信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

信号的频域分析

- 连续周期信号的频域分析
- 连续非周期信号的频谱
- 常见连续时间信号的频谱
- 连续时间Fourier变换的性质
- 离散周期信号的频域分析
- 离散非周期信号的频域分析

傅立叶变换的基本性质

1. 线性特性
2. 共轭对称特性
3. 对称互易特性
4. 展缩特性
5. 时移特性
6. 频移特性
7. 时域卷积特性
8. 频域卷积特性
9. 时域微分特性
10. 积分特性
11. 频域微分特性
12. 能量定理

1. 线性特性

若$f_1(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\mathrm{j}w)$； $f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_2(\mathrm{j}w)$，

$$\text{则} af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{F} aF_1(\mathrm{j}w) + bF_2(\mathrm{j}w)$$

其中a和b均为常数。

2. 共轭对称特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{F} F(\mathrm{j}w)$

则 $f^*(t) \xleftrightarrow{F} F^*(-\mathrm{j}w)$　　$f^*(-t) \xleftrightarrow{F} F^*(\mathrm{j}w)$

$F(\mathrm{j}w)$为复数，可以表示为

$$F(\mathrm{j}w) = |F(\mathrm{j}w)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}j(w)} \quad = F_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}w) + \mathrm{j}F_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}w)$$

当$f(t)$为实函数时，有

$$|F(\mathrm{j}w)| = |F(-\mathrm{j}w)|, \quad j(w) = -j(-w)$$

$$F_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}w) = F_{\mathrm{R}}(-\mathrm{j}w), \quad F_{\mathrm{I}}(-\mathrm{j}w) = -F_{\mathrm{I}}(-\mathrm{j}w)$$

