信号与系统

梁志虎 王洪广
lzh@mail.xjtu.edu.cn
http://lzh.gr.xjtu.edu.cn

信号的频域分析

- 连续周期信号的频域分析
- 离散周期信号的频域分析
- 连续非周期信号的频谱
- 常见连续时间信号的频谱
- 连续时间Fourier变换的性质
- 离散非周期信号的频域分析

离散Fourier级数（DFS）

- DFS的定义
- 常用离散周期序列的频谱分析
  - 周期单位脉冲序列$d_N[k]$
  - 正弦型序列
  - 周期矩形波序列
- DFS的性质

一、DFS的定义

- **DFS**

$$F[m] = \mathrm{DFS}(f[k]) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] W_N^{mk}$$

- **IDFS**

$$f[k] = \mathrm{IDFS}(F[m]) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F[m] W_N^{-mk}$$

式中 $W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$

一、DFS的定义

n DFS的物理含义

周期为N的任意序列可分解为基本序列 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mk}$ 的和

$$f[k]=\mathrm{IDFS}(F[m])=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}F[m]e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mk}$$

$$f[k]\xleftrightarrow{\text{一一对应}}F[m]$$

二、常用离散周期序列的频谱分析

1. 周期单位脉冲序列$d_N[k]$

$$F[m] = \mathrm{DFS}\{d_N[k]\} = \sum_{k=0}^{N-1} d_N[k] W_N^{mk} \quad = 1$$

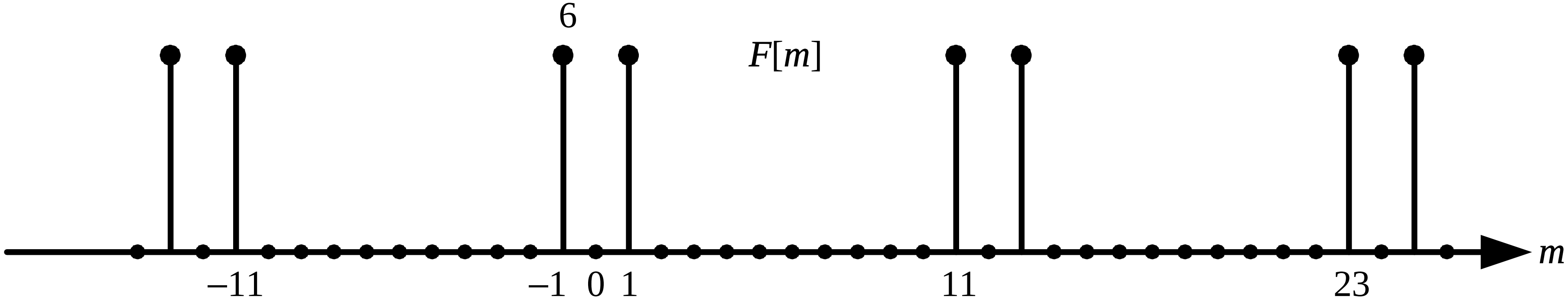
二、常用离散周期序列的频谱分析

2. 正弦型序列

周期序列 $f[k] = \cos(\pi k/6)$ 的频谱　　$N=12$

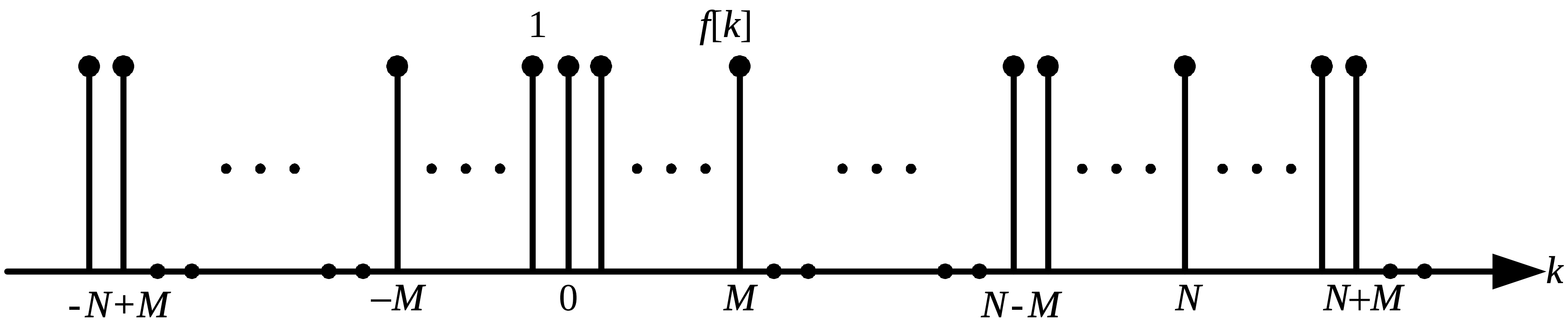
$$f[k]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{12}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{12}}=\frac{1}{12}\left(6W_{12}^{k}+6W_{12}^{-k}\right)$$

$$F[m]=\begin{cases}6 & m=\pm1\\ 0 & -5\le m\le 6, m\ne\pm1\end{cases}\qquad F[m]=\begin{cases}6 & m=1,11\\ 0 & 2\le m\le 10, m=0\end{cases}$$



