

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn



信号的频域分析

连续周期信号的频域分析

连续非周期信号的频谱

常见连续时间信号的频谱

连续时间Fourier变换的性质

离散周期信号的频域分析

离散非周期信号的频域分析

离散时间Fourier变换 (DTFT)



DTFT的定义

DTFT的性质

内插和抽取信号的频谱

一、DTFT的定义

I **DFS** $F[m] = \text{DFS}(f[k]) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}$

I **IDFS** $f[k] = \text{IDFS}(F[m]) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F[m] e^{jm\frac{2\pi}{N}k}$



$N \rightarrow \infty$

I **DTFT** $F(e^{jW}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-jWk}$

I **IDTFT** $f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{jW}) e^{jWk} dW$

p $F(e^{jW})$ 特点:

1) $F(e^{jW})$ 是连续的

2) $F(e^{jW})$ 是周期为 2π 的周期函数

例1: 求序列 $f[k] = \{1, 2, 1\}$ 的DTFT

解:

$$F(e^{jW}) = 1 + 2e^{-jW} + e^{-j2W} = (1 + e^{-jW})^2$$

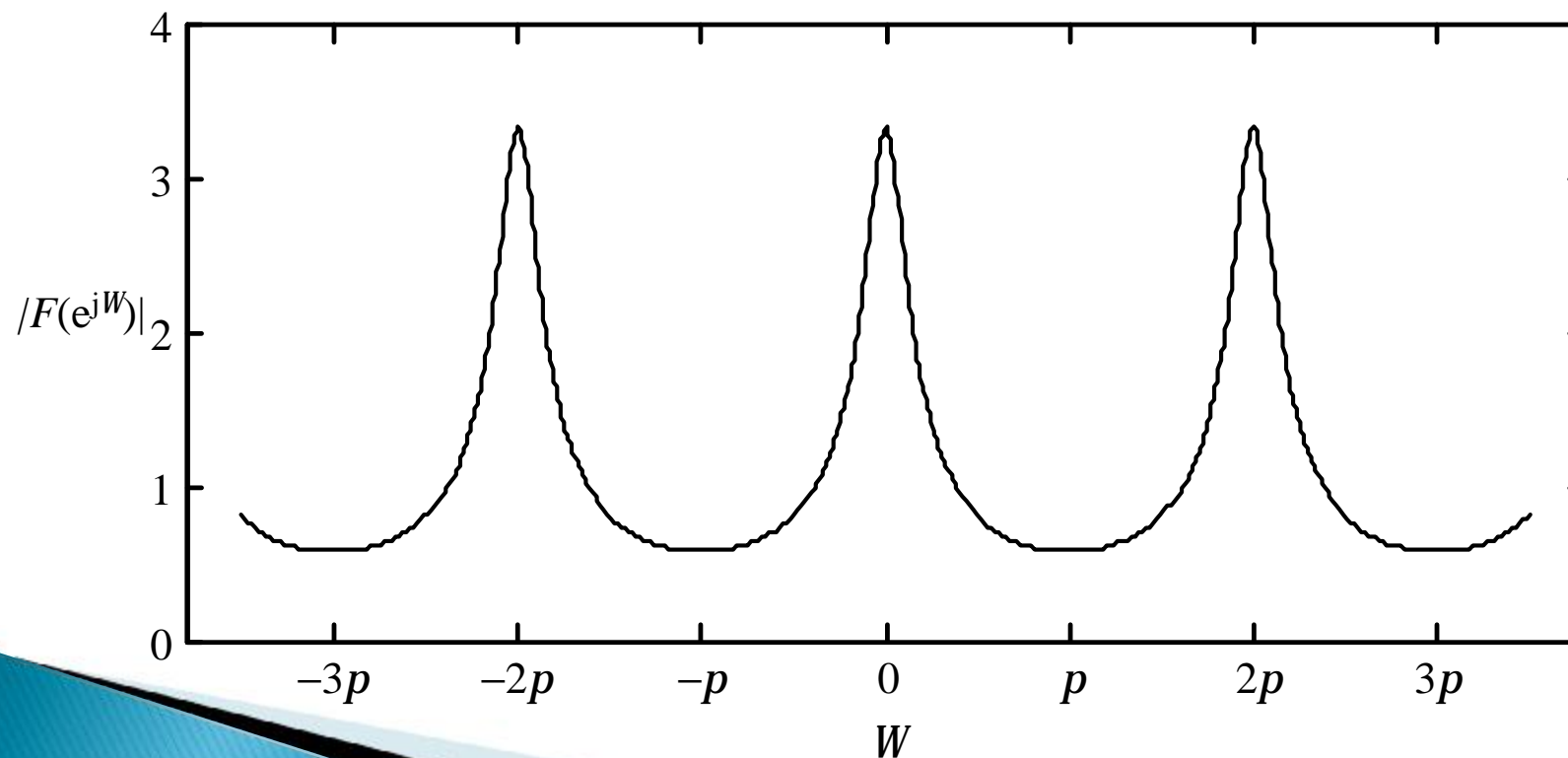
$$= e^{-jW} 4 \cos^2 \frac{W}{2}$$

$$|F(e^{jW})| = 4 \cos^2 \frac{W}{2}$$

$$\angle F(W) = -W$$

例2 DTFT $\{a^k u[k]\}$ $|a| < 1$

解:
$$F(e^{jW}) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-jkW} = \frac{1}{1 - a e^{-jW}}$$



例3 DTFT $\{e^{jW_0k}\}$

解:

$$\text{DTFT}\{e^{jW_0k}\} = \sum_k e^{jW_0k - jWk} = \sum_k e^{-j\frac{2\pi(W-W_0)k}{2\pi}}$$

利用泊松求和公式

$$d_T(t) = \sum_k d(t \pm kT) = \frac{1}{T} \sum_n e^{\pm j\frac{2\pi nt}{T}}$$

可得

$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{e^{jW_0k}\} &= 2\pi \sum_r d(W - W_0 \pm 2\pi r) \\ &= 2\pi d_{2\pi}(W - W_0) \end{aligned}$$