2. 共轭对称特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{F} F(jw)$

则 $f^*(t) \xleftrightarrow{F} F^*(-jw)$ $f^*(-t) \xleftrightarrow{F} F^*(jw)$

当$f(t)$为实偶函数时，有

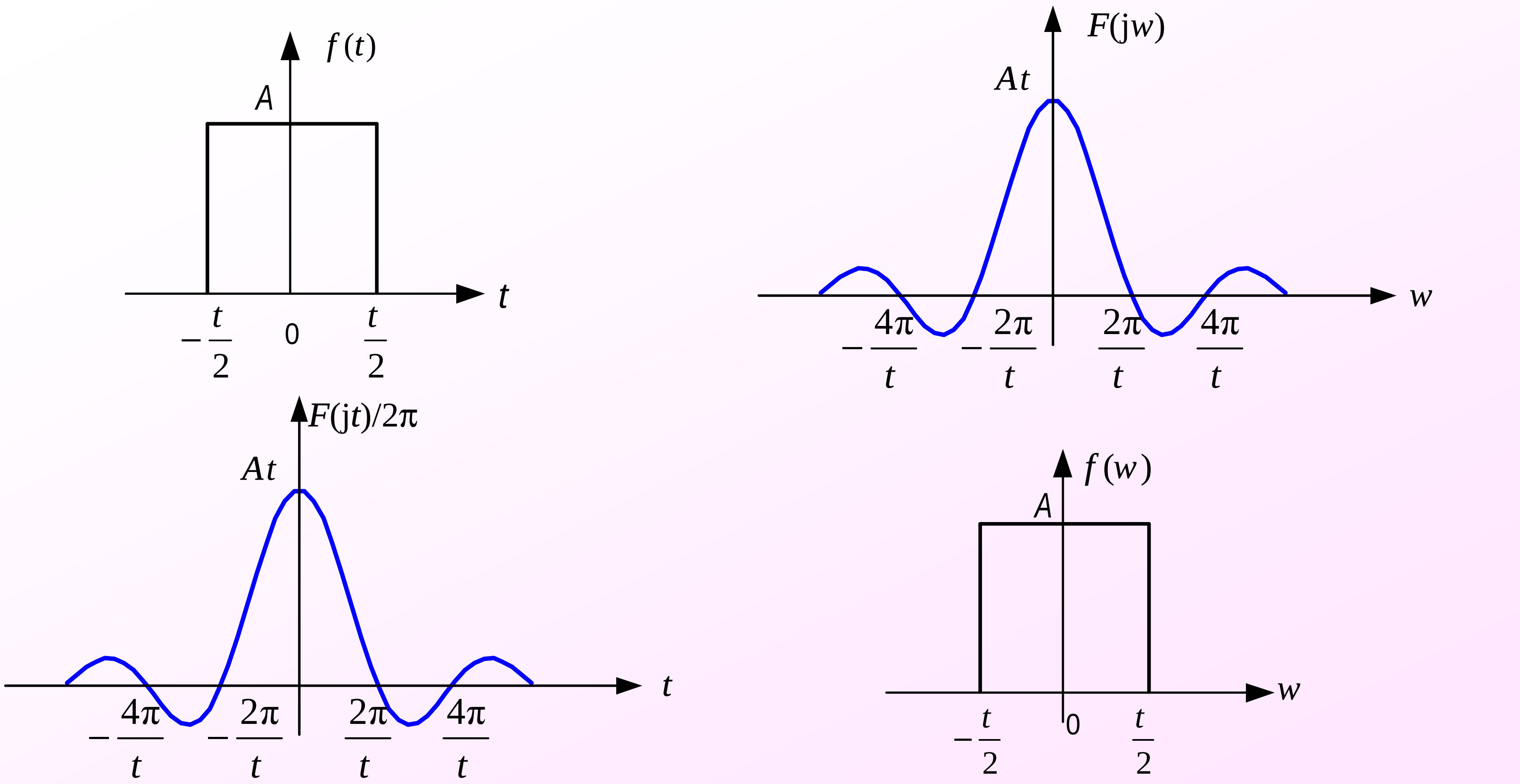
$F(jw) = F^*(jw)$， $F(jw)$是w的实偶函数

当$f(t)$为实奇函数时，有

$F(jw) = -F^*(jw)$， $F(jw)$是w的虚奇函数

3. 互易对称特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{F} F(jw)$　　则 $F(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-w)$



4. 展缩特性

若$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\mathrm{j}w)$

则$f(at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{|a|} F(\mathrm{j}\dfrac{w}{a})$

证明:

$$F[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

令 $x = at$，则 $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t$，代入上式可得

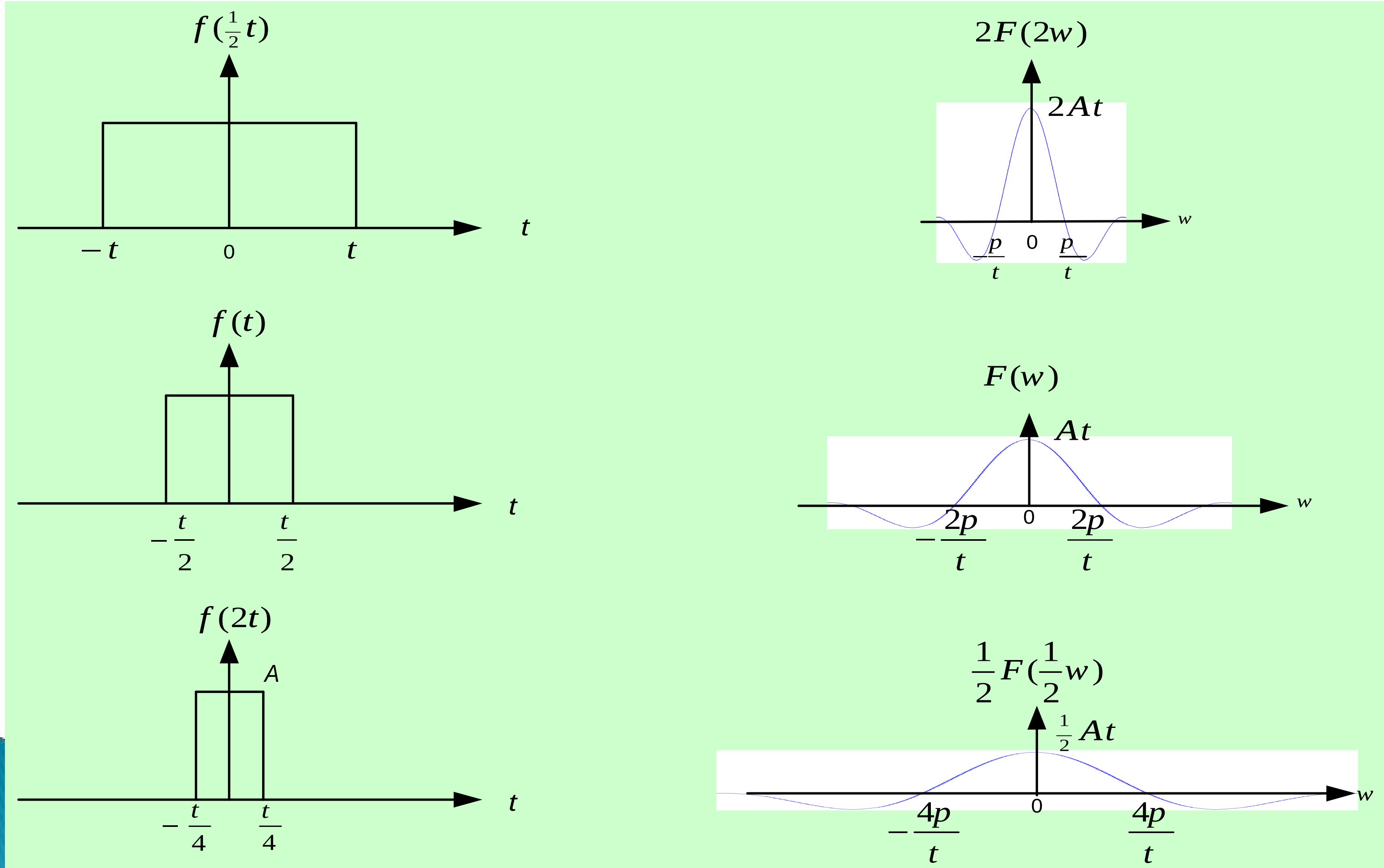
$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{w}{a}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\frac{w}{a})$$

