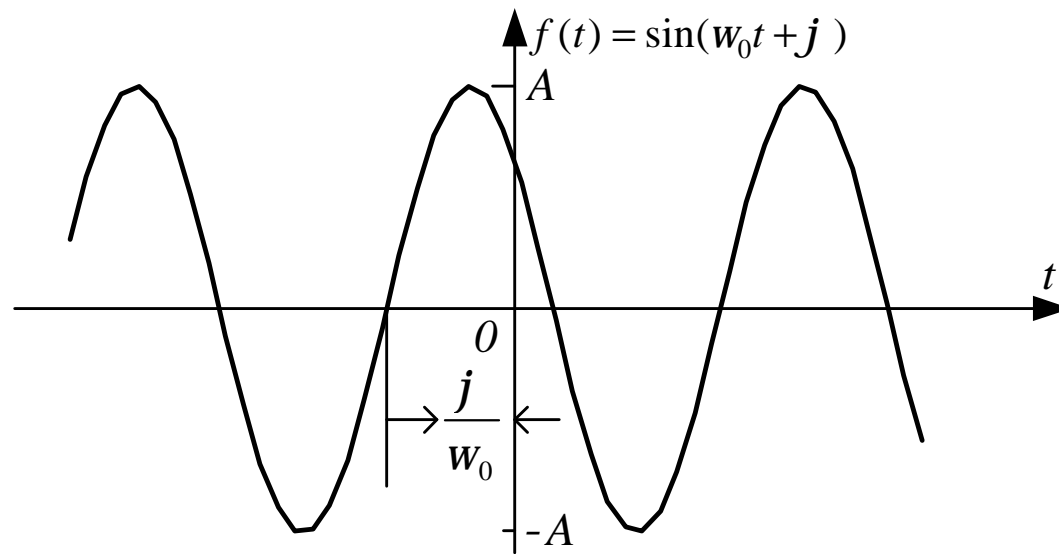
连续非周期信号的频谱

常见连续时间信号的频谱

连续时间Fourier变换的性质

离散周期信号的频域分析

离散非周期信号的频域分析



在时域无限长

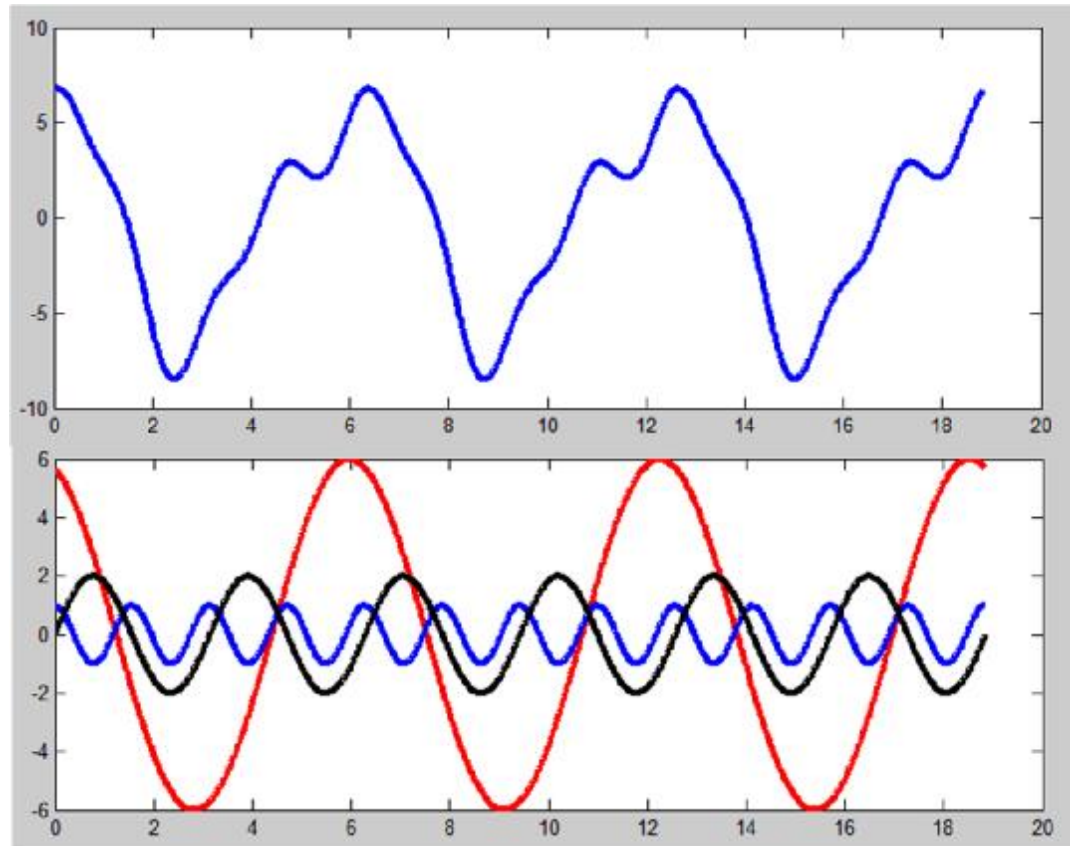
用三个参数就可以描述

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + j)$$

A : 振幅

ω_0 : 角频率

j : 初始相位



任何连续周期信号可以由一组适当的正弦曲线组合而成？

1807年提出

Joseph Fourier(1768-1830), 法国数学家/物理学家



信号分析

连续信号

时域：信号分解为冲激信号的线性组合

频域：信号分解为不同频率正弦信号的线性组合

复频域：信号分解为不同频率复指数的线性组合

抽样

离散信号

时域：信号分解为单位脉冲序列的线性组合

频域：信号分解为不同频率正弦序列的线性组合

复频域：信号分解为不同频率复指数的线性组合

连续周期信号的频域分析

将信号表示为不同频率正弦分量的线性组合

I 意义:

- ∅ 从信号分析的角度，将信号表示为不同频率正弦分量的线性组合，为不同信号之间进行比较提供了途径。
- ∅ 从系统分析角度，已知单频正弦信号激励下的响应，利用迭加特性可求得多个不同频率正弦信号同时激励下的总响应，而且每个正弦分量通过系统后的变化。

连续周期信号的频域分析



周期信号的傅里叶级数展开

傅里叶级数的基本性质

周期信号的频谱及其特点

周期信号的功率谱

一、周期信号的傅里叶级数展开

1. 指数形式傅里叶级数

连续时间周期信号可以用指数形式傅里叶级数表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$n = \pm 1$ 两项的基波频率为 f_0 ，两项合起来称为信号的基波分量

$n = \pm 2$ 的基波频率为 $2f_0$ ，两项合起来称为信号的2次谐波分量

$n = \pm N$ 的基波频率为 Nf_0 ，两项合起来称为信号的 N 次谐波分量

物理含义：

周期信号 $f(t)$ 可以分解为不同频率虚指数信号之和

一、周期信号的傅里叶级数展开

2. 三角形形式傅里叶级数

若 $f(t)$ 为实函数，则有 $C_n = C_{-n}^*$

利用这个性质可以将指数Fourier级数表示写为

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \right) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(C_n e^{jn\omega_0 t} \right) \end{aligned}$$

$$\text{令 } C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

由于 C_0 是实的，所以 $b_0 = 0$ ，故 $C_0 = \frac{a_0}{2}$

一、周期信号的傅里叶级数展开

2. 三角形式傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

其中： $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (n = 1, 2, \mathbf{L})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (n = 1, 2, \mathbf{L})$$

一、周期信号的傅里叶级数展开

3. 三角形式傅里叶级数

ü 纯余弦形式傅里叶级数

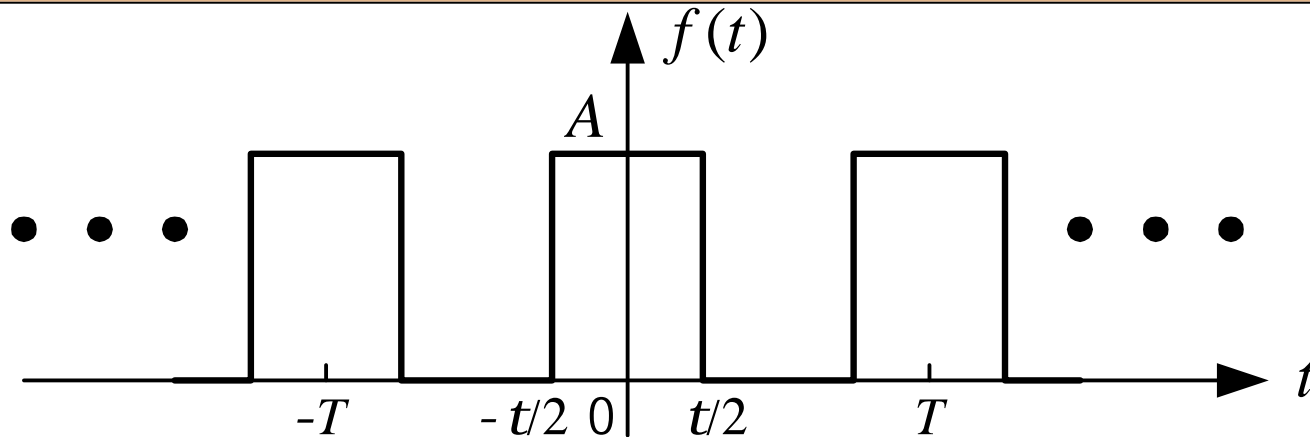
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + j_n)$$

其中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $j_n = \arctg\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