二、DTFT性质

1. 线性特性

$$\text{DTFT}\{af_1[k]+bf_2[k]\} = a\text{DTFT}\{f_1[k]\} + b\text{DTFT}\{f_2[k]\}$$

二、DTFT性质

2. 对称特性

$$\text{DTFT}\{f * [k]\} = F * (e^{-j\Omega})$$

$$\text{DTFT}\{f * [-k]\} = F * (e^{j\Omega})$$

$F(e^{jW})$ 可表示为

$$F(e^{jW}) = |F(e^{jW})| e^{jf(W)} = F_R(e^{jW}) + jF_I(e^{jW})$$

当 $f[k]$ 是实序列时:

$$|F(e^{jW})| = |F(e^{-jW})| \quad f(W) = -f(-W)$$

$$F_R(e^{jW}) = F_R(e^{-jW}) \quad F_I(e^{jW}) = -F_I(e^{-jW})$$

若 $f[k]$ 实偶对称, 则 $F(e^{jW})$ 实偶对称。

若 $f[k]$ 实奇对称, 则 $F(e^{jW})$ 虚奇对称。

二、DTFT性质

3. 时移

$$\text{DTFT}\{f[k - k_0]\} = e^{-jWk_0} F(e^{jW})$$

4. 频移

$$\text{DTFT}\{e^{jW_0k} f[k]\} = F(e^{j(W-W_0)})$$

5. 时域卷积

$$\text{DTFT}\{f[k] * h[k]\} = F(e^{jW})H(e^{jW})$$

二、DTFT性质

6. 频域卷积

$$\text{DTFT}\{f[k]h[k]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{jq})H(e^{j(W-q)})dq$$

7. 频域微分

$$\text{DTFT}\{kf[k]\} = j \frac{dF(e^{jW})}{dW}$$

8. 能量定理

$$\sum_k |f[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{jW})|^2 dW$$

例 4: $F(e^{jW}) = 1 - |W|/\pi \quad |W| \leq \pi$, 求 $f[k]$.

解:

$$G(e^{jW}) = \frac{dF(e^{jW})}{dW} = \begin{cases} 1/\pi & -\pi \leq W < 0 \\ -1/\pi & 0 < W \leq \pi \end{cases}$$

$$g[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{jW}) e^{jkW} dW = -\frac{j}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sin kW dW$$