二、常用离散周期序列的频谱分析

3. 周期矩形波序列

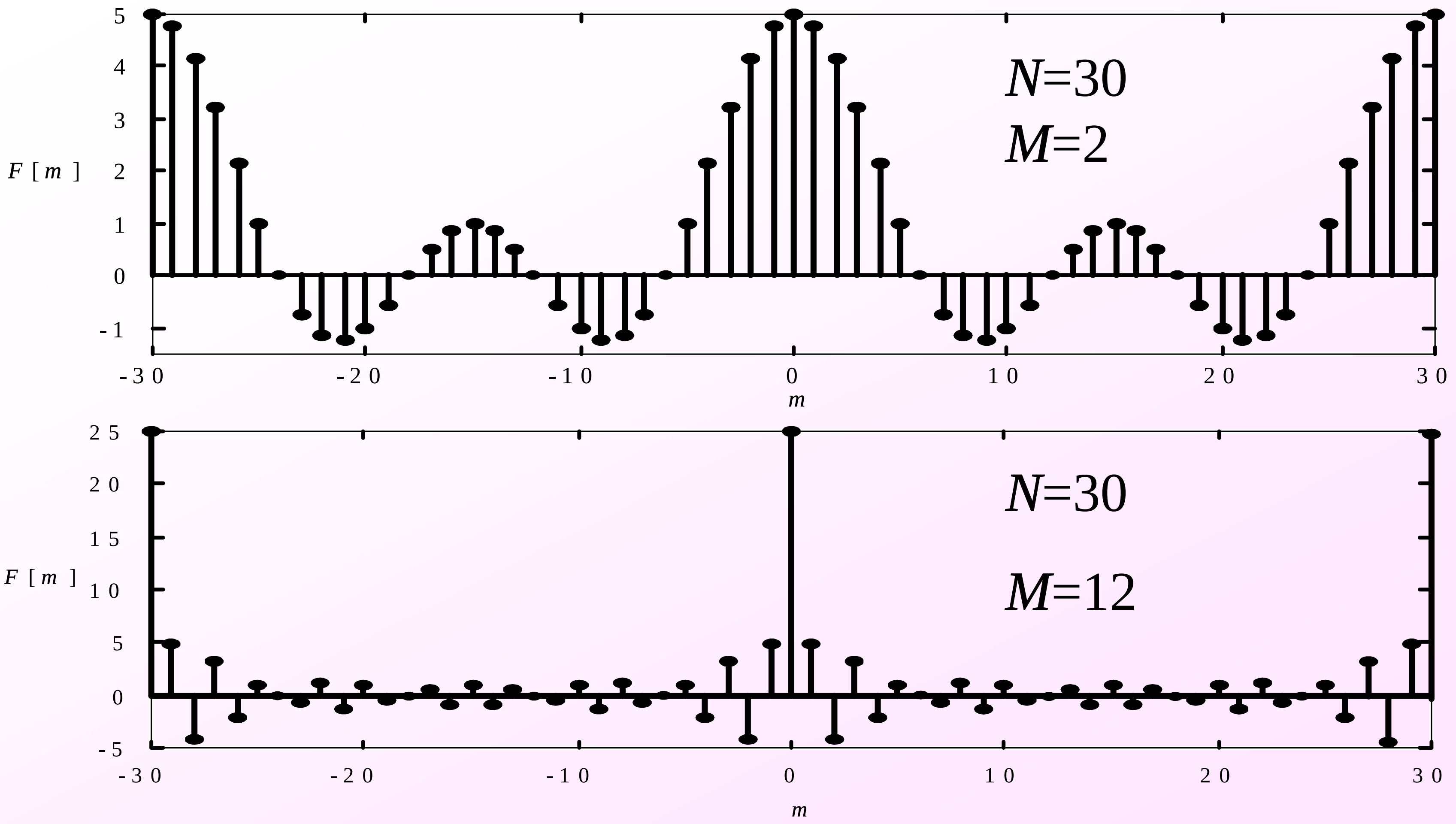


$$F[m]=\sum_{k=-M}^{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mM}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}m(M+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}m}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{N}(2M+1)\right)}{\sin\left(\frac{\pi m}{N}\right)}$$

当$m=0, \pm N, \pm 2N, \ldots$时有 $F[m]=2M+1$

二、常用离散周期序列的频谱分析

3．周期矩形波序列



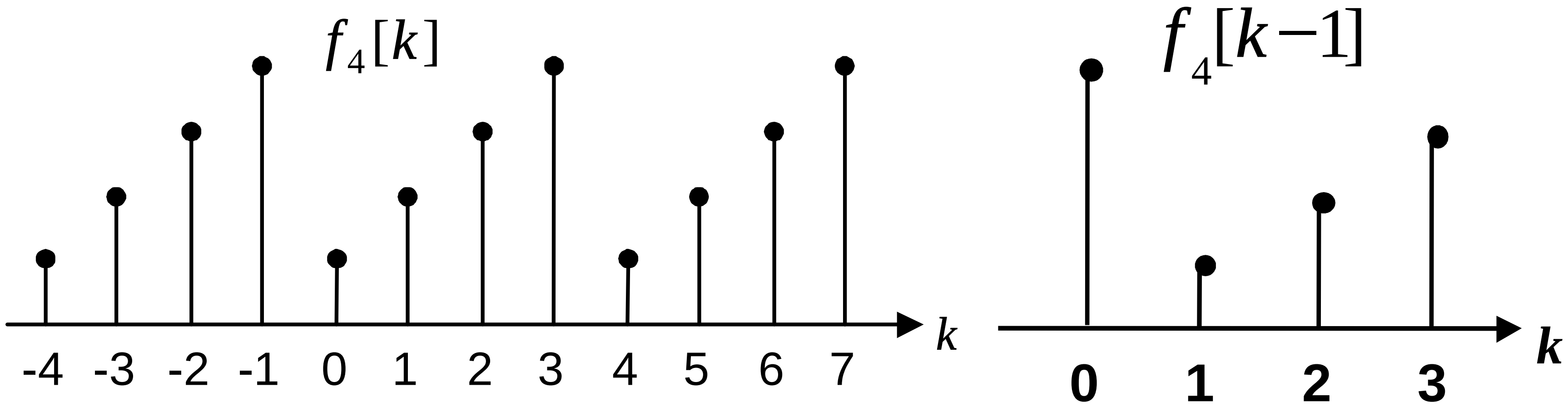
三、DFS的基本性质

1. 线性特性

$$\mathrm{DFS}\{af_1[k]+bf_2[k]\}=a\mathrm{DFS}\{f_1[k]\}+b\mathrm{DFS}\{f_2[k]\}$$

三、DFS的基本性质

2. 位移特性



a) 时域位移 $\mathrm{DFS}\{f[k+n]\} = W_N^{-mn} F[m]$

b) 频域位移 $\mathrm{DFS}\{W_N^{lk} f[k]\} = F[m+l]$

三、DFS的基本性质

3. 对称性

$$\mathrm{DFS}\{f^*[k]\} = F^*[-m]$$

$$\mathrm{DFS}\{f^*[-k]\} = F^*[m]$$

- $f[k]$为实序列 $\quad F[m] = F^*[-m]$
- $f[k]$为偶对称实序列 $\quad F[m]$为偶对称实序列
- $f[k]$为奇对称实序列

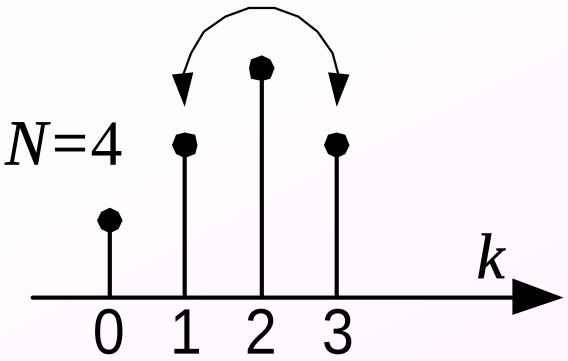
  $F[m]$为奇对称虚序列 (实部为零)