$a_0/2$ 称为信号的直流分量，

$A_n \cos(n\omega_0 t + j_n)$ 称为信号的 n 次谐波分量。

例1 试计算图示周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式。



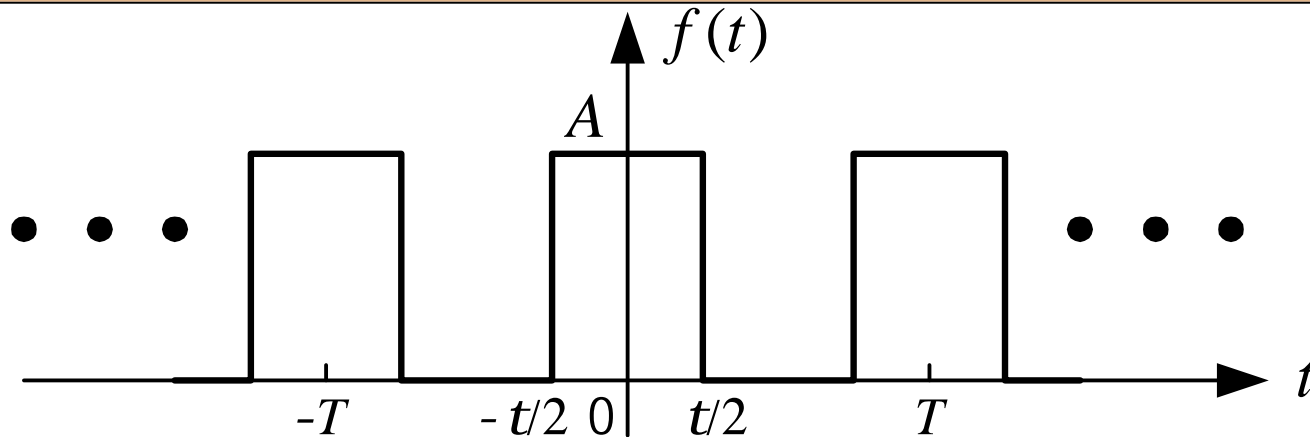
解:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{At}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right)$$

因此, $f(t)$ 的指数形式傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{At}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

例1 试计算图示周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式。



解:

$$\text{由 } f(t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(C_n e^{jn\omega_0 t})$$

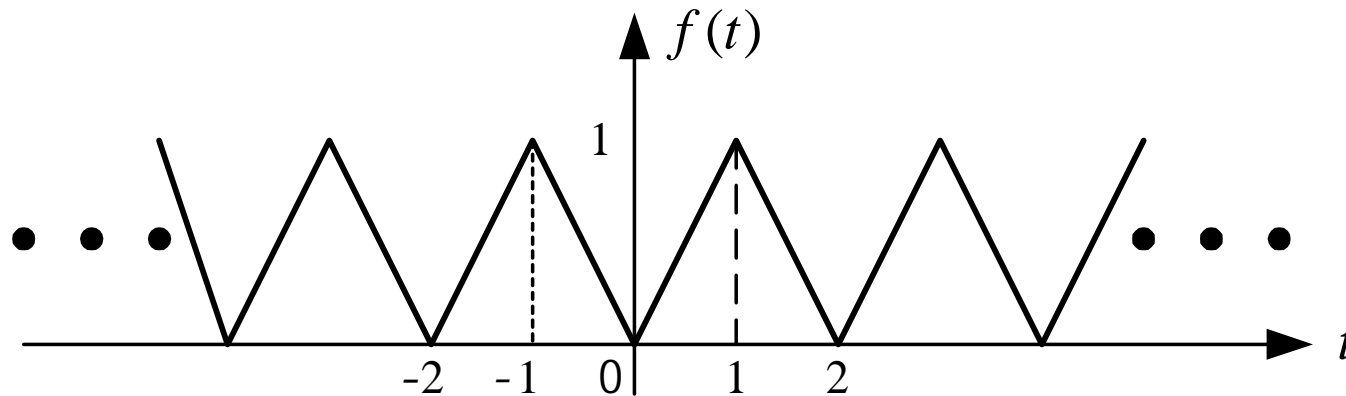
可得, $f(t)$ 的三角形式傅里叶级数展开式为

$$f(t) = (tA/T) + \sum_{n=1}^{\infty} (2tA/T) \text{Sa}(n\omega_0 t / 2) \cos(n\omega_0 t)$$

若 $t = T/2$, 则有

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \mathbf{L} \right) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

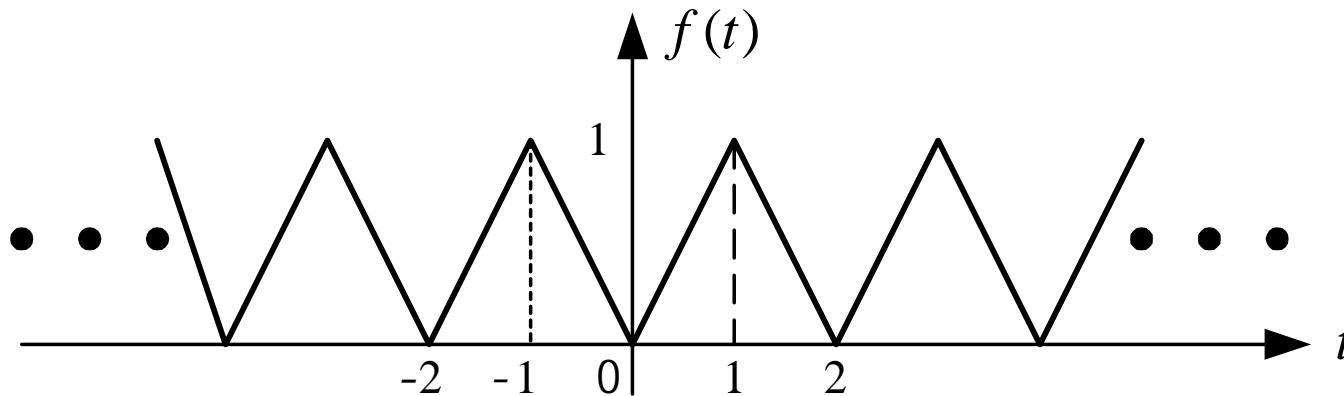
例2 试计算图示周期三角脉冲信号的傅里叶级数展开式。



解:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 -te^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^1 te^{-jn\omega_0 t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2jn\omega_0} \left(te^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^{-jn\omega_0 t} dt - te^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi
 \end{aligned}$$

例2 试计算图示周期三角脉冲信号的傅里叶级数展开式。



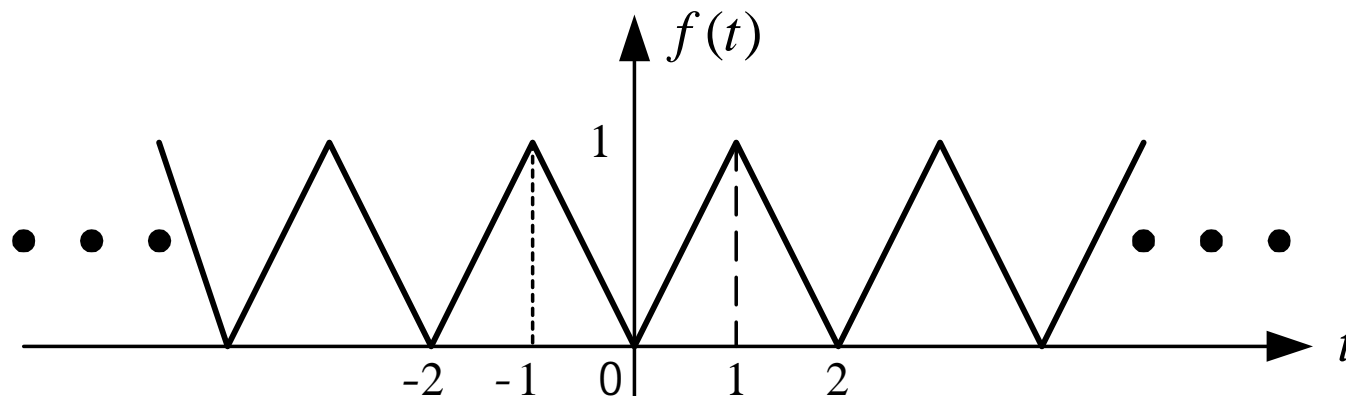
解:

$$C_n = \frac{1}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -2/(n\pi)^2, & n \text{ 为奇数} \\ 1/2, & n = 0 \end{cases}$$

周期三角脉冲信号的指数形式傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{[(2m-1)\pi]^2} e^{j(2m-1)\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

例2 试计算图示周期三角脉冲信号的傅里叶级数展开式。



解:

由
$$f(t) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(C_n e^{jn\omega_0 t})$$

周期三角脉冲信号的三角形式傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{[(2m-1)\pi]^2} \cos n\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \omega_0 t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\omega_0 t - \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\omega_0 t - \mathbf{L}$$


例3 $f(t) = 3 \cos(\omega_0 t + 4)$ 求 C_n 。

解: $f(t) = 3 \cos(\omega_0 t + 4)$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega_0 t + 4)} + e^{-j(\omega_0 t + 4)} \right)$$

$$= \frac{3}{2} e^{j4} e^{j\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j4} e^{-j\omega_0 t}$$

根据指数形式傅里叶级数的定义可得

$$C_1 = \frac{3}{2} e^{j4}, \quad C_{-1} = \frac{3}{2} e^{-j4}, \quad C_n = 0, \quad n \neq \pm 1$$