时域压缩，则频域展宽；展宽时域，则频域压缩。

4. 展缩特性

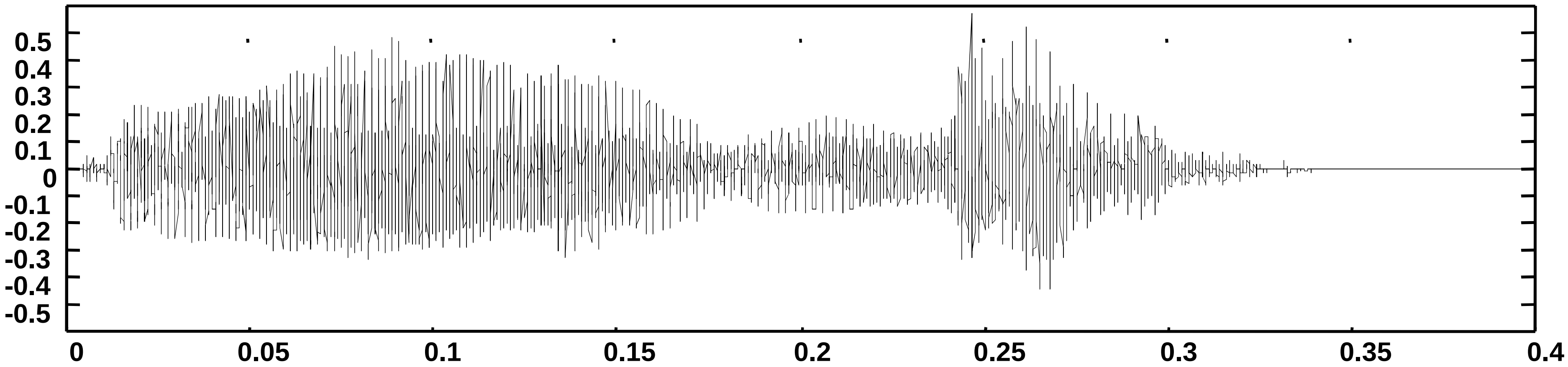
若 $f(t) \xleftrightarrow{F} F(jw)$

则 $f(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}F(j\frac{w}{a})$



尺度变换后语音信号的变化

$f(t)$　　　　$f(2t)$　　　　$f(t/2)$



一段语音信号(“对了”)。抽样频率 = 22050Hz

5. 时移特性

若$f(t)\xleftrightarrow{F}F(\mathrm{j}w)$　则$f(t-t_0)\xleftrightarrow{F}F(\mathrm{j}w)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt_0}$

式中t_0为任意实数

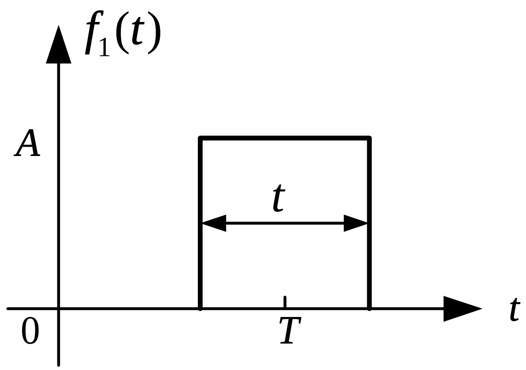
ü **证明：** $F[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$

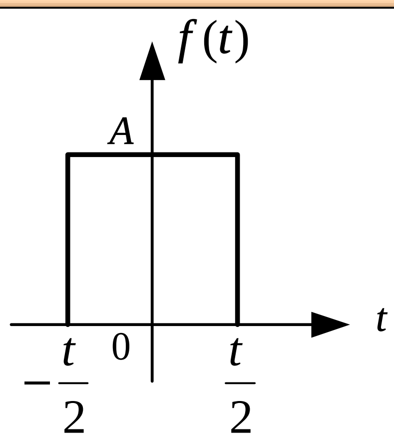
令$x=t-t_0$，则$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，代入上式可得

$$F[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w(t_0+x)}\mathrm{d}x=F(\mathrm{j}w)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt_0}$$

信号在时域中的时移，对应频谱函数在频域中产生的附加相移，而幅度频谱保持不变。

例1 试求图示延时矩形脉冲信号$f_1(t)$的频谱函数$F_1(\mathrm{j}w)$。





解： 无延时且宽度为t 的矩形脉冲信号$f(t)$ 如图，其对应的频谱函数为

$$F(\mathrm{j}w) = At \cdot \mathrm{Sa}(\frac{wt}{2})$$

因为 $f_1(t) = f(t-T)$ 故，由延时特性可得

$$F_1(\mathrm{j}w) = F(\mathrm{j}w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wT} = At \cdot \mathrm{Sa}(\frac{wt}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wT}$$