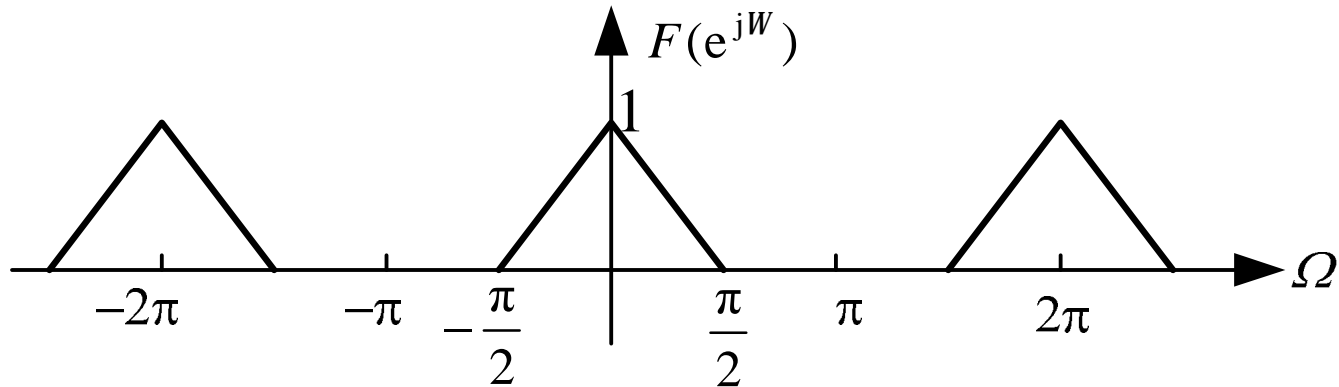
$$= \begin{cases} 0 & k = 0 \\ j[(-1)^k - 1]/(\pi^2 k) & k \neq 0 \end{cases}$$

利用频域微分特性

$$f[k] = \frac{g[k]}{jk} = \begin{cases} 0.5 & k = 0 \\ 0 & k = \text{even} \\ 2/(\pi^2 k^2) & k = \text{odd} \end{cases}$$