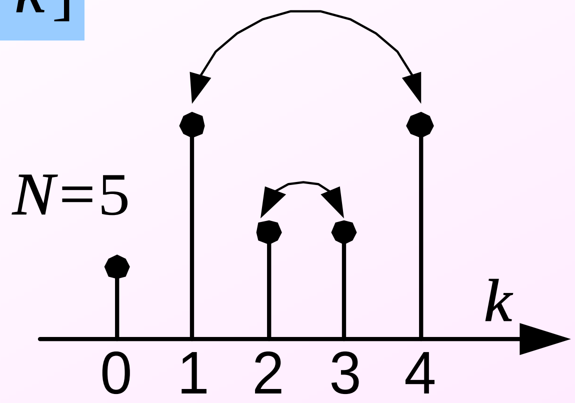
三、DFS的基本性质

3. 对称性

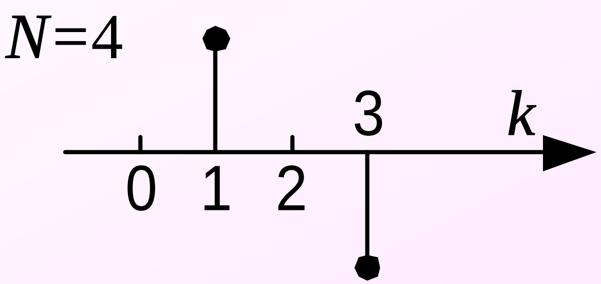
I 周期序列的对称

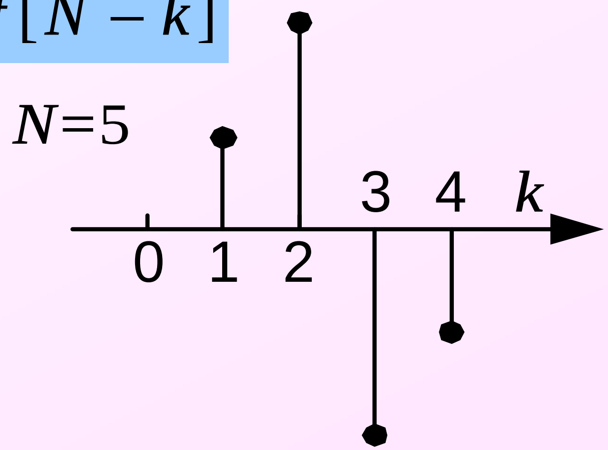
偶对称 $f[k]=f[-k]=f[N-k]$





奇对称 $f[k]=-f[-k]=-f[N-k]$





三、DFS的基本性质

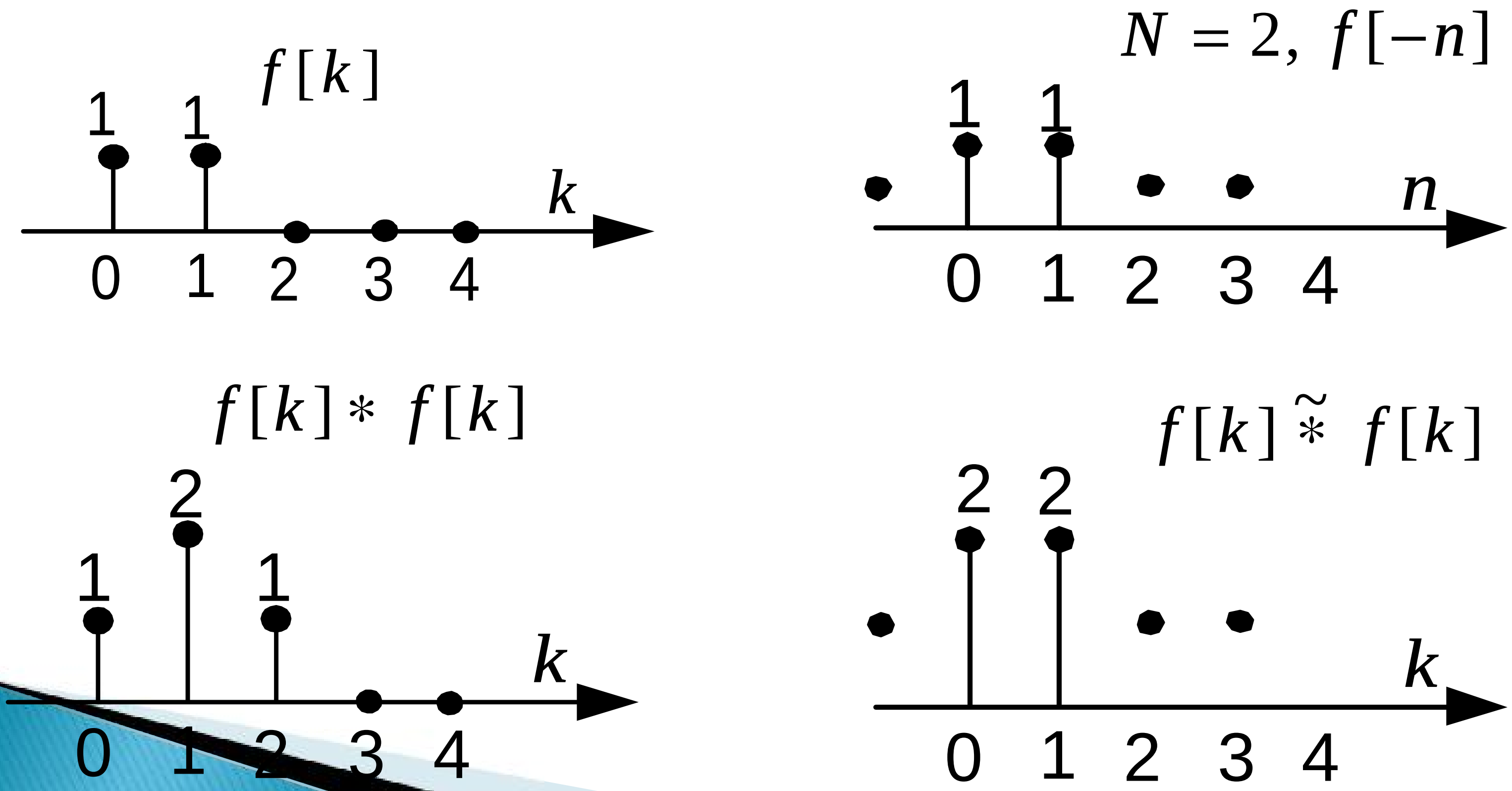
4. 周期卷积定理

$$\mathrm{DFS}\left\{f_1[k] \tilde{*} f_2[k]\right\} = \mathrm{DFS}\{f_1[k]\}\mathrm{DFS}\{f_2[k]\}$$

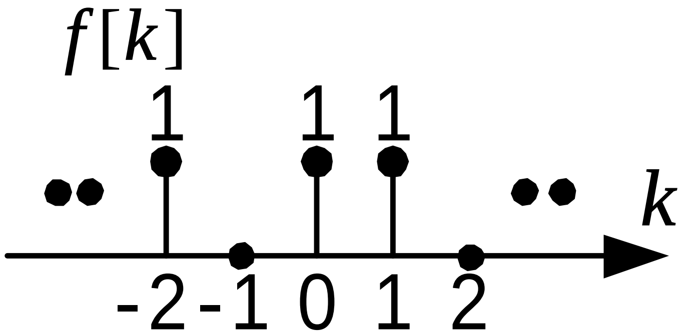
$$\mathrm{DFS}\left\{f_1[k] \bullet f_2[k]\right\} = \frac{1}{N}\mathrm{DFS}\{f_1[k]\} \tilde{*} \mathrm{DFS}\{f_2[k]\}$$

周期卷积

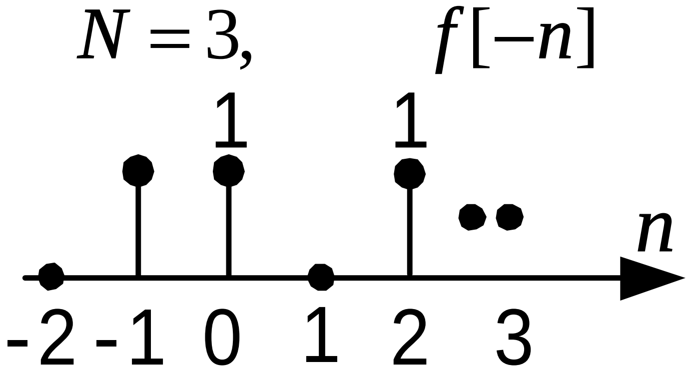
$$f_1[k] \tilde{*} f_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f_1[n] f_2[k-n]$$