6. 频移特性（调制定理）

若 $$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\mathrm{j}w)$$

则 $$f(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t} \xleftrightarrow{F} F[\mathrm{j}(w-w_0)]$$

式中w_0为任意实数

证明： 由傅里叶变换定义有

$$F[f(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(w-w_0)t}\mathrm{d}t \quad =F[\mathrm{j}(w-w_0)]$$

6. 频移特性（调制定理）

$$F[f(t)\cos w_0 t] = \frac{1}{2}F[f(t)e^{jw_0 t}] + \frac{1}{2}F[f(t)e^{-jw_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2}F[j(w - w_0)] + \frac{1}{2}F[j(w + w_0)]$$

信号$f(t)$与余弦信号$\cos w_0 t$相乘后，其频谱是将原来信号频谱向左右搬移w_0，幅度减半。

同理 $$F[f(t)\sin w_0 t] = \frac{1}{2j}F[f(t)e^{jw_0 t}] - \frac{1}{2j}F[f(t)e^{-jw_0 t}]$$

$$= -\frac{j}{2}F[j(w - w_0)] + \frac{j}{2}F[j(w + w_0)]$$

例2　试求矩形脉冲信号$f(t)$与余弦信号$\cos w_0 t$相乘后信号的频谱函数。

解：已知宽度为t的矩形脉冲信号对应的频谱函数为

$$F(\mathrm{j}w) = At \cdot \mathrm{Sa}(\frac{wt}{2})$$

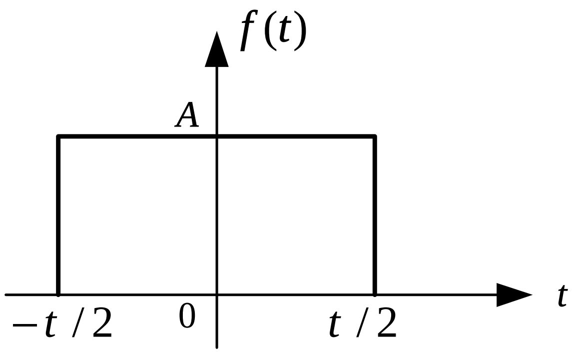
应用频移特性可得

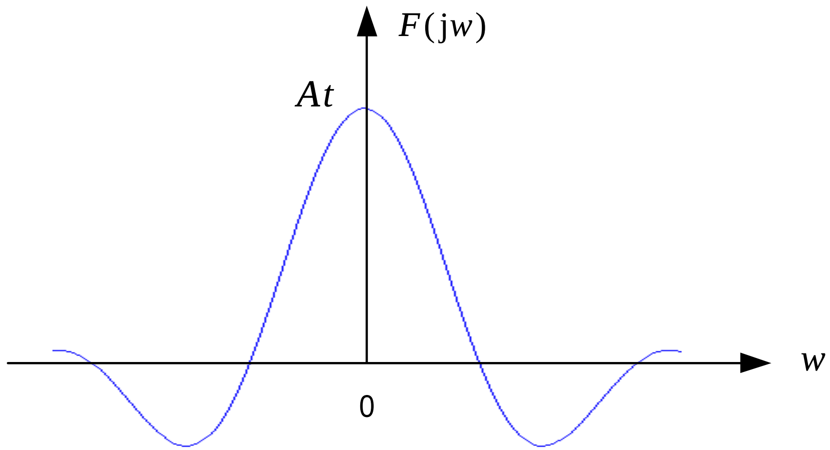
$$F[f(t)\cos w_0 t] = \frac{1}{2}F[\mathrm{j}(w-w_0)] + \frac{1}{2}F[\mathrm{j}(w+w_0)]$$

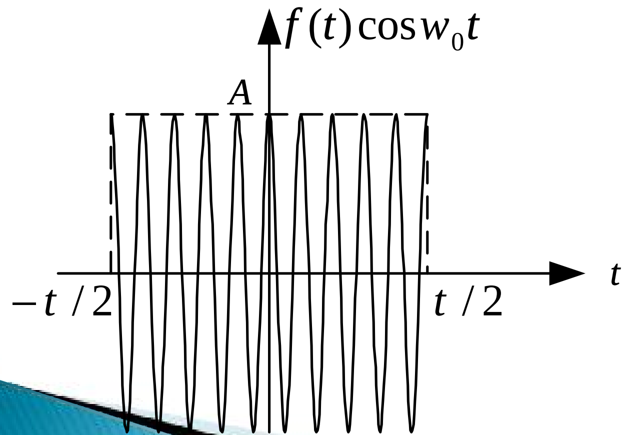
$$= \frac{At}{2}\{\cdot \mathrm{Sa}\frac{(w-w_0)t}{2} + \mathrm{Sa}\frac{(w+w_0)t}{2}\}$$