例5 已知 $f[k]$ 的频谱如下图，试求

$$\text{DTFT}\{f[k]\cos(\pi k)\}$$

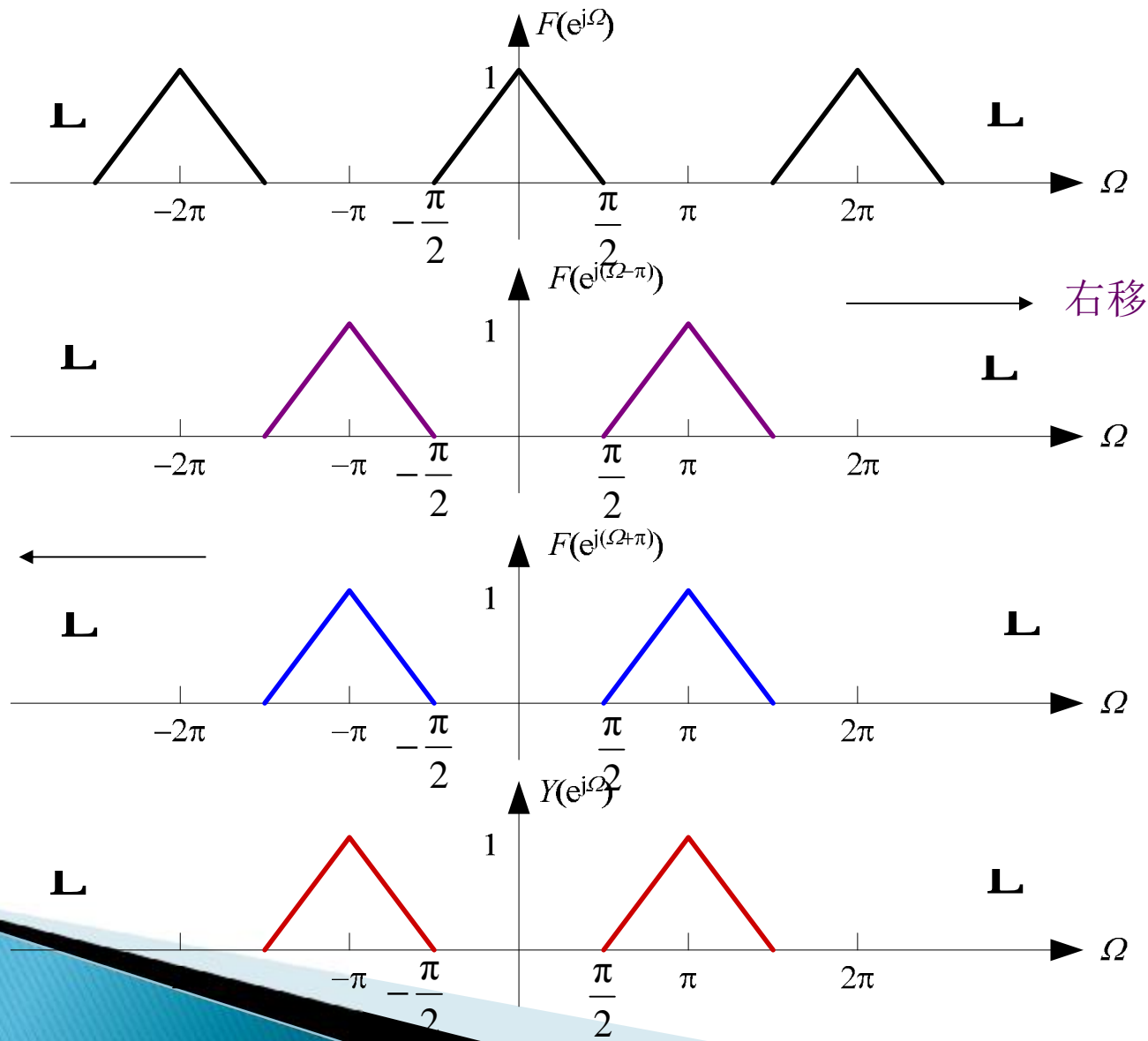


解：

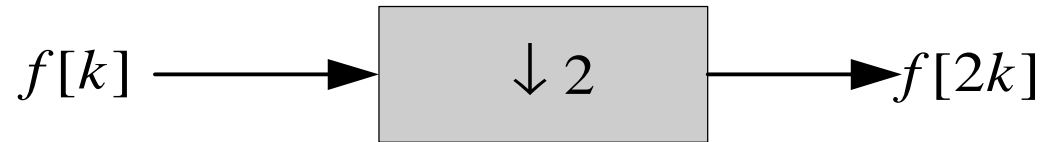
利用频移特性，可得

$$\text{DTFT}\{f[k]\cos(\pi k)\} = [F(e^{j(\Omega-\pi)}) + F(e^{j(\Omega+\pi)})] / 2$$

$$\text{例5 } \text{DTFT}\{f[k]\cos(\pi k)\} = [F(e^{j(W-\pi)}) + F(e^{j(W+\pi)})] / 2$$