一、周期信号的傅里叶级数展开

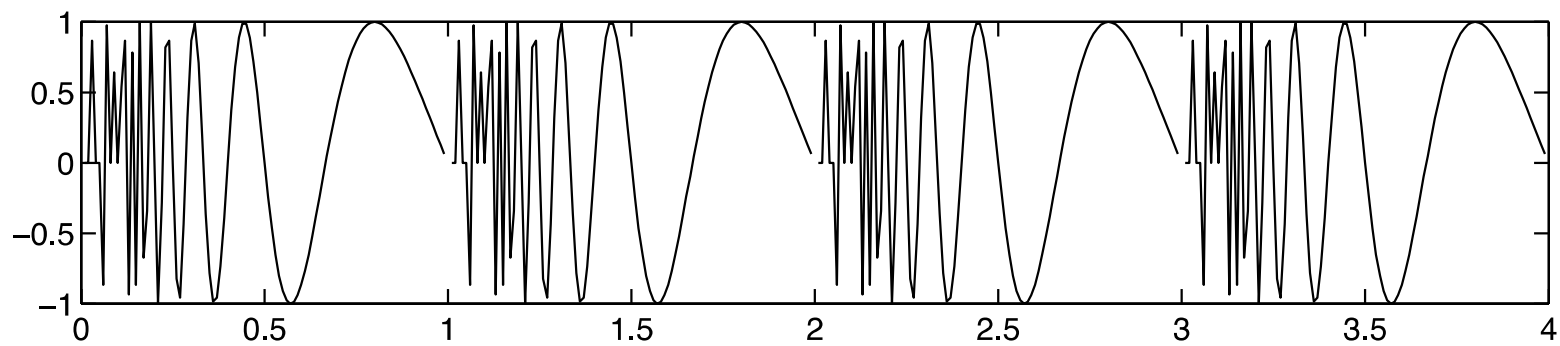
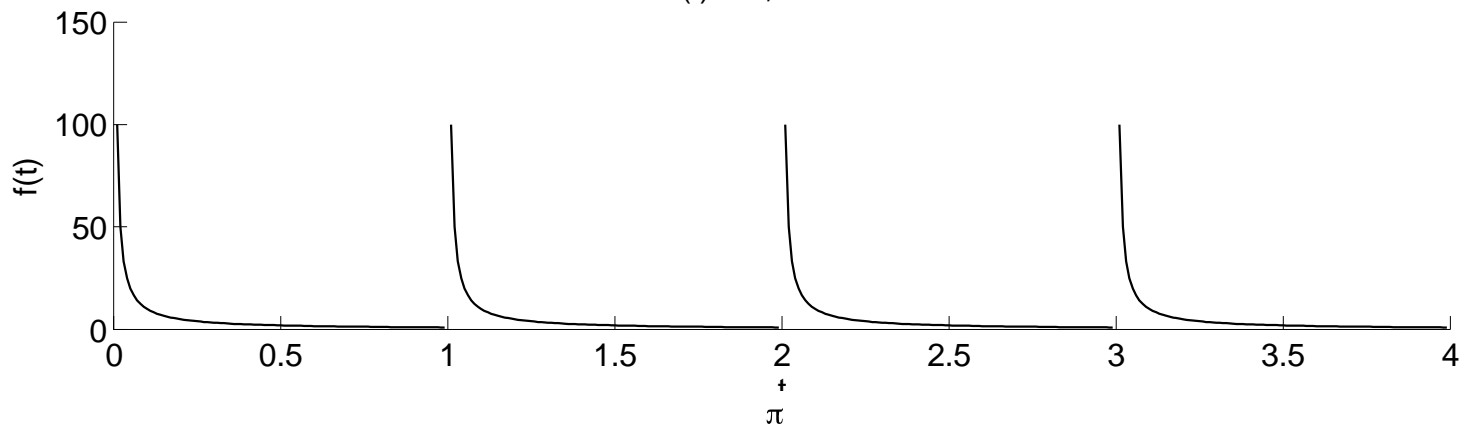
3. 周期信号展开为傅里叶级数条件

周期信号 $f(t)$ 应满足Dirichlet条件，即：

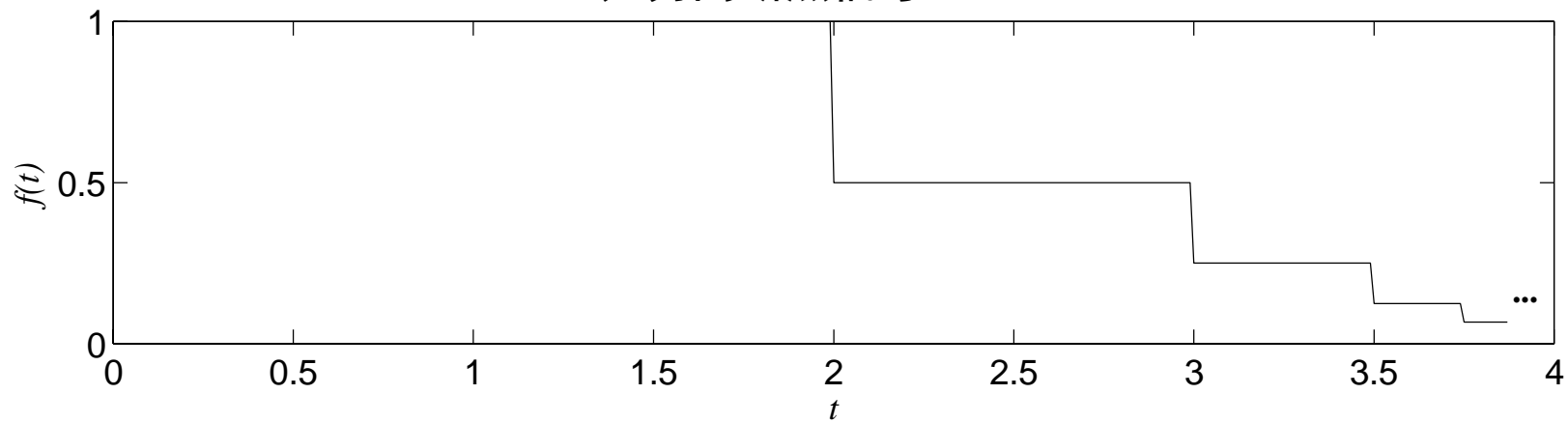
- (1) 在一个周期内绝对可积，即满足 $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$
- (2) 在一个周期内只有有限个有限的不连续点；
- (3) 在一个周期内只有有限个极大值和极小值。

注意：条件（1）为充分条件但不是必要条件；
条件（2）（3）是必要条件但不是充分条件。

$$f(t) = 1/t, \quad 0 < t \leq 1$$



无穷间断点信号



二、傅里叶级数的基本性质

∅ 线性特性

$$\text{若 } f_1(t) \rightarrow C_{1n}, \quad f_2(t) \rightarrow C_{2n}$$

$$\text{则有 } a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t) \rightarrow a_1 \cdot C_{1n} + a_2 \cdot C_{2n}$$

∅ 时移特性

$$\text{若 } f(t) \rightarrow C_n$$

$$\text{则有 } f(t - t_0) \rightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} C_n$$

二、傅里叶级数的基本性质

∅ 卷积性质

若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均是周期为 T_0 的周期信号，且

$$f_1(t) \rightarrow C_{1n}, \quad f_2(t) \rightarrow C_{2n}$$

则有 $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow T_0 C_{1n} \cdot C_{2n}$