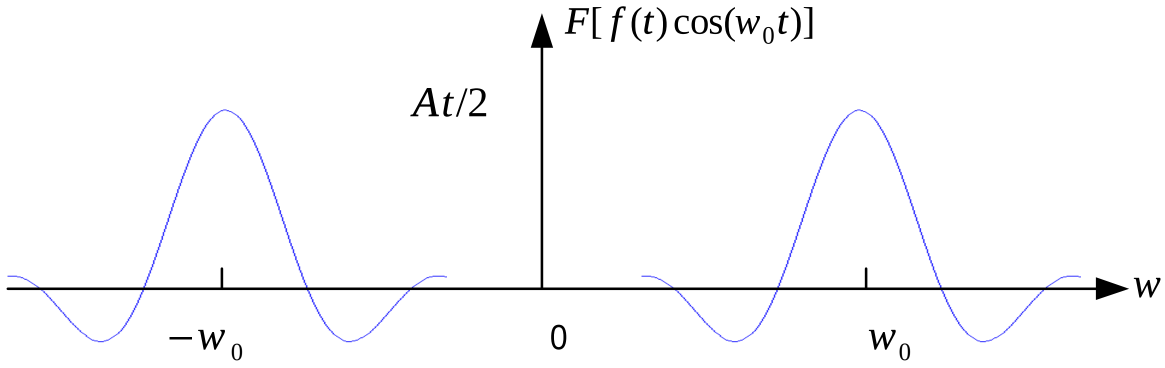
例2　试求矩形脉冲信号$f(t)$与余弦信号$\cos w_0 t$相乘后信号的频谱函数。

解:









7. 卷积特性(时域)

$$若 f_1(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\mathrm{j}w) \qquad f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_2(\mathrm{j}w)$$

$$则 f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\mathrm{j}w) \cdot F_2(\mathrm{j}w)$$

证明：

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-t) \mathrm{d}t] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt} \mathrm{d}t$$

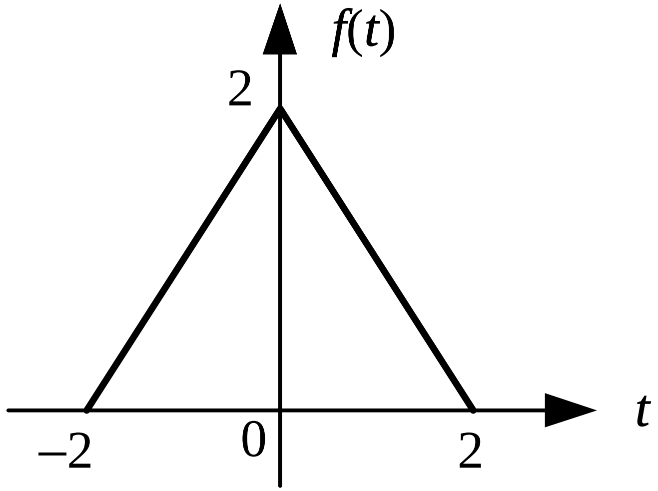
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) [\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt} \mathrm{d}t] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) F_2(\mathrm{j}w) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt} \mathrm{d}t$$

$$= F_1(\mathrm{j}w) \cdot F_2(\mathrm{j}w)$$

例3 求如图所示信号的频谱。

解：



$$f(t) = p_2(t) * p_2(t)$$

$$p_2(t) \longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}(w)$$

$$由 f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\mathrm{j}w) \cdot F_2(\mathrm{j}w)$$

$$F(\mathrm{j}w) = 4\mathrm{Sa}^2(w)$$

例4 $y(t)=\int_{-2}^{t}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\mathrm{e}^{-5(t-t)}\mathrm{d}t,\ (t>-2)$

计算其频谱$Y(\mathrm{j}\omega)$。

解:

$$y(t)=\int_{-2}^{t}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\mathrm{e}^{-5(t-t)}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}u(t+2)*\mathrm{e}^{-5t}u(t)$$

利用Fourier变换的卷积特性可得

$$Y(\mathrm{j}w)=F[\mathrm{e}^{-2t}u(t+2)]F[\mathrm{e}^{-5t}u(t)]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2w}}{\mathrm{j}w+2}\frac{1}{\mathrm{j}w+5}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2w+4}}{(\mathrm{j}w)^{2}+7\mathrm{j}w+10}$$

8. 频域卷积特性（乘积特性）

若$f_1(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\mathrm{j}w)$ $f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_2(\mathrm{j}w)$

则$f_1(t)\cdot f_2(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2\pi}[F_1(\mathrm{j}w) * F_2(\mathrm{j}w)]$

证明： $F[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)\cdot f_2(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathrm{j}W)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}W]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\Omega)[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j(w-\Omega)t}dt]d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathrm{j}W)F_2[\mathrm{j}(w-W)]\mathrm{d}W] = \frac{1}{2\pi}[F_1(\mathrm{j}w) * F_2(\mathrm{j}w)]$$