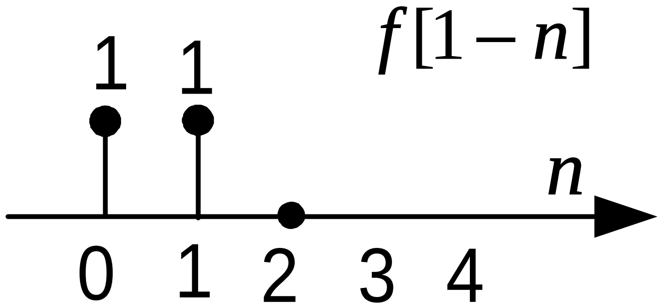
周期卷积



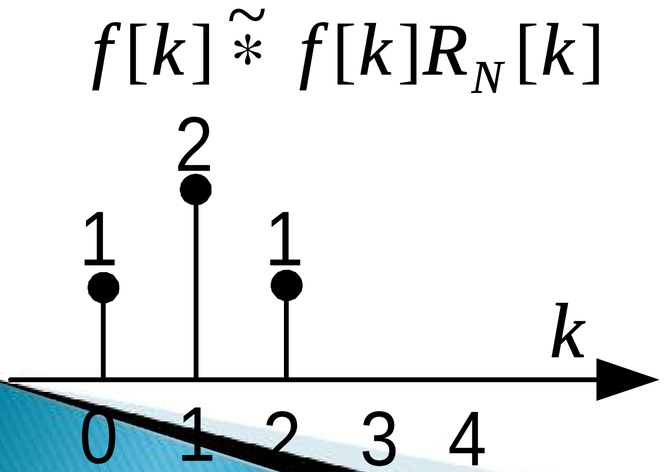
$f[k]$
1 1 1
k
-2 -1 0 1 2



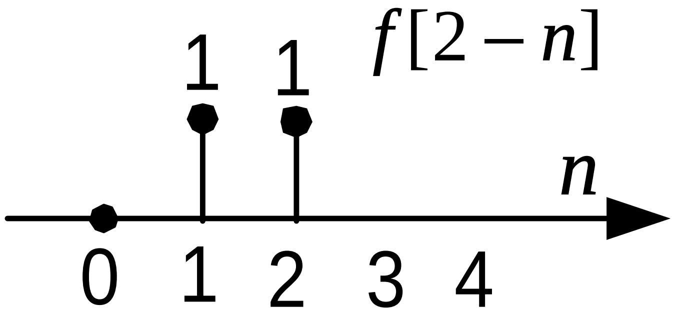
$N=3,\quad f[-n]$
1 1
n
-2 -1 0 1 2 3



$f[1-n]$
1 1
n
0 1 2 3 4



$f[k]\tilde{*}f[k]R_N[k]$
1 2 1
k
0 1 2 3 4



$f[2-n]$
1 1
n
0 1 2 3 4

周期卷积与线性卷积的关系

(1) 周期卷积的结果一般和线性卷积不一样。

(2) 通过对序列补零可使周期卷积的结果和线性卷积的结果一样。

信号的频域分析

- 连续周期信号的频域分析
- 连续非周期信号的频谱
- 常见连续时间信号的频谱
- 连续时间Fourier变换的性质
- 离散周期信号的频域分析
- 离散非周期信号的频域分析

连续非周期信号的频谱

- 从傅里叶级数到傅里叶变换
- 频谱函数与频谱密度函数的区别
- 傅里叶反变换
- 非周期矩形脉冲信号的频谱分析

一、从傅里叶级数到傅里叶变换

- 讨论周期T增加对离散谱的影响：

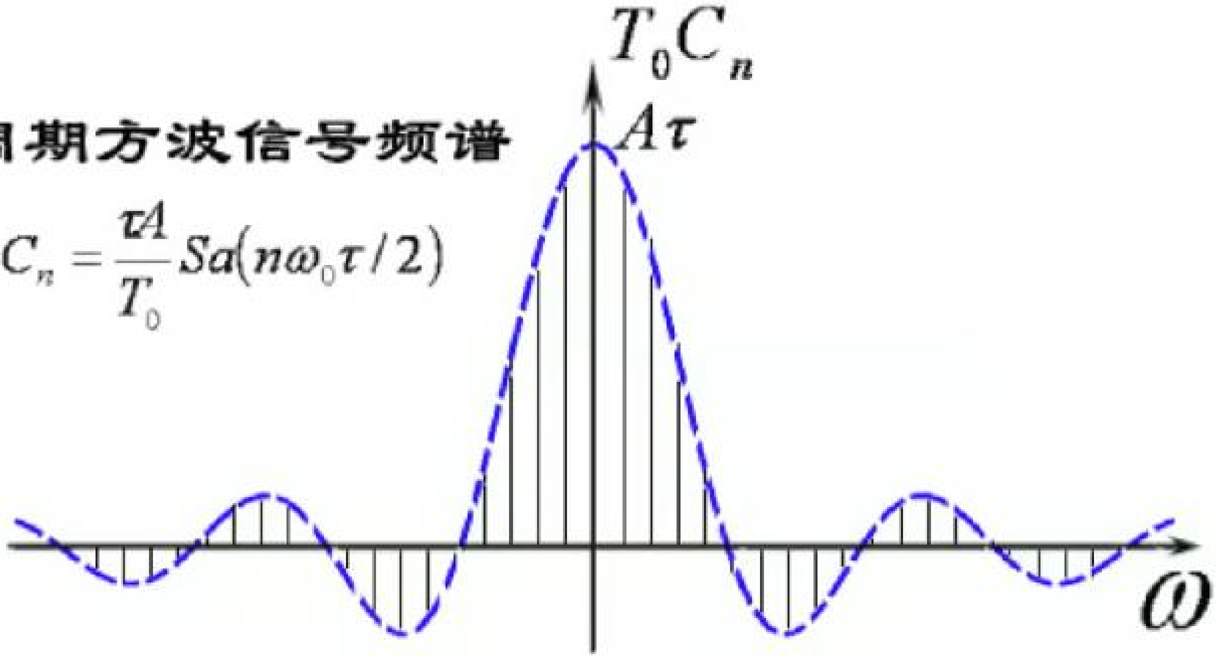
周期为T宽度为t 的周期矩形脉冲的Fourier系数为

$$C_n = \frac{At}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{nw_0 t}{2}\right)$$

$$\lim_{T\to\infty} TC_n = \lim_{T\to\infty}\frac{C_n}{f_0} = F(\mathrm{j}w)$$

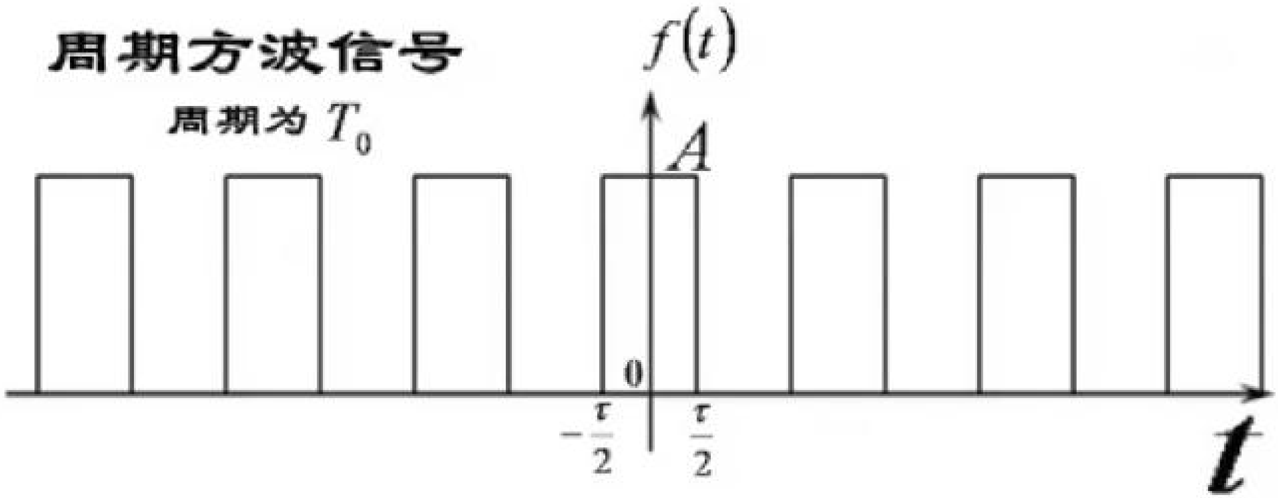
周期方波信号频谱

$$C_n = \frac{\tau A}{T_0} Sa(n\omega_0 \tau / 2)$$



周期方波信号

周期为 T_0



一、从傅里叶级数到傅里叶变换

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nw_0 t}\mathrm{d}t$$

$$\lim_{T\to\infty} TC_n = \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nw_0 t}\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

$$F(\mathrm{j}w) = \lim_{T\to\infty} TC_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