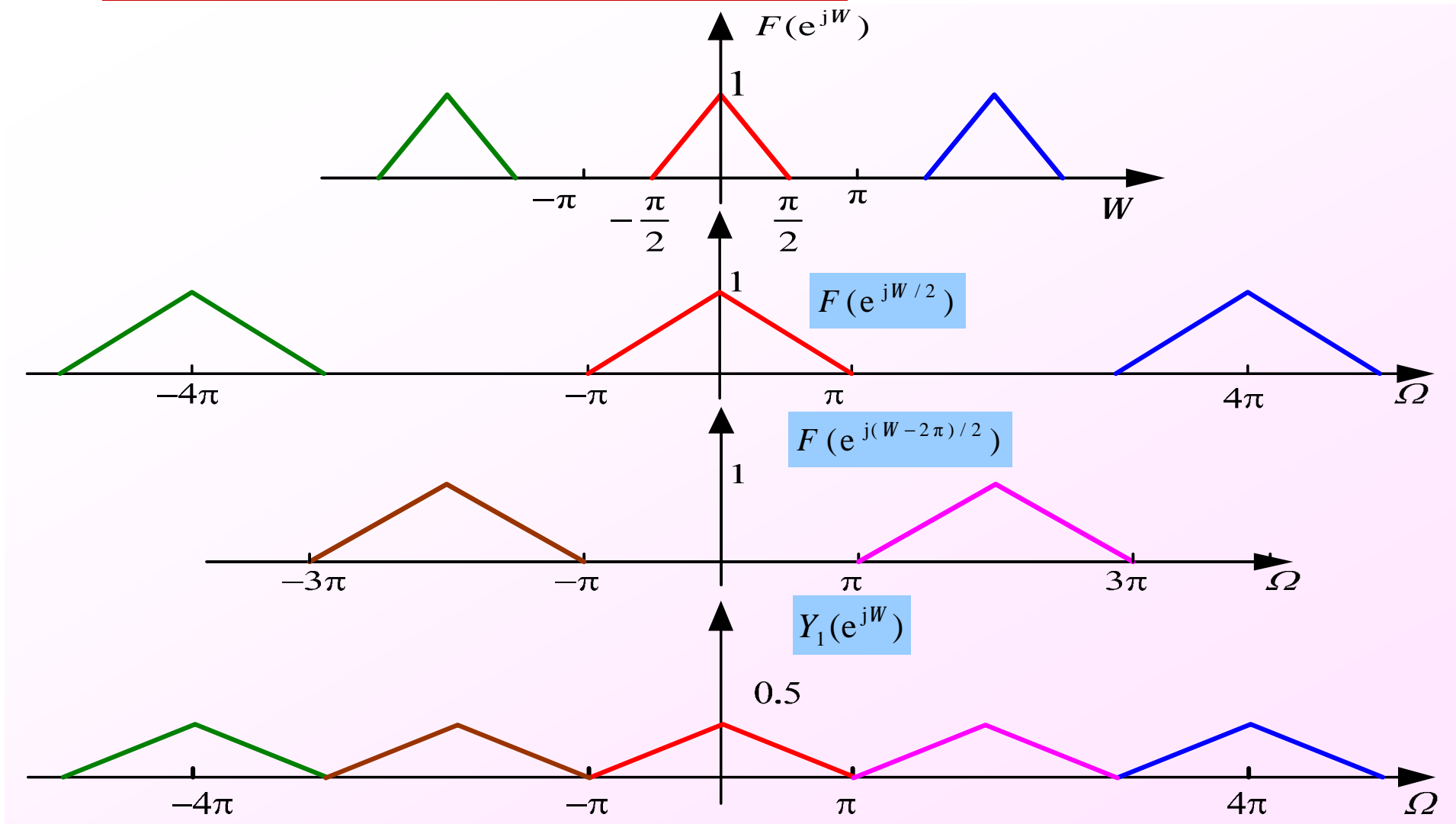
三、抽取信号的频谱



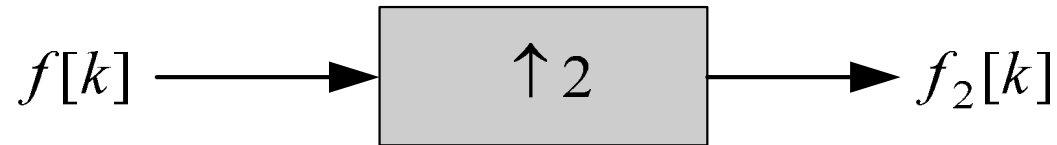
$$\begin{aligned} \text{DTFT}\{f[2k]\} &= Y_1(e^{jW}) = \sum_k f[2k]e^{-jWk} \\ &= \sum_{k=\text{even}} f[k]e^{-jWk/2} \\ &= \sum_k \frac{f[k] + e^{j\pi k} f[k]}{2} e^{-jWk/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[F(e^{j\frac{W}{2}}) + F(e^{j\frac{W-2\pi}{2}}) \right] \end{aligned}$$