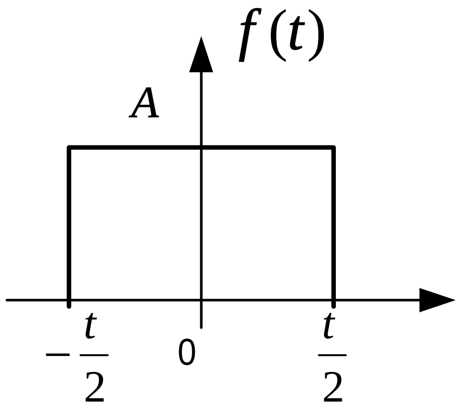
9. 时域微分特性

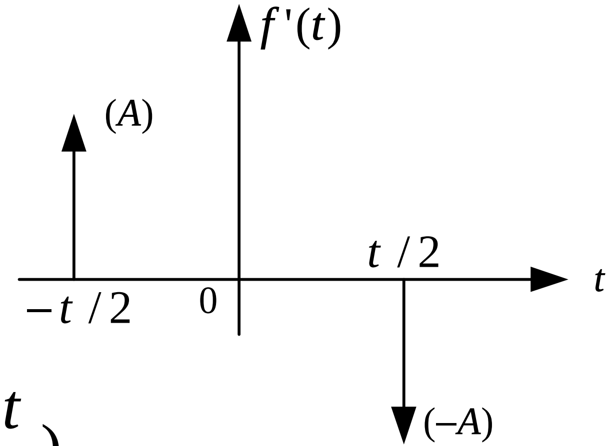
若 $$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\mathrm{j}w)$$

则 $$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \xleftrightarrow{F} (\mathrm{j}w) \cdot F(\mathrm{j}w)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \xleftrightarrow{F} (\mathrm{j}w)^n \cdot F(\mathrm{j}w)$$

例5 试利用微分特性求矩形脉冲信号的频谱函数。





解：

$$f'(t) = Ad(t+\frac{t}{2}) - Ad(t-\frac{t}{2})$$

$$F[f'(t)] = Ae^{\mathrm{j}w\frac{t}{2}} - Ae^{-\mathrm{j}w\frac{t}{2}} = A\cdot 2\mathrm{j}\sin(w\frac{t}{2})$$

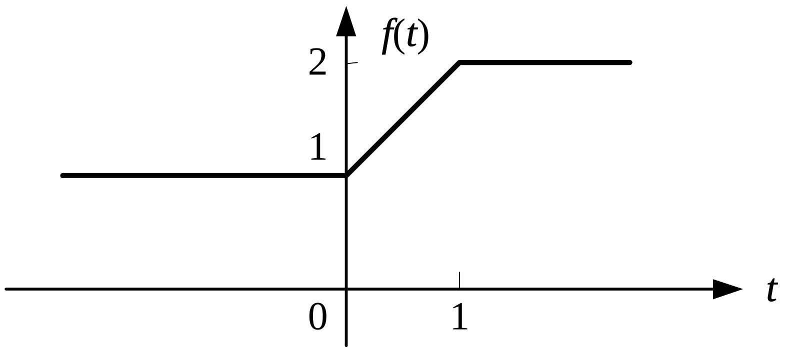
由上式利用时域微分特性，得

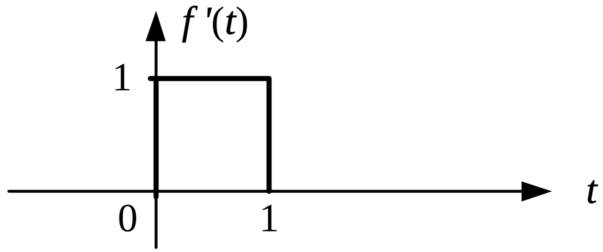
$$F[f'(t)] = (\mathrm{j}w)F(\mathrm{j}w) = A\cdot 2\mathrm{j}\sin(w\frac{t}{2})$$

因此有

$$F(\mathrm{j}w) = \frac{2A}{w}\sin(w\frac{t}{2}) = At\mathrm{Sa}(\frac{wt}{2})$$

例6 试利用微分特性求图示信号$f(t)$的频谱函数。





解：

$$f'(t) = p(t-0.5) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w}$$

利用时域微分特性，可得

$$F(\mathrm{j}w) = \frac{1}{\mathrm{j}w}\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w} \neq \frac{1}{\mathrm{j}w}\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w} + 3\pi d(w)$$