物理意义：F(jw)是单位频率所具有的信号频谱，称之为非周期信号的频谱密度函数，简称频谱函数。

二、频谱函数与频谱密度函数的区别

（1）周期信号的频谱为离散频谱，
非周期信号的频谱为连续频谱。

（2）周期信号的频谱为C_n的分布，表示每个谐波分量的复振幅；

非周期信号的频谱为$T\,C_n$的分布，表示每单位带宽内所有谐波分量合成的复振幅，即频谱密度函数。

- 两者关系：

$$F(jw) = \lim_{T \to \infty} TC_n$$

$$C_n = \left. \frac{F(jw)}{T} \right|_{w = nw_0}$$

三、傅里叶反变换

$$f(t)=\lim_{T\to\infty} f_T(t) \quad =\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, \mathrm{e}^{jnw_0 t}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{F(\mathrm{j}w)w_0}{2\pi}\mathrm{e}^{jnw_0 t}$$

$T\to\infty$, 记 $nw_0=w$, $w_0=2\pi/T=\mathrm{d}w$,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}w)e^{\mathrm{j}wt}\mathrm{d}w$$

物理意义：非周期信号可以分解为无数个频率为w，复振幅为$[F(\mathrm{j}w)/2\pi]\mathrm{d}w$ 的虚指数信号$e^{\mathrm{j}wt}$的线性组合。

傅立叶正变换： $F(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\mathrm{t}}\mathrm{d}t$

傅立叶反变换： $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}w)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}w$

符号表示： $F(\mathrm{j}w)=F[f(t)]$

$f(t)=F^{-1}[F(\mathrm{j}w)]$

或 $f(t)\xleftrightarrow{F}F(\mathrm{j}w)$

狄里赫莱条件

（1）非周期信号在无限区间上绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| \mathrm{d}t < \infty$$

（2）在任意有限区间内，信号只有有限个最大值和最小值。

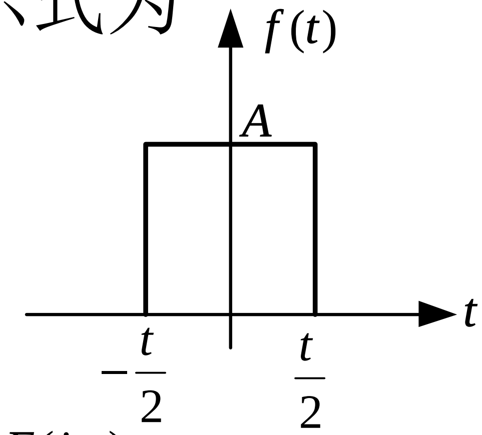
（3）在任意有限区间内，信号仅有有限个不连续点，且这些点必须是有限值。

狄里赫莱条件是充分条件，但不是必要条件

例 试求图示非周期矩形脉冲信号的频谱函数。

解： 非周期矩形脉冲信号$f(t)$的时域表示式为

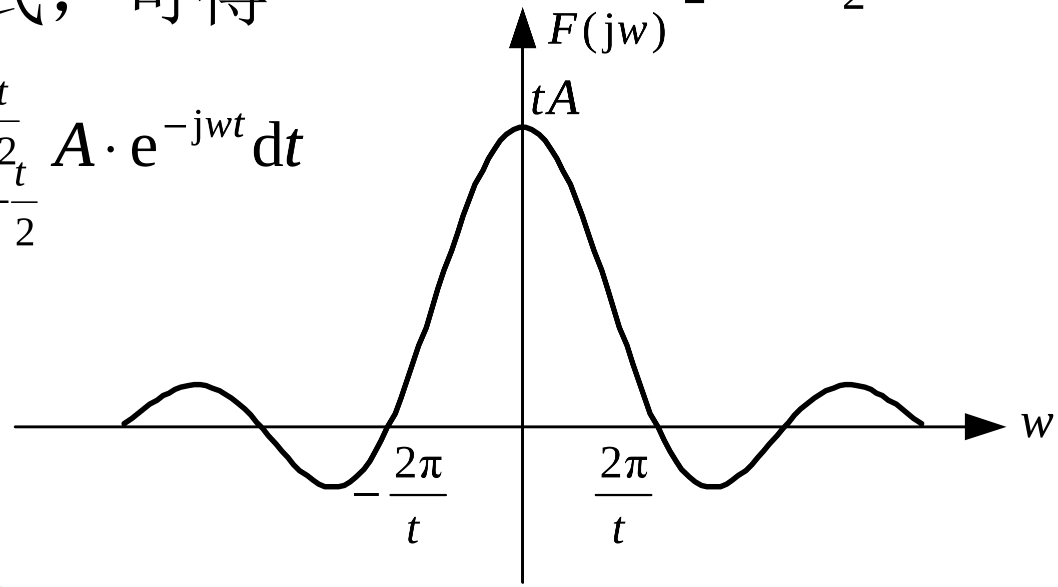
$$f(t)=\begin{cases}A, & |t|\le t/2\\ 0, & |t|>t/2\end{cases}$$



由傅里叶正变换定义式，可得

$$F(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} A\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

$$=At\cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{wt}{2}\right)$$



分析：

1. 非周期矩形脉冲信号的频谱是连续频谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似。
2. 周期信号的离散频谱可以通过对非周期信号的连续频谱等间隔取样求得
3. 信号在时域有限，则在频域将无限延续。
4. 信号的频谱分量主要集中在零频到第一个过零点之间，工程中往往将此宽度作为有效带宽。
5. 脉冲宽度t 越窄，有效带宽越宽，高频分量越多。即信号信息量大、传输速度快，传送信号所占用的频带越宽。

常见连续时间信号的频谱

- 常见非周期信号的频谱(频谱密度)
  - 单边指数信号
  - 双边指数信号$e^{-a|t|}$
  - 单位冲激信号$d(t)$
  - 直流信号
  - 符号函数信号
  - 单位阶跃信号$u(t)$
- 常见周期信号的频谱密度
  - 虚指数信号
  - 正弦型信号
  - 单位冲激串

信号的频域分析

- 连续周期信号的频域分析
- 连续非周期信号的频谱
- 常见连续时间信号的频谱
- 连续时间Fourier变换的性质
- 离散周期信号的频域分析
- 离散非周期信号的频域分析

一、常见非周期信号的频谱

1. 单边指数信号

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t),\quad a>0,$$

$$F(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

$$=\left.\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}w)t}}{-(a+\mathrm{j}w)}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a+\mathrm{j}w}$$

- 幅度频谱 $\left|F(\mathrm{j}w)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{a^{2}+w^{2}}}$