三、抽取信号的频谱

$$Y_1(e^{jW}) = \frac{1}{2} [F(e^{j\frac{W}{2}}) + F(e^{j\frac{W-2\pi}{2}})]$$



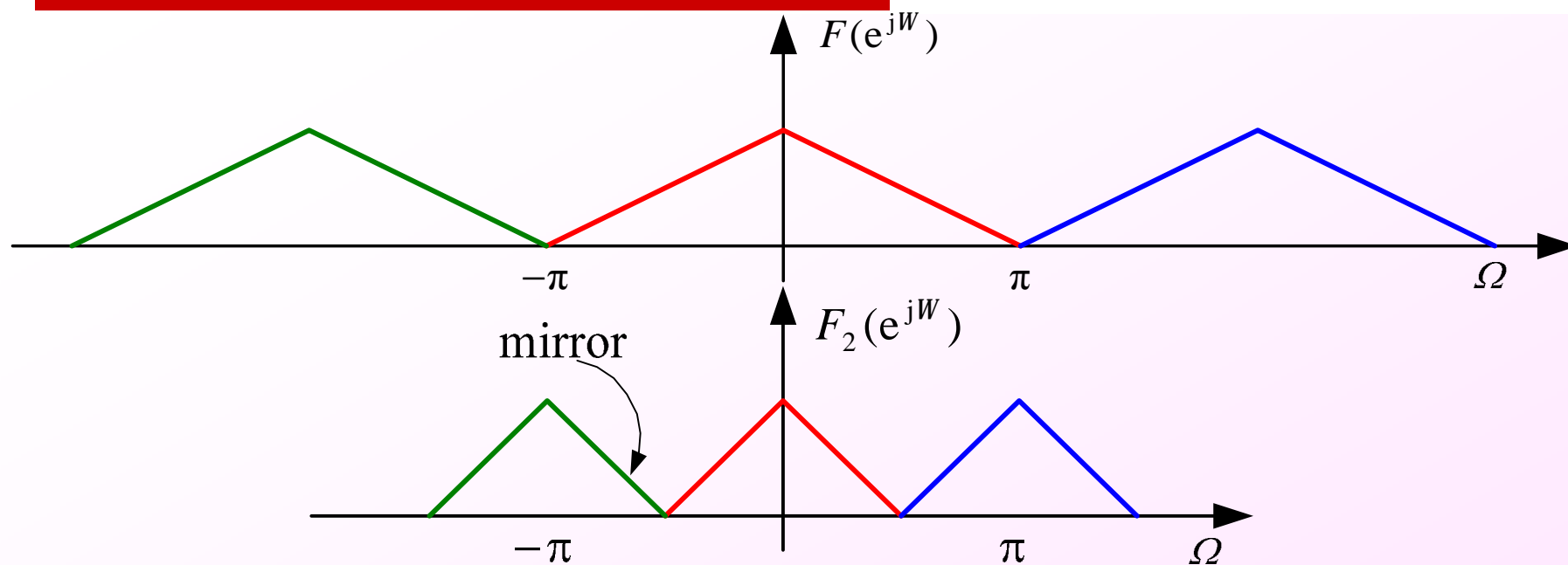
四、内插信号的频谱



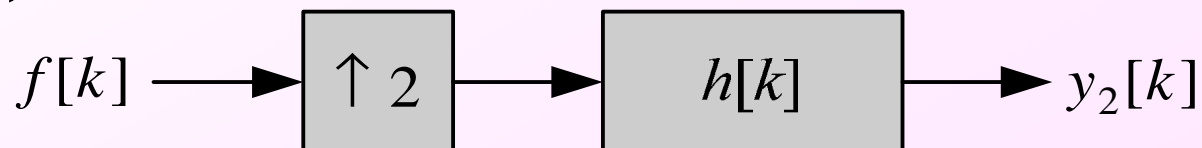
$$f_2[k] = \begin{cases} f[k/2] & k \text{ 是 } 2 \text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_2(e^{jW}) = \sum_{k=\text{even}} f[k/2] e^{jkW} = \sum_l f[l] e^{j2lW} = F(e^{j2W})$$