∅ 微分特性

若 $f(t) \rightarrow C_n$

则有 $f'(t) \rightarrow jn\omega_0 C_n$

二、傅里叶级数的基本性质

∅ 对称特性

(1) 若 $f(t)$ 为实信号

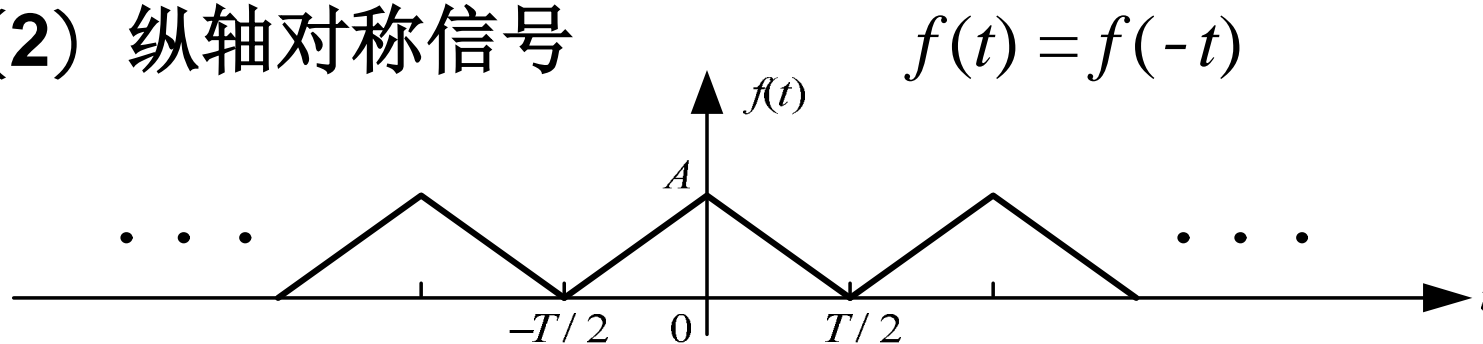
$$\text{则 } |C_n| = |C_{-n}|$$

$$j_n = -j_{-n}$$

二、傅里叶级数的基本性质

Ø 对称特性

(2) 纵轴对称信号



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

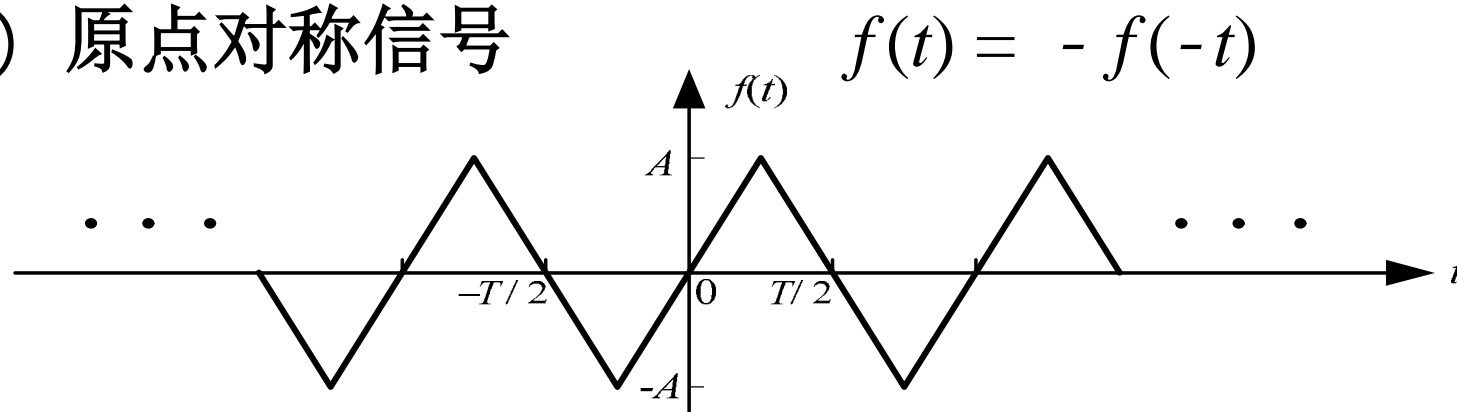
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