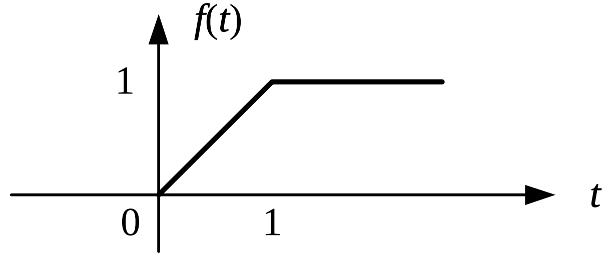
信号的时域微分，使信号中的直流分量丢失。

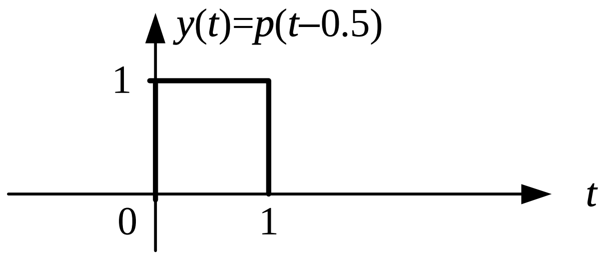
10. 时域积分特性

$$若 f(t) \xleftrightarrow{F} F(jw)$$

$$则 \int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{jw}F(jw) + \pi F(0)d(w)$$

例7 试利用积分特性求图示信号*f*(*t*)的频谱函数。





解： $f(t)=\int_{-\infty}^{t} p(t-0.5)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t} y(t)\mathrm{d}t$

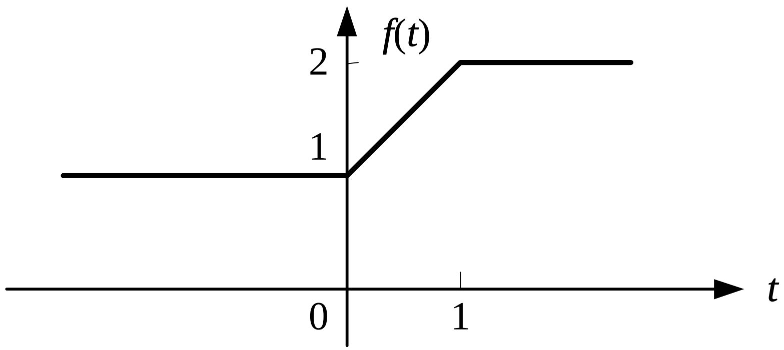
由于 $p(t-0.5)\xleftrightarrow{F} Y(\mathrm{j}w)=\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w}$

利用时域积分特性，可得

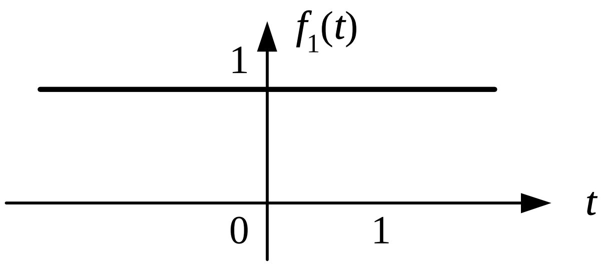
$$F(\mathrm{j}w)=\frac{1}{\mathrm{j}w}Y(\mathrm{j}w)+\pi Y(0)d(w)$$

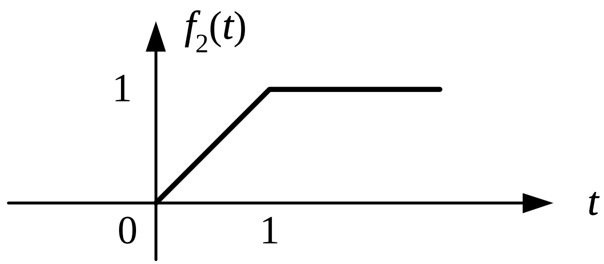
$$=\frac{1}{\mathrm{j}w}\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w}+\pi d(w)$$

例8 试利用积分特性求图示信号$f(t)$的频谱函数。



解： 将$f(t)$表示为$f_1(t)+f_2(t)$





即 $$f(t)=1+\int_{-\infty}^{t} p(t-0.5)\mathrm{d}t$$

$$F(\mathrm{j}w)=\frac{1}{\mathrm{j}w}\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w}+3\pi d(w)$$

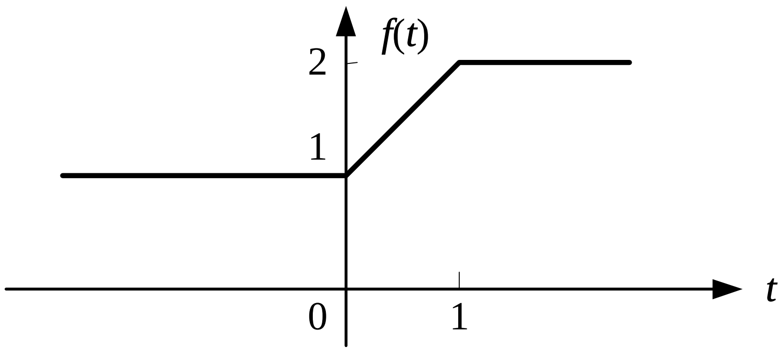
时域微分特性—修正的时域微分特性

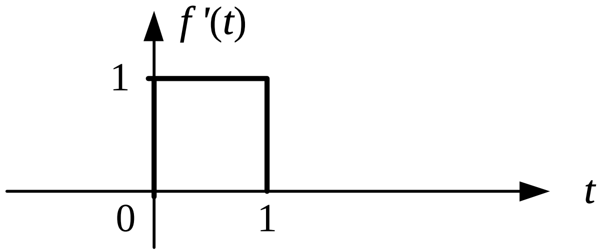
记 $f'(t)=f_1(t)$

若 $f(t) \xleftrightarrow{F} F(jw)$ $\quad f_1(t) \xleftrightarrow{F} F_1(jw)$

则 $$F(jw)=\pi(f(\infty)+f(-\infty))d(w)+\frac{F_1(jw)}{jw}$$

例9 试利用修正的微分特性求图示信号$f(t)$的频谱函数。





解:

$$f'(t)=p(t-0.5)=f_1(t)\xleftrightarrow{F}F_1(\mathrm{j}w)=\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w}$$