四、内插信号的频谱

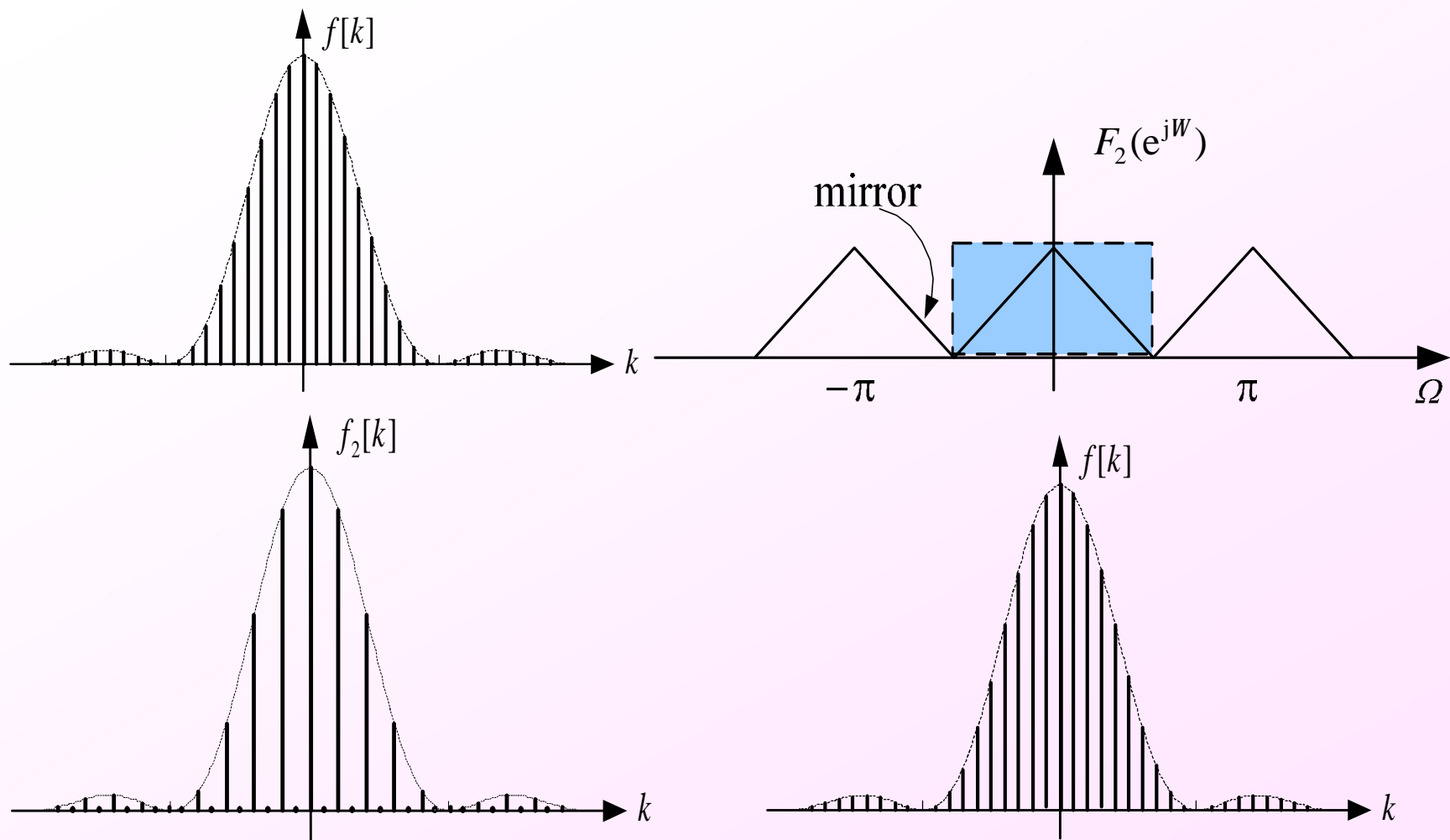


为了去掉mirror



$$y_2[k] = \sum_{n=\text{even}} f[n/2]h[k-n] = \sum_l f[l]h[k-2l]$$

四、内插信号的频谱



五、信号傅里叶分析小结

傅里叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件
- 拉格朗日反对发表
- 1822年首次发表“热的分析理论”中



五、信号傅里叶分析小结

傅立叶的两个最主要的贡献——

- “周期信号都可表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”——傅里叶的第一个主要论点
- “非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示”——傅里叶的第二个主要论点

五、信号傅里叶分析小结

	连续频率	离散频率
连续时间	CTFT	CTFS
离散时间	DTFT	DTFS

五、信号傅里叶分析小结

CTFS

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{T_0+t_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

频谱函数

CTFT

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

频谱密度函数



五、信号傅里叶分析小结


DTFS

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F[m] e^{j\frac{2p}{N}mk}$$

$$F[m] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j\frac{2p}{N}mk}$$

DTFT

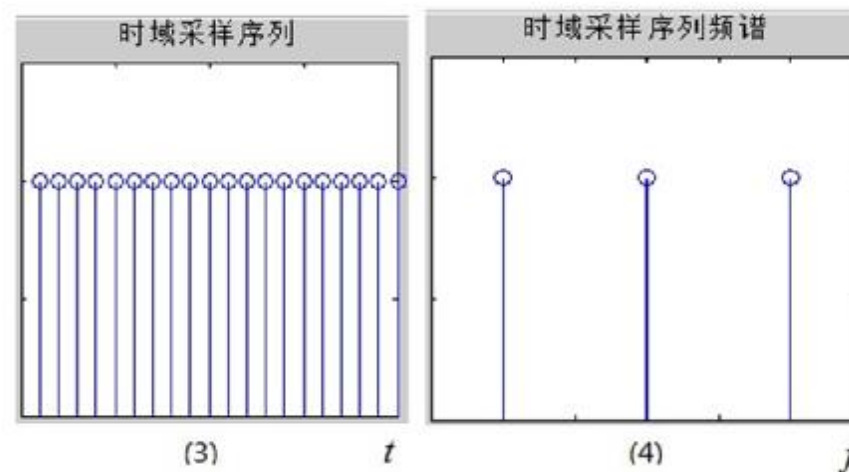
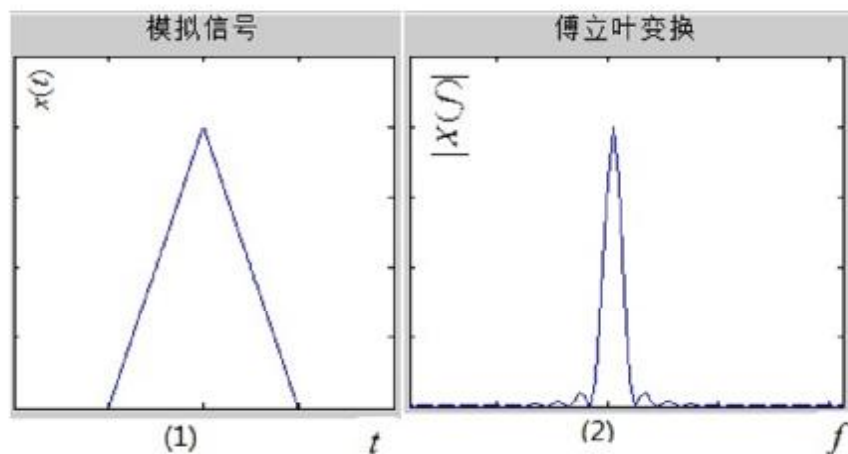
$$f[k] = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega$$