纵轴对称周期信号其傅里叶级数展开式中只含有直流项与余弦项。

二、傅里叶级数的基本性质

Ø 对称特性

(3) 原点对称信号



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

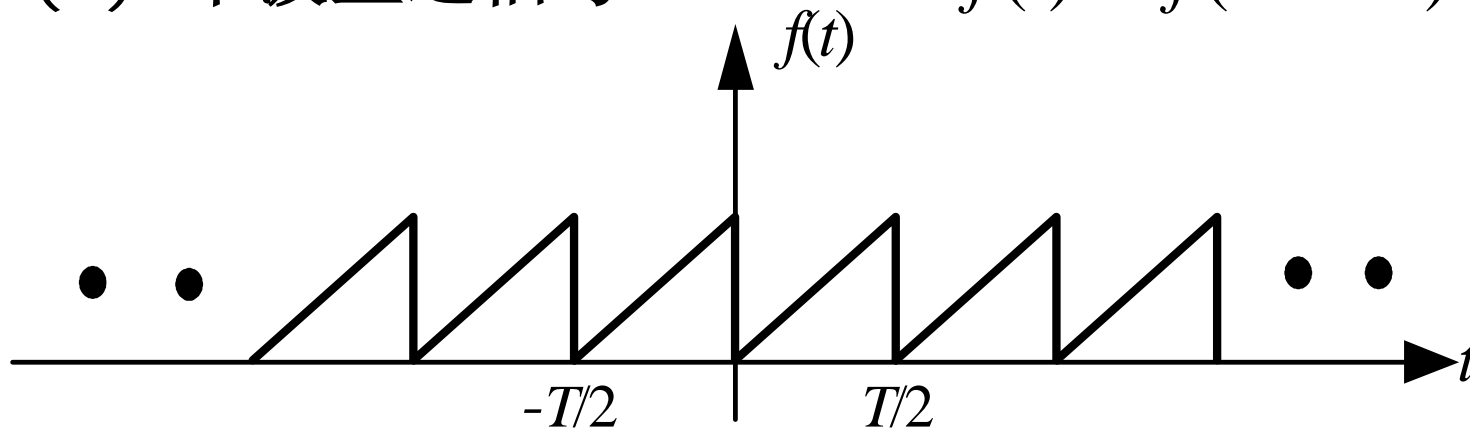
原点对称周期信号其傅里叶级数展开式中只含有正弦项。

二、傅里叶级数的基本性质

∅ 对称特性

(4) 半波重迭信号

$$f(t) = f(t \pm T/2)$$

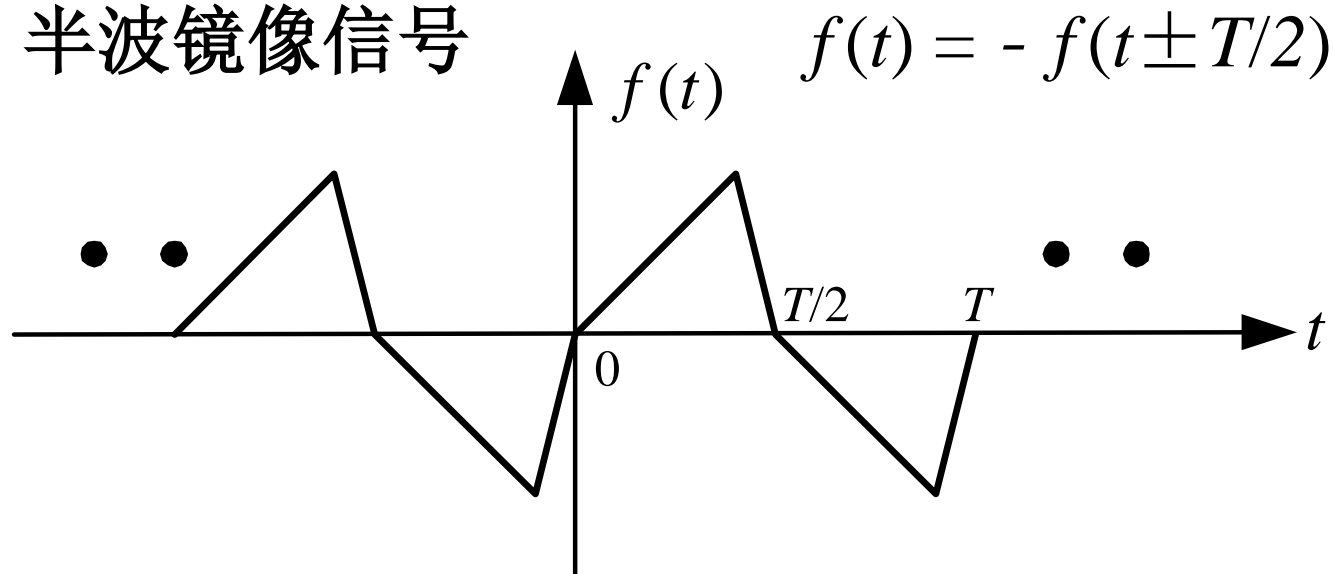


半波重叠周期信号只含有正弦与余弦的偶次谐波分量，而无奇次谐波分量。

二、傅里叶级数的基本性质

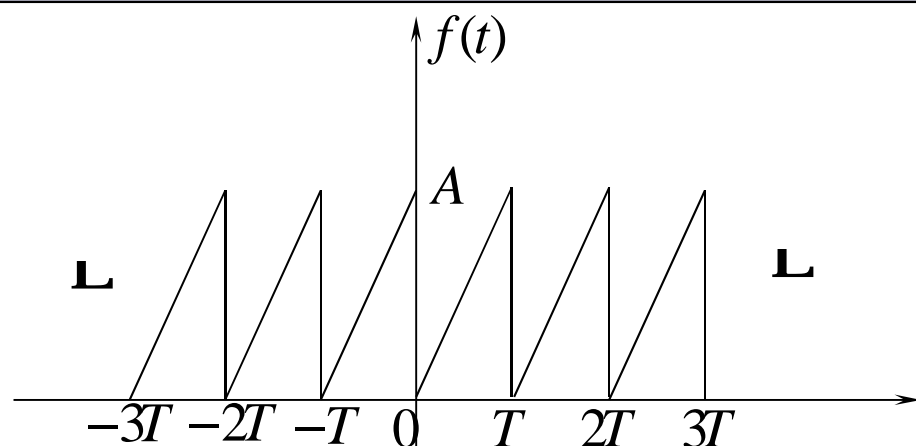
∅ 对称特性

(5) 半波镜像信号



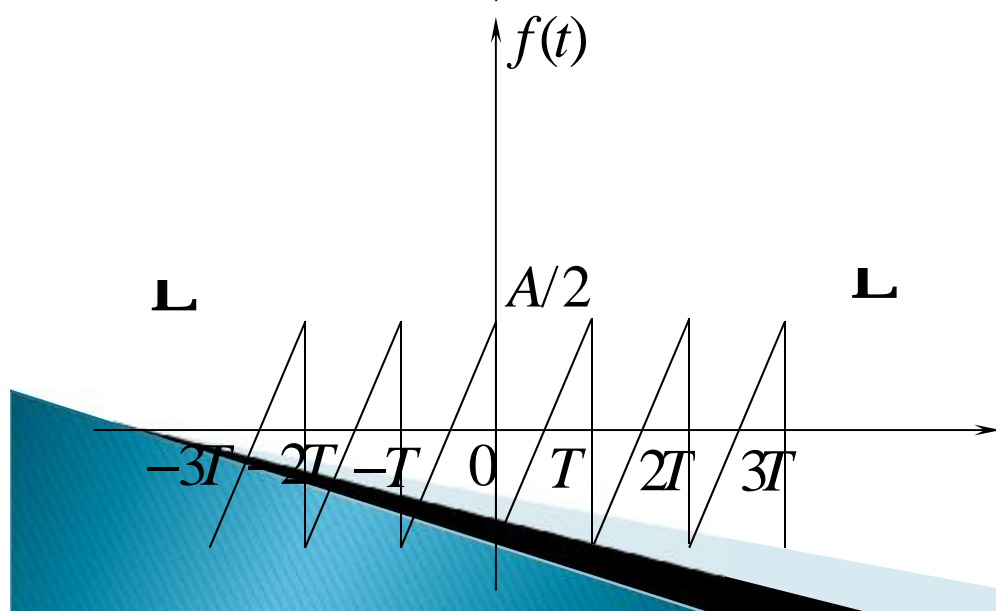
半波镜像周期信号只含有正弦与余弦的奇次谐波分量，而无直流分量与偶次谐波分量。

说明：某些信号波形经上下或左右平移后，才呈现出某种对称特性



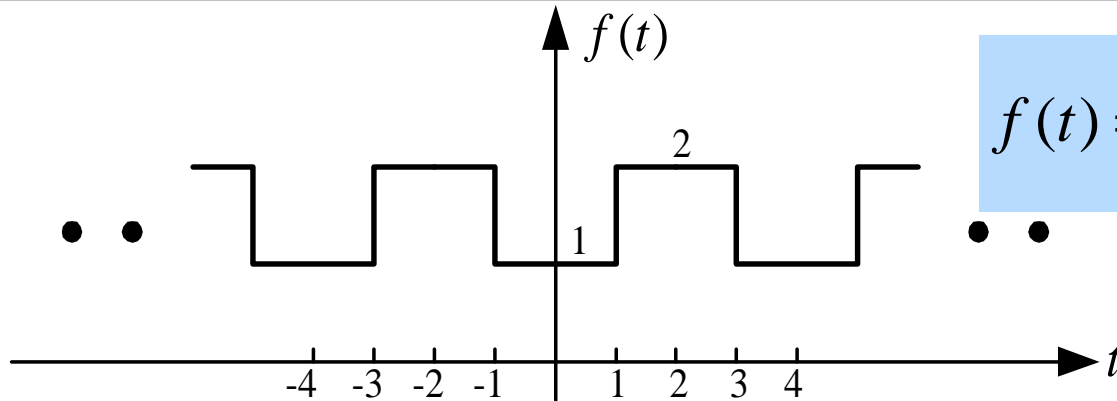
去掉直流分量后，

信号呈奇对称，只含有正弦各次谐波分量。

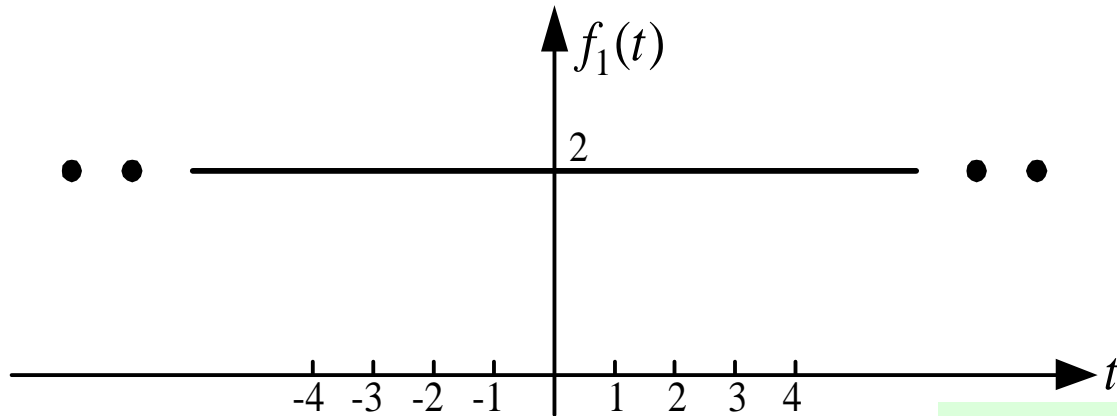


因此该信号含有正弦各次谐波分量，直流分量。

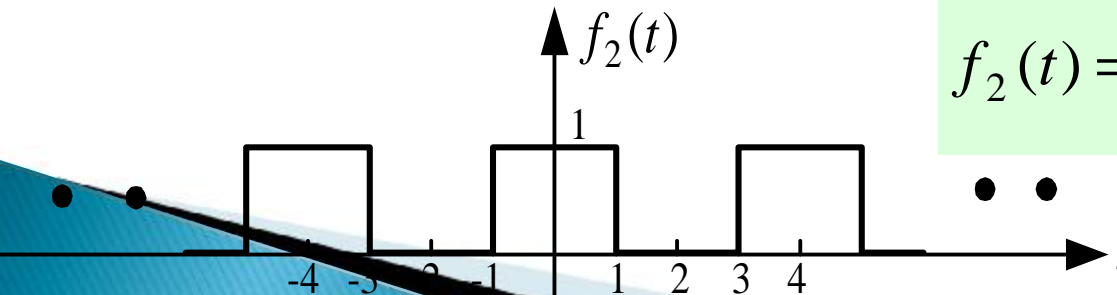
例4 求图示周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数