- 相位频谱 $j(w)=-\arctan(\dfrac{w}{a})$

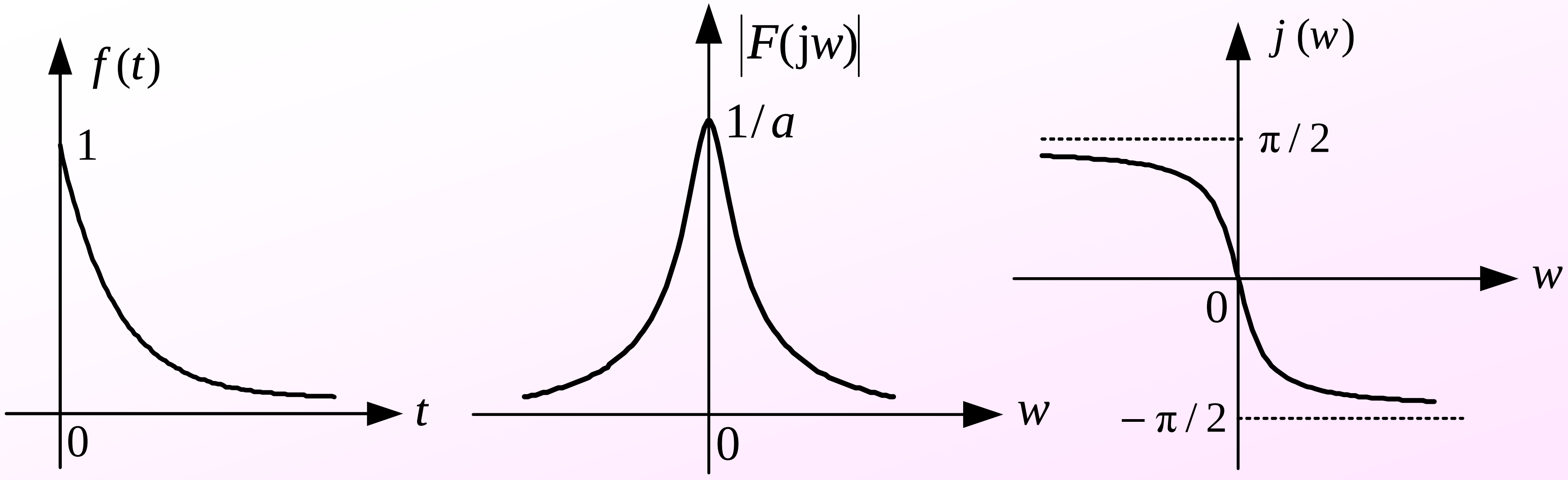
一、常见非周期信号的频谱

1. 单边指数信号

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t),\quad a>0,$$

$$|F(\mathrm{j}w)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}} \qquad j(w)=-\arctan(\frac{w}{a})$$

单边指数信号及其幅度频谱与相位频谱



一、常见非周期信号的频谱

2. 双边指数信号 $\mathrm{e}^{-a|t|}$

$$F(\mathrm{j}w) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos wt\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-at}\cos wt\mathrm{d}t$$

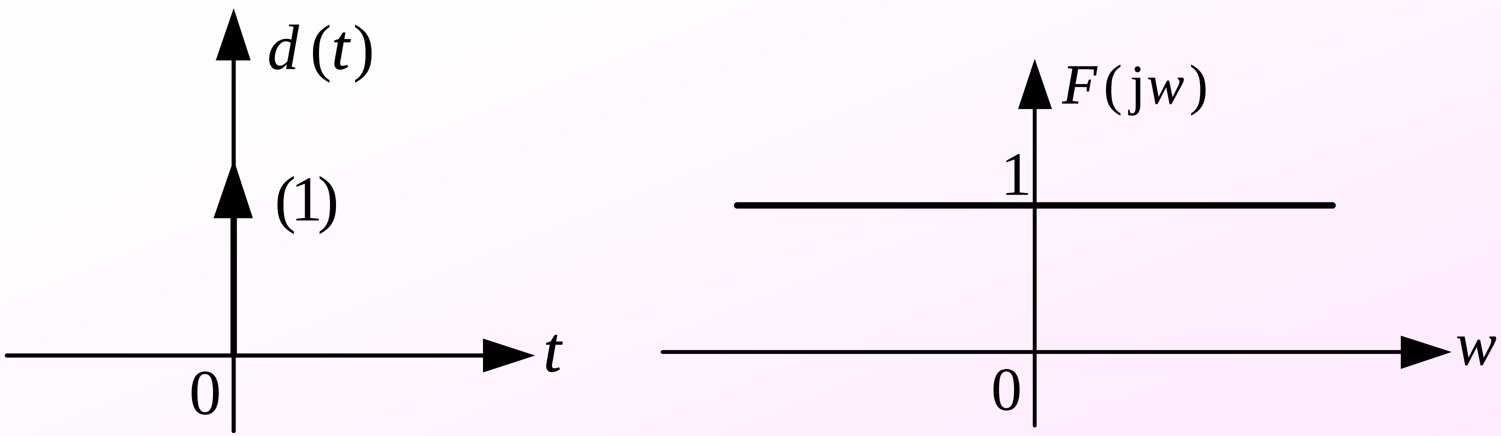
$$= 2\mathrm{e}^{-at}\frac{(w\sin wt - a\cos wt)}{a^2 + w^2}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

- 幅度频谱 $\quad |F(\mathrm{j}w)| = \dfrac{2a}{a^2 + w^2}$
- 相位频谱 $\quad j(w) = 0$

一、常见非周期信号的频谱

3. 单位冲激信号$d(t)$

$$F[d(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} d(t)e^{-jwt}dt = 1$$



单位冲激信号及其频谱

一、常见非周期信号的频谱

4. 直流信号$f(t)=1, -\infty<t<\infty$

直流信号不满足绝对可积条件，可采用极限的方法求出其傅里叶变换。

$$F[1]=\lim_{s\to 0} F[1\cdot e^{-s|t|}] =\lim_{s\to 0}[\frac{2s}{s^2+w^2}] =2\pi d(w)$$

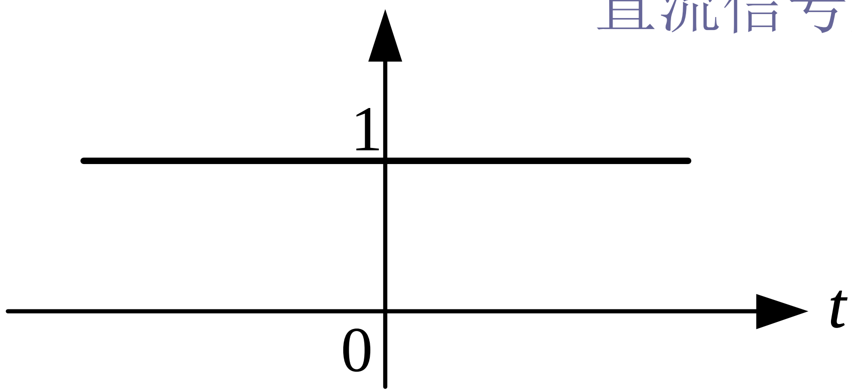
$$\lim_{s\to 0}[\frac{2s}{s^2+w^2}]=\begin{cases}0 & w\neq 0\\ \infty & w=0\end{cases}$$

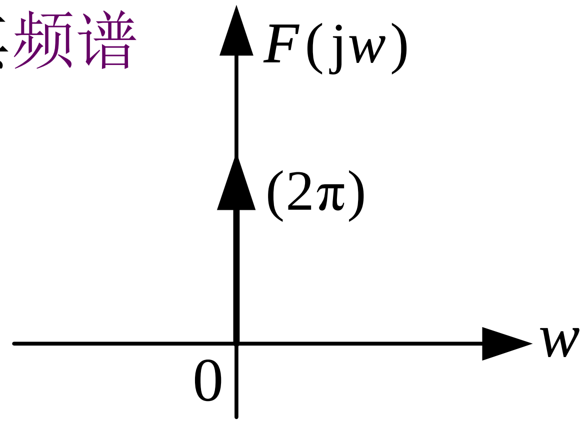
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2s}{s^2+w^2}\,dw=2\arctan(\frac{w}{s})\Big|_{-\infty}^{\infty}=2\pi$$