利用修正的微分特性，可得

$$F(\mathrm{j}w)=\pi(f(\infty)+f(-\infty))d(w)+\frac{F_1(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}$$

$$=3\pi d(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\mathrm{Sa}(0.5w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5w}$$

与例8结果一致！

11. 频域微分特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{F} F(\mathrm{j}w)$

则 $t \cdot f(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{j} \cdot \dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}w)}{\mathrm{d}w}$

$$t^n f(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{j}^n \cdot \frac{\mathrm{d}F^n(\mathrm{j}w)}{\mathrm{d}w^n}$$

证明： $F(\mathrm{j}w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}w)}{\mathrm{d}w} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}w = \int_{-\infty}^{\infty}[(-\mathrm{j}t)f(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

将上式两边同乘以j得 $\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}w)}{\mathrm{d}w} = \int_{-\infty}^{\infty}[t f(t)] \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$

例10 试求单位斜坡信号$tu(t)$的频谱。

解： 已知单位阶跃信号傅里叶变换为:

$$F[u(t)]=\pi d(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}$$

故利用频域微分特性可得:

$$F[tu(t)]=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}[\pi d(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}]=\pi d'(w)-\frac{1}{w^2}$$

12. 非周期信号的能量谱密度

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\mathrm{j}w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\mathrm{j}w)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\mathrm{j}w)\cdot F(\mathrm{j}w)\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}w)|^2 \, \mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

12. 非周期信号的能量谱密度

- 帕什瓦尔能量守恒定理：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}w)|^2 \, \mathrm{d}w$$

上式表明信号的能量也可以由$|F(\mathrm{j}w)|^2$在整个频率范围的积分乘以$1/2\pi$ 来计算。

物理意义：非周期能量信号的归一化能量在时域中与在频域中相等，保持能量守恒。

12. 非周期信号的能量谱密度

- 帕什瓦尔能量守恒定理：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}w)|^2\,\mathrm{d}w$$

- 定义单位角频率的信号能量为能量频谱密度函数，简称能量频。

$$G(w) = \frac{1}{2\pi}|F(\mathrm{j}w)|^2$$

例11 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin t}{t})^2 \mathrm{d}t$ 。

解：

由 $F\{\frac{\sin t}{t}\} = \pi p_2(w)$

根据Parseval能量守恒定律，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin t}{t})^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\pi p_2(w)|^2 \mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi^2 \mathrm{d}w = \pi$$

傅里叶变换性质一览表

1. 线性特性 $af_1(t)+bf_2(t) \xleftrightarrow{F} aF_1(\mathrm{j}w)+bF_2(\mathrm{j}w)$
2. 对称互易特性 $F(\mathrm{j}t) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-w)$
3. 展缩特性 $f(at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\dfrac{w}{a})$
4. 时移特性 $f(t-t_0) \xleftrightarrow{F} F(\mathrm{j}w)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt_0}$
5. 频移特性 $f(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t} \xleftrightarrow{F} F[\mathrm{j}(w-w_0)]$
6. 时域卷积特性 $f_1(t)*f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\mathrm{j}w)\cdot F_2(\mathrm{j}w)$
7. 频域卷积特性 $f_1(t)\cdot f_2(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2\pi}[F_1(\mathrm{j}w)*F_2(\mathrm{j}w)]$
8. 时域微分特性 $\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \xleftrightarrow{F} (\mathrm{j}w)^n\cdot F(\mathrm{j}w)$
9. 积分特性 $\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{\mathrm{j}w}F(\mathrm{j}w)+\pi F(0)d(w)$
10. 频域微分特性 $t^n f(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{j}^n\cdot \dfrac{\mathrm{d}F^n(\mathrm{j}w)}{\mathrm{d}w^n}$

非周期信号的频域分析小结

- 重要概念：非周期信号的频谱

1) 非周期信号的频谱与周期信号的频谱的区别

2) 非周期信号频谱的物理意义

3) 非周期信号频谱的分析方法：

   应用常用基本信号的频谱与傅里叶变换的性质

- 分析问题使用的数学工具：傅里叶变换

- 工程应用：调制、解调，频分复用

课后作业：

P178：

5-5：（b）（f）（g）（h）

5-7：（5）（7）

5-11：（1）（7）

5-13：（a）