$$f(t) = 1.5 - \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

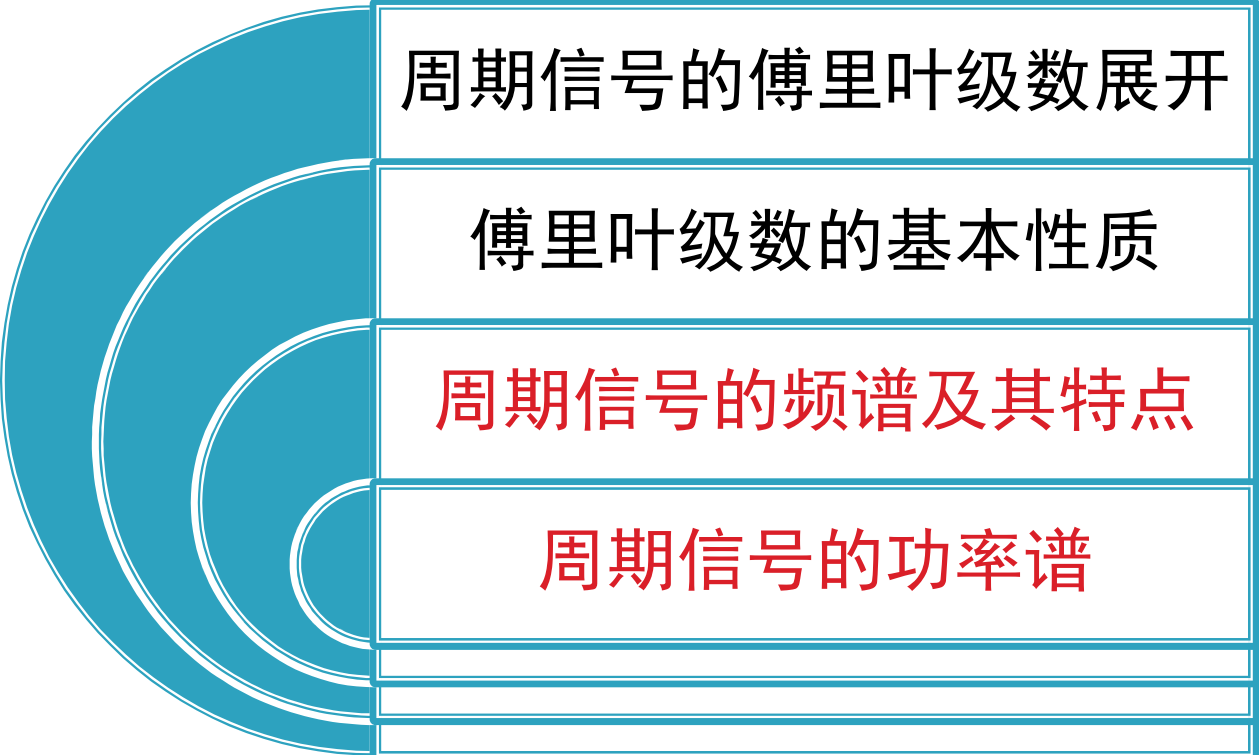


$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$



$$f_2(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

连续周期信号的频域分析



周期信号的傅里叶级数展开

傅里叶级数的基本性质

周期信号的频谱及其特点

周期信号的功率谱

三、周期信号的频谱及其特点

1. 频谱的概念

周期信号 $f(t)$ 可以分解为不同频率虚指数信号之和



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$



不同的时域信号，只是傅里叶级数的系数 C_n 不同，因此通过研究傅里叶级数的系数来研究信号的特性。

C_n 是频率的函数，它反映了组成信号各次谐波的幅度和相位随频率变化的规律，称频谱函数。

三、周期信号的频谱及其特点

2. 频谱的表示

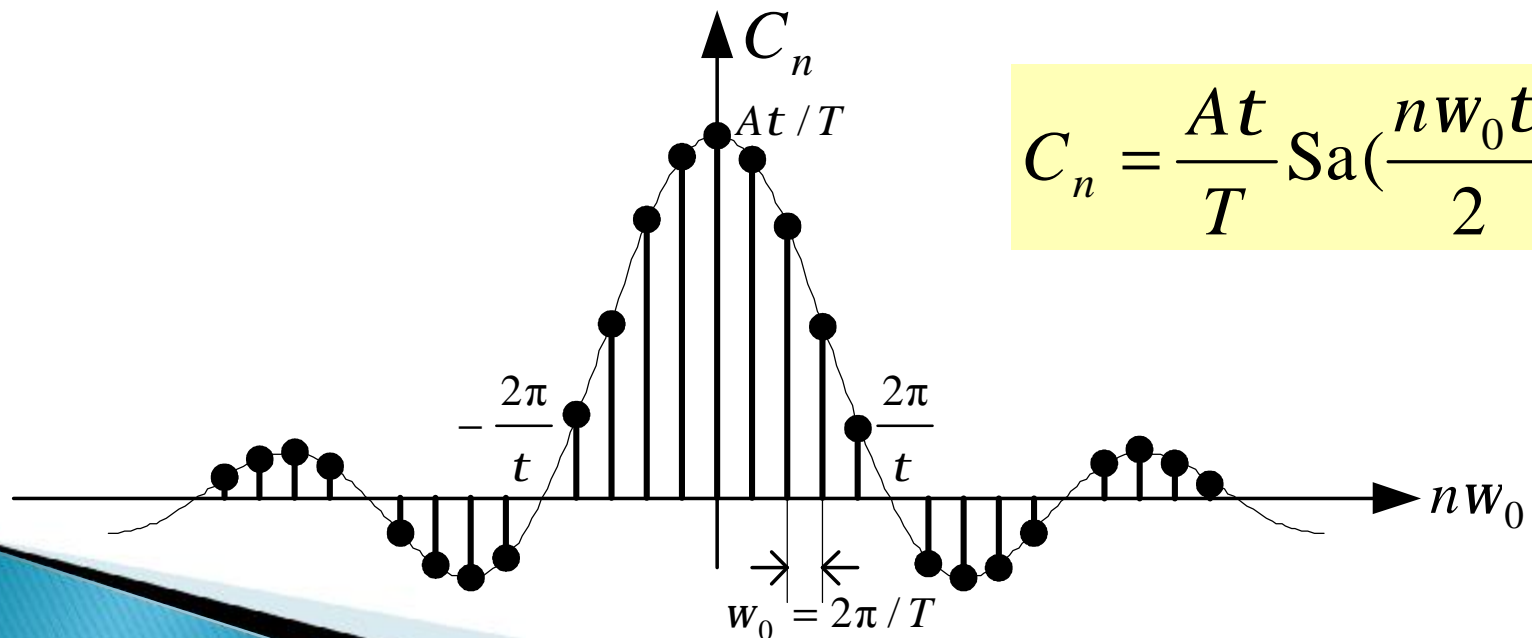
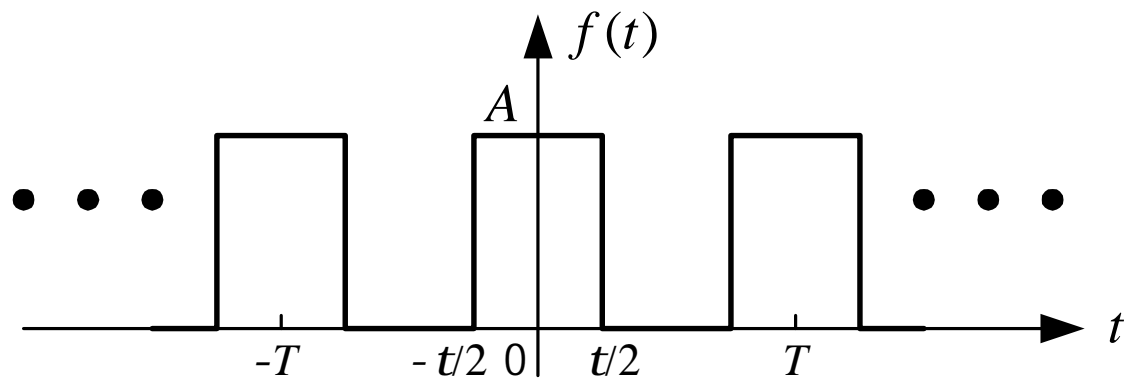
直接画出信号各次谐波对应的 C_n 线状分布图形，这种图形称为信号的**频谱图**。

$$C_n = |C_n| e^{j f_n}$$

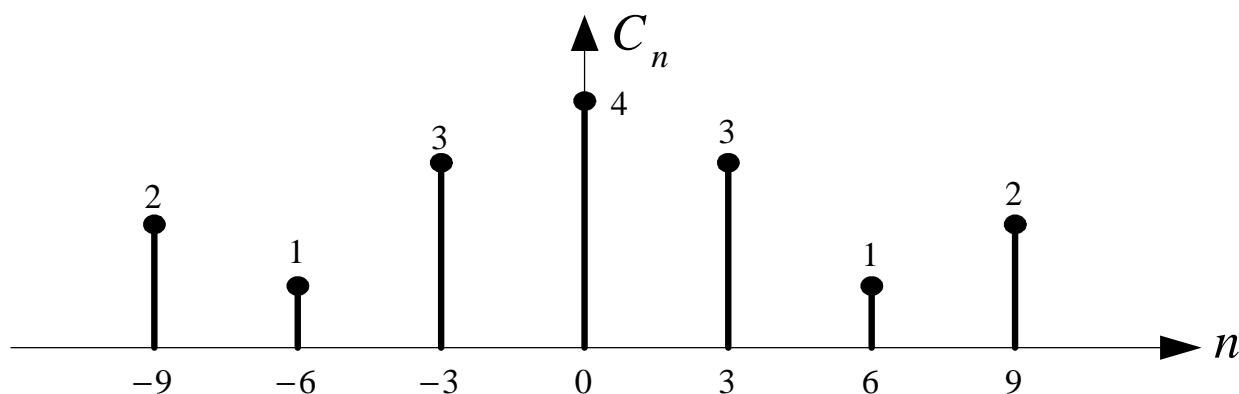
幅度频谱

相位频谱

例1 周期矩形脉冲信号的频谱图



例2 已知连续周期信号的频谱如图，试写出信号的Fourier级数表示式。



解： 由图可知 $C_0 = 4$ $C_{\pm 1} = 3$ $C_{\pm 2} = 1$ $C_{\pm 3} = 2$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= 4 + 3(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + (e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}) + 2(e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}) \\ &= 4 + 6\cos(\omega_0 t) + 2\cos(2\omega_0 t) + 4\cos(3\omega_0 t) \end{aligned}$$

三、周期信号的频谱及其特点

3. 频谱的特性

(1) 离散频谱特性

周期信号的频谱是由间隔为 ω_0 的谱线组成的。

信号周期 T 越大， ω_0 就越小，则谱线越密。
反之， T 越小， ω_0 越大，谱线则越疏。

三、周期信号的频谱及其特点

3. 频谱的特性

(2) 幅度衰减特性

- ü 周期信号的幅度频谱 $|C_n|$ 随着谐波 $n\omega_0$ 增大时，不断衰减，并最终趋于零。
- ü 若信号时域波形变化越平缓，高次谐波成分就越少，幅度频谱衰减越快；若信号时域波形变化跳变越多，高次谐波成分就越多，幅度频谱衰减越慢。

$f(t)$ 不连续时， C_n 按 $1/n$ 的速度衰减

$f'(t)$ 不连续时， C_n 按 $1/n^2$ 的速度衰减

三、周期信号的频谱及其特点

3. 频谱的特性

(3) 信号的有效带宽

| $0 \sim 2\pi / t$ 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的有效频带宽度, 即