一、常见非周期信号的频谱

4. 直流信号

直流信号及其频谱





对照冲激、直流时频曲线可看出：

时域持续越宽的信号，其频域的频谱越窄；

时域持续越窄的信号，其频域的频谱越宽。

一、常见非周期信号的频谱

5. 符号函数信号

- 符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$$F[\operatorname{sgn}(t)\mathrm{e}^{-s|t|}]=\int_{-\infty}^{0}(-1)\mathrm{e}^{st}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

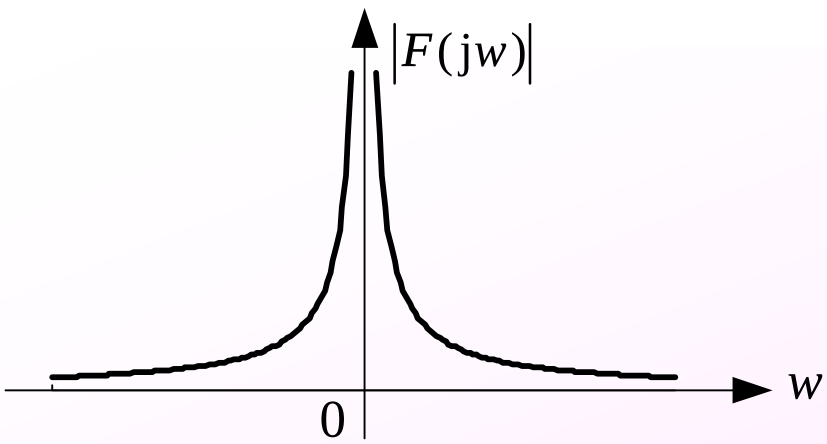
$$=-\frac{e^{(s-\mathrm{j}w)t}}{s-\mathrm{j}w}\Bigg|_{t=-\infty}^{0}-\frac{e^{-(s+\mathrm{j}w)t}}{s+\mathrm{j}w}\Bigg|_{t=0}^{\infty}=\frac{-1}{s-\mathrm{j}w}+\frac{1}{s+\mathrm{j}w}$$

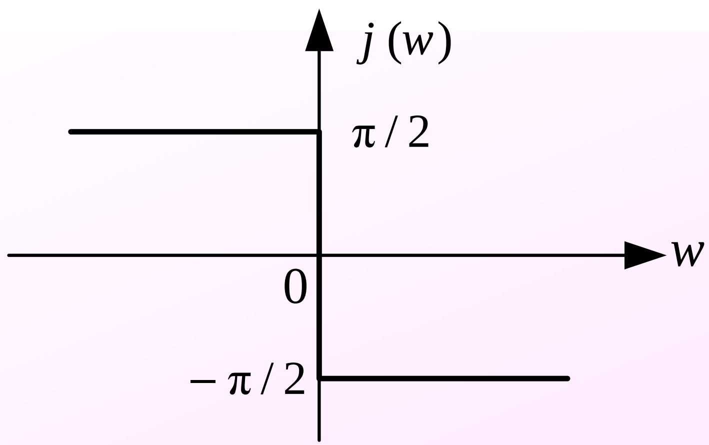
$$F[\operatorname{sgn}(t)]=\lim_{s\to 0}\left\{F[\operatorname{sgn}(t)\mathrm{e}^{-s|t|}]\right\}=\frac{2}{\mathrm{j}w}$$

一、常见非周期信号的频谱

5. 符号函数信号

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$





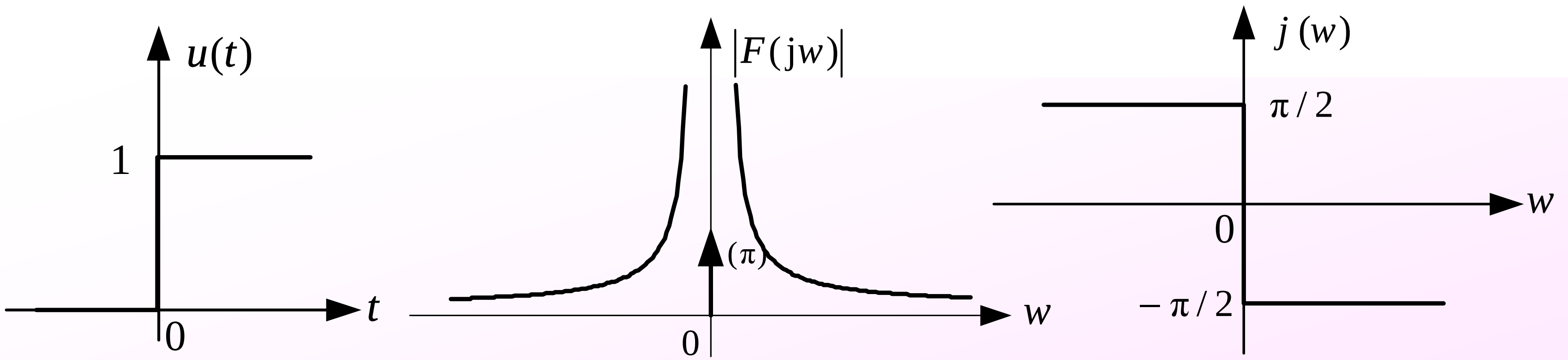
符号函数的幅度频谱和相位频谱

一、常见非周期信号的频谱

6. 单位阶跃信号 $u(t)$

$$u(t)=\frac{1}{2}\{u(t)+u(-t)\}+\frac{1}{2}\{u(t)-u(-t)\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

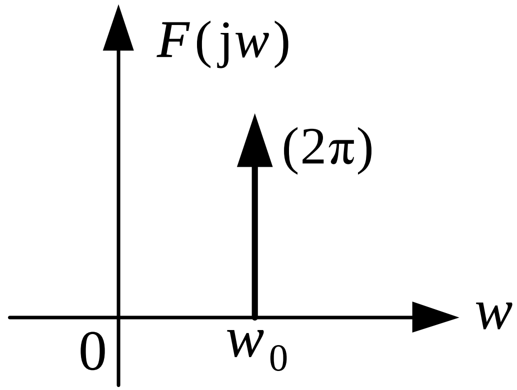
$$F[u(t)]=\pi d(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}$$



阶跃信号及其频谱

二、常见周期信号的频谱密度

1. 虚指数信号 $e^{jw_0t}(-\infty < t < \infty)$



虚指数信号频谱密度

由$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-jwt} dt = 2\pi d(w)$

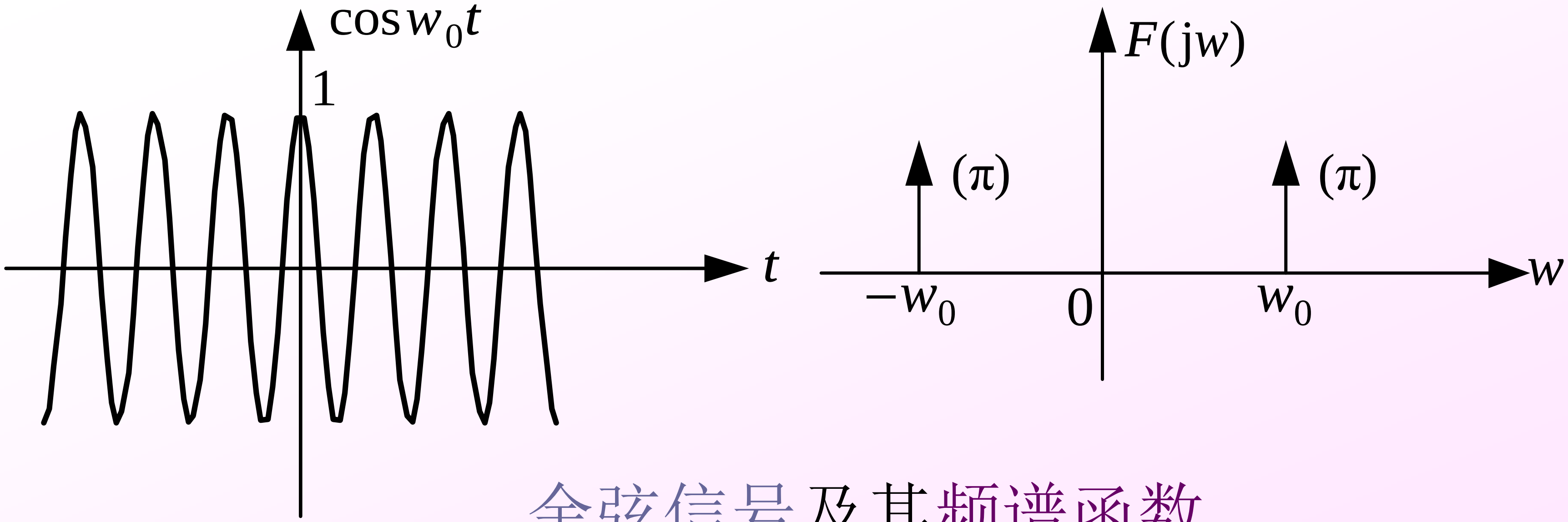
得$F[e^{jw_0t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w-w_0)t} dt = 2\pi d(w - w_0)$