$$W_B = \frac{2\pi}{t}$$

信号的有效带宽与信号时域的持续时间 t 成反比。
即 t 越大, 其 w_B 越小; 反之, t 越小, 其 w_B 越大。

三、周期信号的频谱及其特点

3. 频谱的特性

(3) 信号的有效带宽

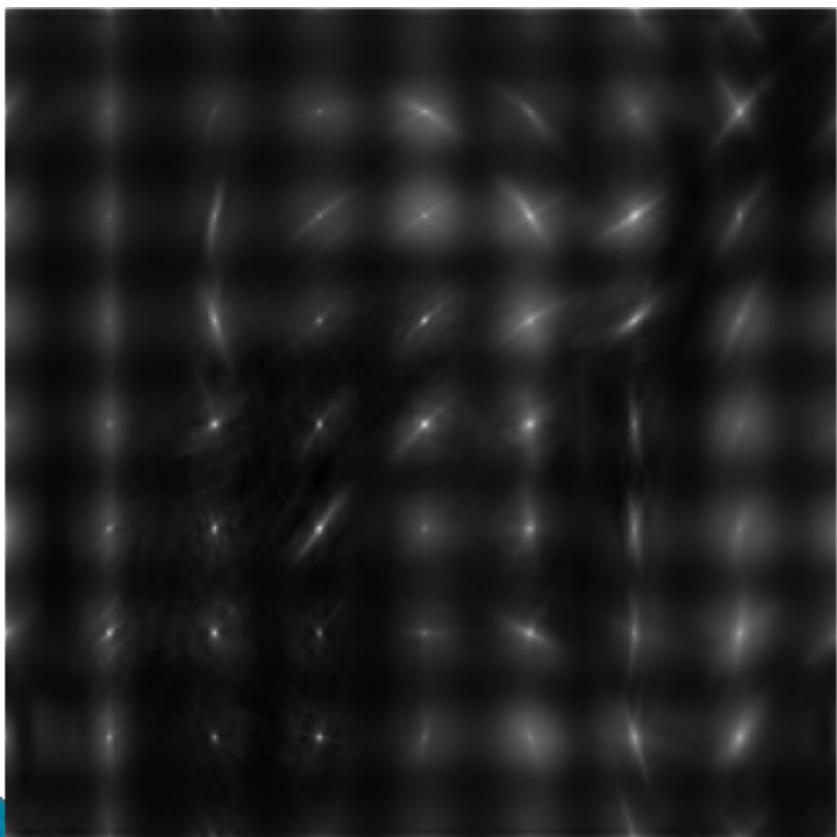
信号的有效带宽有多种定义方式。

物理意义：在信号的有效带宽内，集中了信号绝大部分谐波分量。若信号丢失有效带宽以外的谐波成分，不会对信号产生明显影响。

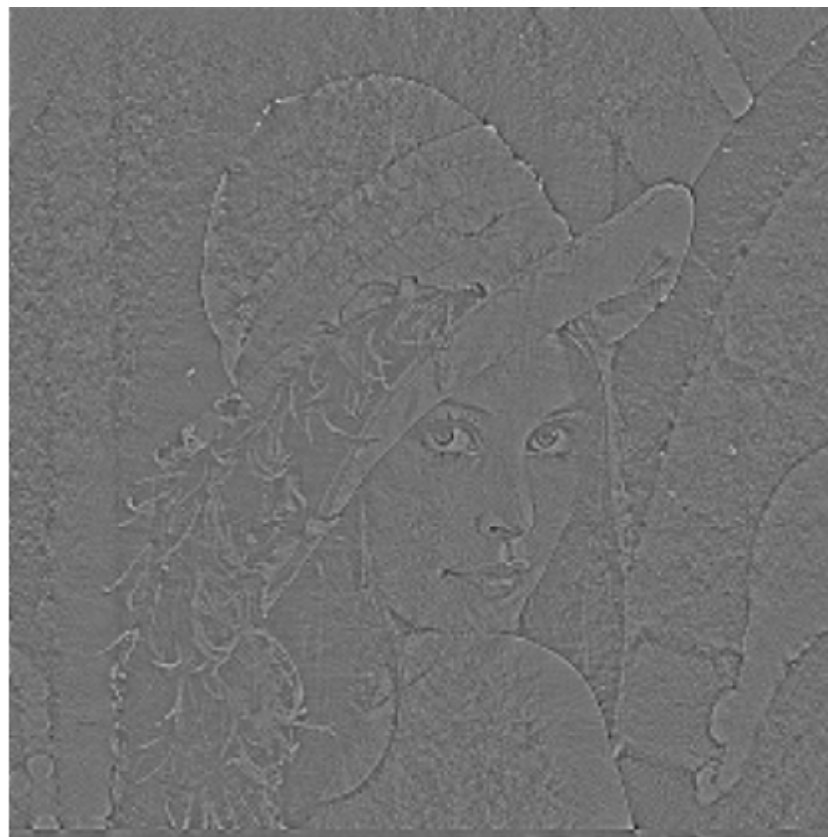
说明：当信号通过系统时，信号与系统的有效带宽必须“匹配”

三、周期信号的频谱及其特点

4. 相位谱的作用



幅频不变，零相位



幅频为常数，相位不变

四、周期信号的功率谱

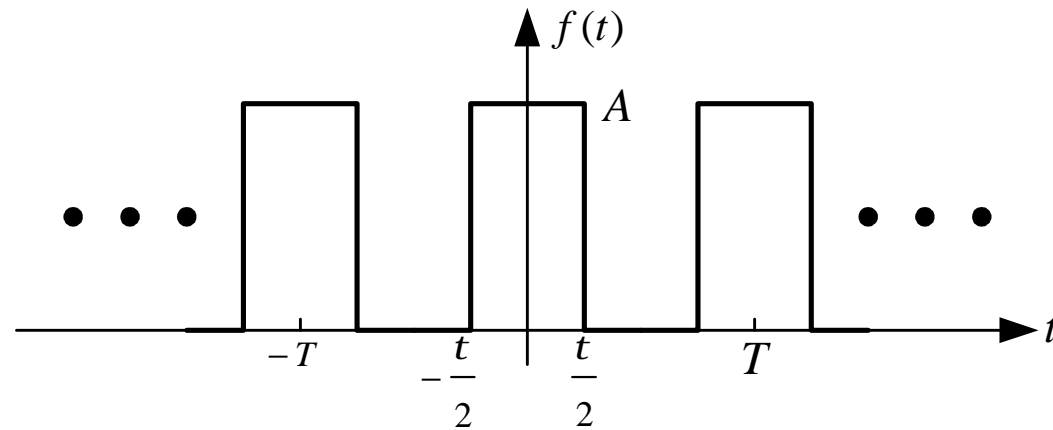
帕什瓦尔 (Parseval) 功率守恒定理

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

l 物理意义：任意周期信号的平均功率等于信号所包含的直流、基波以及各次谐波的平均功率之和。

n 周期信号的功率频谱： $|C_n|^2$ 随 $n\omega_0$ 分布情况称为周期信号的功率频谱，简称**功率谱**。

例3 试求周期矩形脉冲信号在其有效带宽($0 \sim 2\pi/t$)内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。其中 $A=1$, $T=1/4$, $t=1/20$ 。



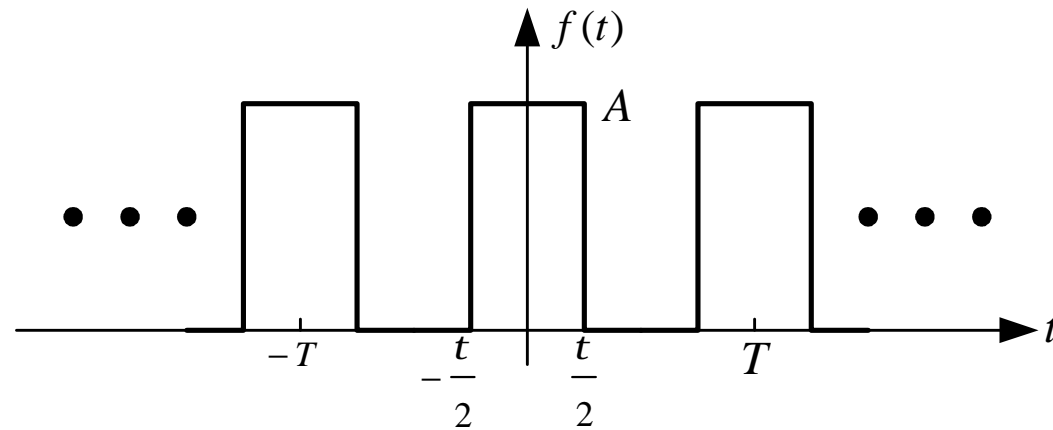
解： 周期矩形脉冲的傅里叶系数为

$$C_n = \frac{At}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right)$$

将 $A=1$, $T=1/4$, $t=1/20$, $\omega_0=2\pi/T=8\pi$ 代入上式

$$C_n = 0.2 \text{Sa}(n\omega_0 / 40) = 0.2 \text{Sa}(n\pi / 5)$$

例3 试求周期矩形脉冲信号在其有效带宽($0 \sim 2\pi / t$)内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。其中 $A=1$, $T=1/4$, $t=1/20$ 。



解: 信号的平均功率为
$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = 0.2$$

包含在有效带宽($0 \sim 2\pi / t$)内的各谐波平均功率为

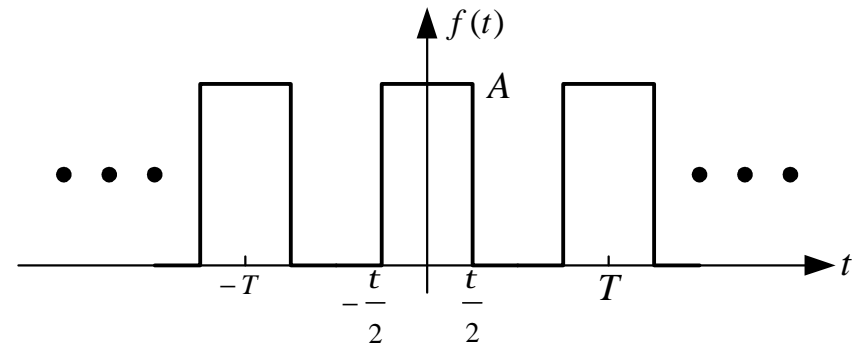
$$P_1 = \sum_{n=-4}^4 |C_n|^2 = C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^4 |C_n|^2 = 0.1806$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{0.1806}{0.200} = 90\%$$