同理: $F[e^{-jw_0t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w+w_0)t} dt = 2\pi d(w + w_0)$

二、常见周期信号的频谱密度

2. 正弦型信号

$$\cos w_0 t = \frac{1}{2}(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}) \xleftrightarrow{F} \pi[d(w - w_0) + d(w + w_0)]$$

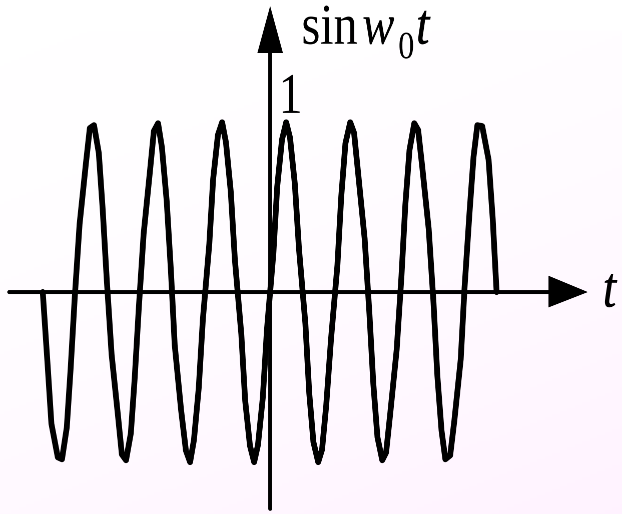


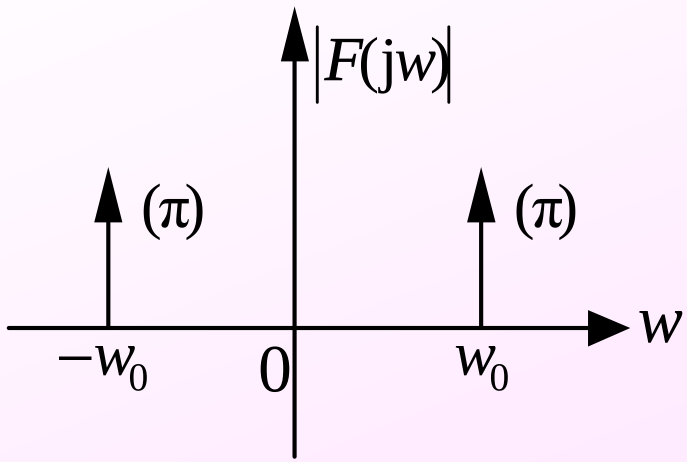
余弦信号及其频谱函数

二、常见周期信号的频谱密度

2. 正弦型信号

$$\sin w_0 t = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}w_0 t}) \xleftrightarrow{F} -\mathrm{j}\pi[d(w - w_0) - d(w + w_0)]$$





正弦信号及其频谱函数

二、常见周期信号的频谱密度

3. 一般周期信号

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}nw_0 t} \qquad (w_0 = \frac{2\pi}{T})$$

两边同取傅里叶变换

$$F[f_T(t)] = F(\mathrm{j}w) = F[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}nw_0 t}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot F[\mathrm{e}^{\mathrm{j}nw_0 t}]$$

$$F[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n d(w - nw_0)$$

二、常见周期信号的频谱密度

4. 单位冲激串

$$d_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d(t-nT)$$

因为$d_T(t)$为周期信号，先将其展开为指数形式傅里叶级数：

$$d_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nw_0t}$$

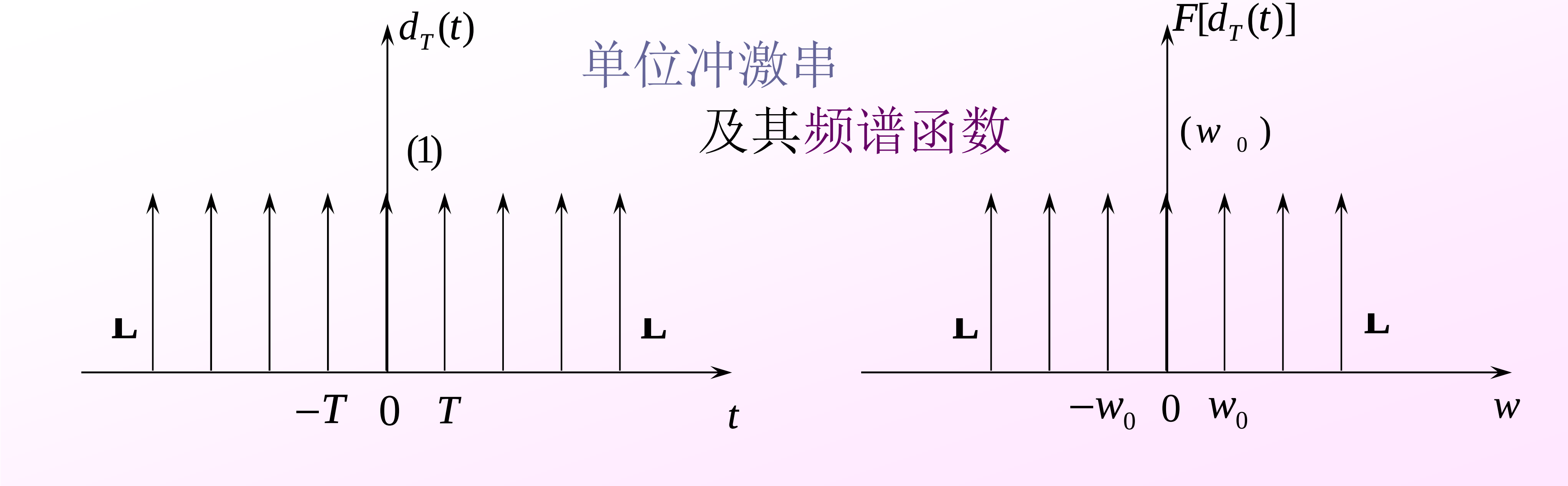
$$F[d_T(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}d(w-nw_0)=w_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d(w-nw_0)$$

二、常见周期信号的频谱密度

4. 单位冲激串

$$d_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(t - nT)$$

$$F[d_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} d(w - nw_0) = w_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(w - nw_0)$$



单位冲激串

及其频谱函数

课后作业：

P178：

5-1：（a）

5-2：（a）

5-3：（1）（4）