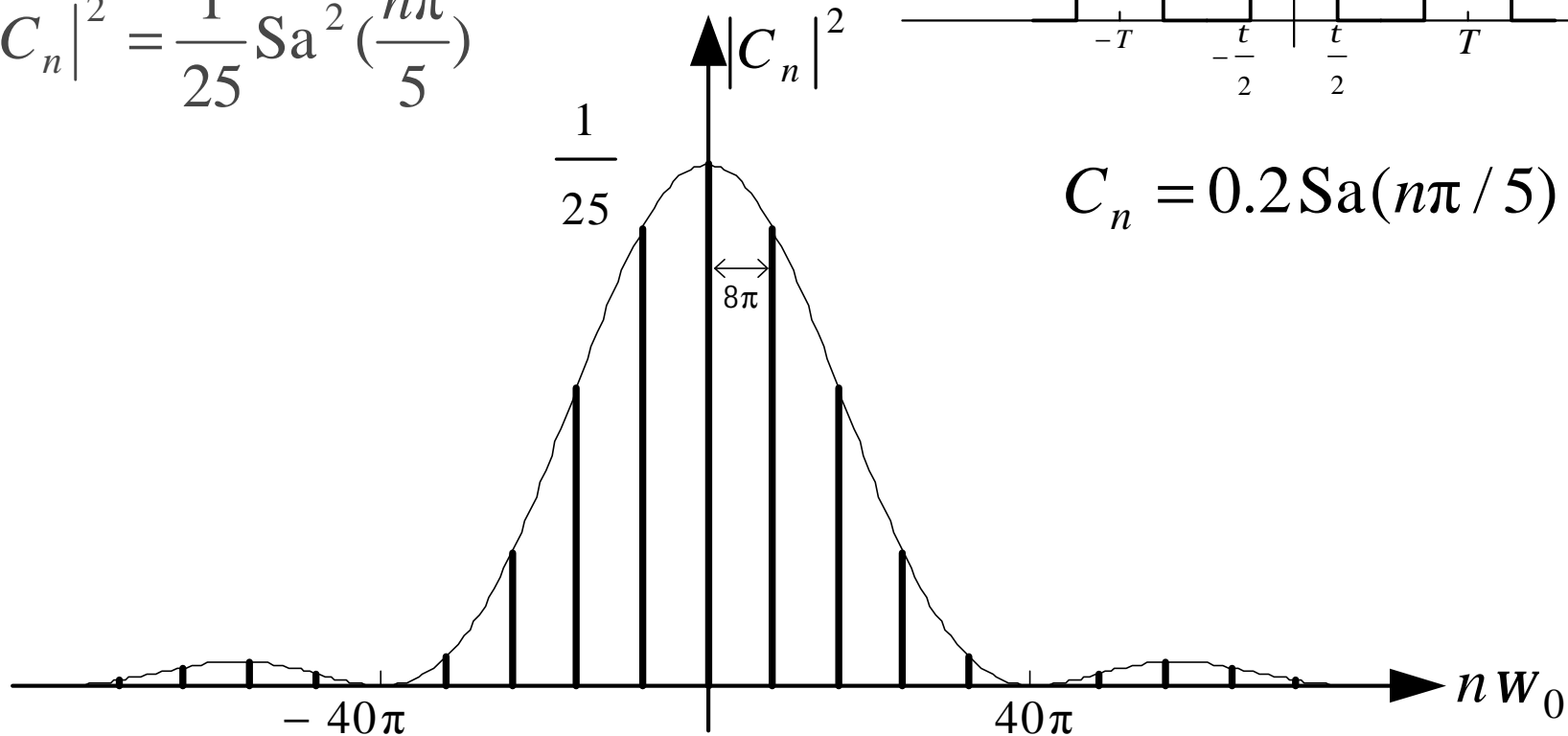
例3 试求周期矩形脉冲信号在其有效带宽($0 \sim 2\pi t$)内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。其中 $A=1$, $T=1/4$, $t=1/20$ 。

周期信号的功率谱

$$|C_n|^2 = \frac{1}{25} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$



$$C_n = 0.2 \text{Sa}(n\pi/5)$$



例4 $f(t) = 2e^{-j2\omega_0 t} + 3e^{-j\omega_0 t} + 4 + 3e^{j\omega_0 t} + 2e^{j2\omega_0 t}$
求 $f(t)$ 的功率。

解: 1)
$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$C_0 = 4 \quad C_{\pm 1} = 3 \quad C_{\pm 2} = 2$$

$$P = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 = 42$$

2) $f(t) = 4 + 6 \cos \omega_0 t + 4 \cos 2\omega_0 t$

$$P = 4^2 + \frac{1}{2} \times 6^2 + \frac{1}{2} \times 4^2 = 42$$

吉伯斯（Gibbs）现象

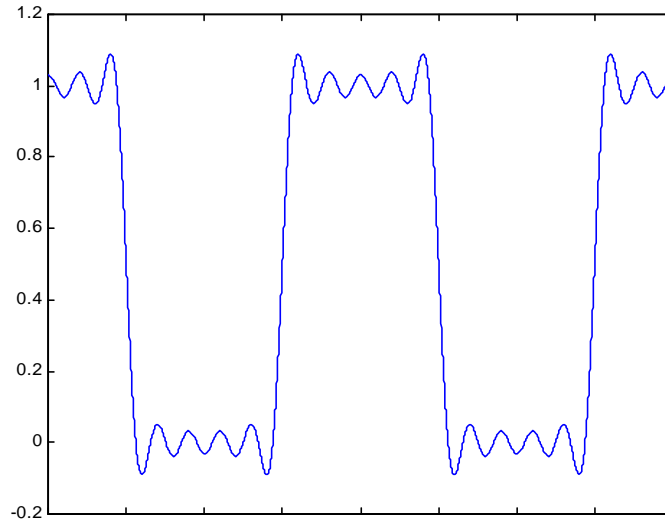
用有限次谐波分量来近似原信号，在不连续点出现过冲，过冲峰值不随谐波分量增加而减少，且为跳变值的9%。

吉伯斯现象产生原因

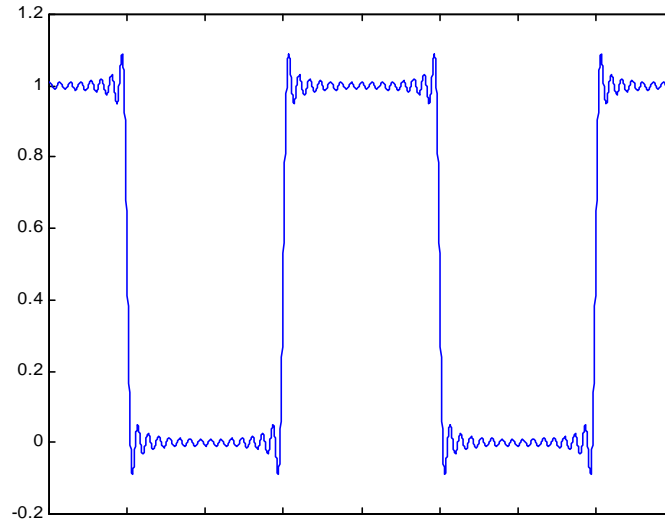
时间信号存在跳变破坏了信号的收敛性，使得在间断点傅里叶级数出现非一致收敛。

吉伯斯 (Gibbs) 现象

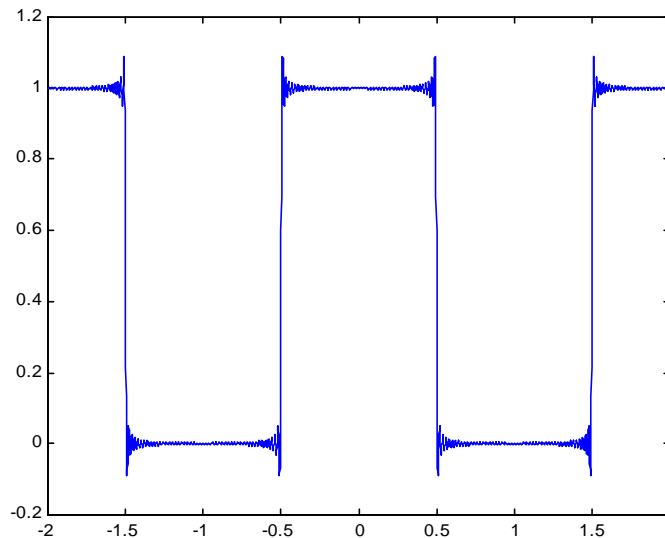
$N=5$



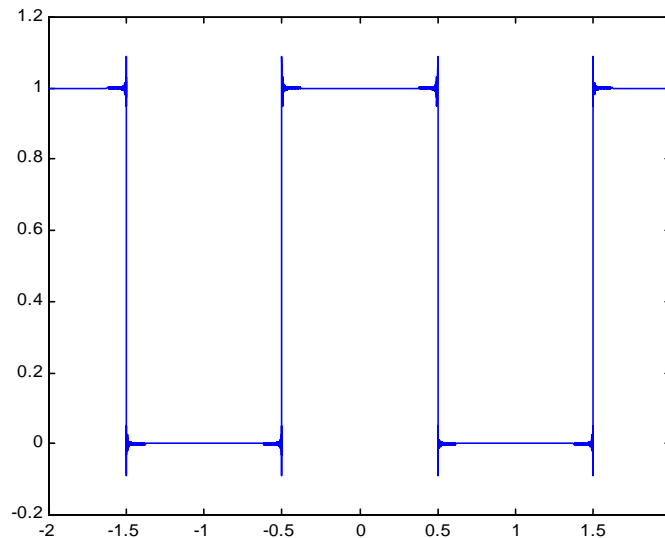
$N=15$



$N=50$



$N=500$



周期信号的频谱分析小结

- ❖ 分析问题使用的数学工具为傅里叶级数
- ❖ 最重要概念：频谱函数
- ❖ 要点
 1. 频谱的定义、物理意义
 2. 频谱的特点
 3. 频谱的性质，应用性质分析复杂信号的频谱
 4. 功率谱的概念及在工程中的应用

课后作业：

P142:

4-1: (b)、(c)

4-2

4-3: (3)

4-7

4-8