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j\Omega k}$$


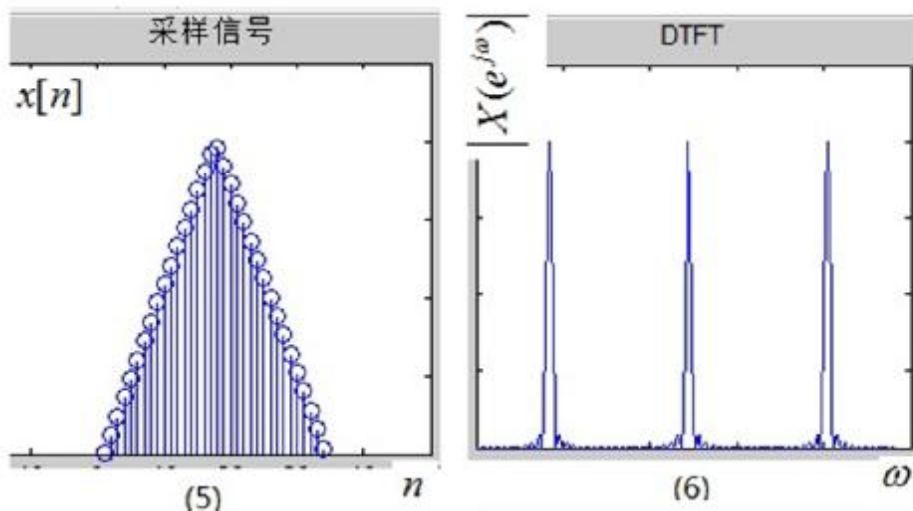
五、信号傅里叶分析小结

	连续时间		离散时间	
	时域	频域	时域	频域
傅里叶级数	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ <p>连续时间, 在时间上是周期的</p>	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <p>离散频率, 在频率上是非周期的</p>	$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ <p>离散时间, 在时间上是周期的</p>	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ <p>离散频率, 在频率上是周期的</p>
		↖ 对	← 对偶 →	
傅里叶变换	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$ <p>连续时间, 在时间上是非周期的</p>	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \text{ ①}$ <p>连续频率, 在频率上是非周期的</p>	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \text{ ①}$ <p>离散时间, 在时间上是非周期的</p>	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ <p>连续频率, 在频率上是周期的</p>
	← 对偶 →	偶 ↘		

五、信号傅里叶分析小结

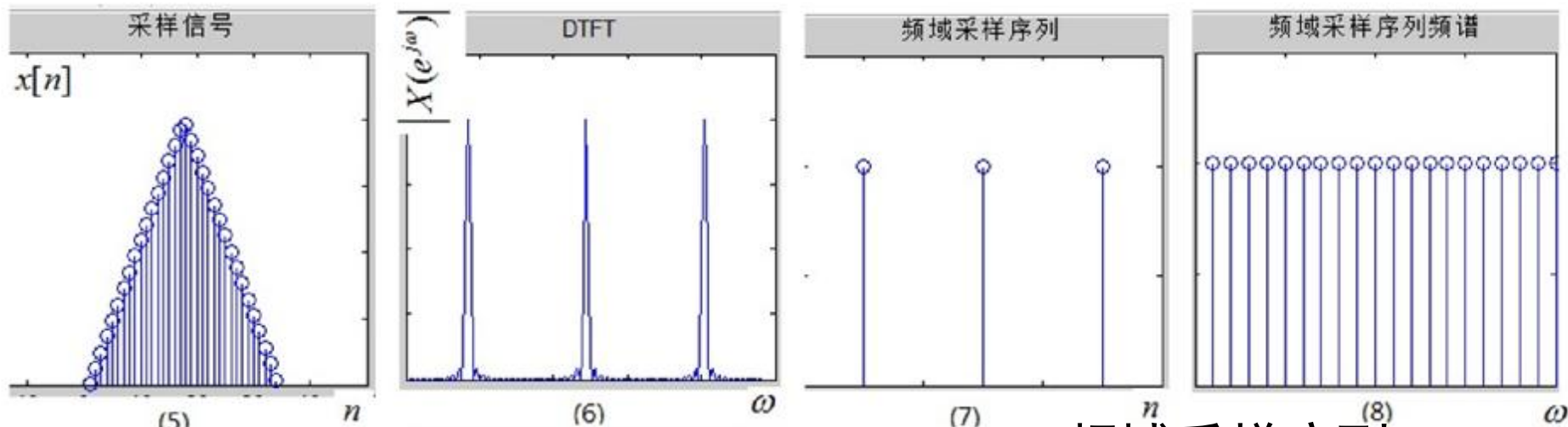


时域采样序列

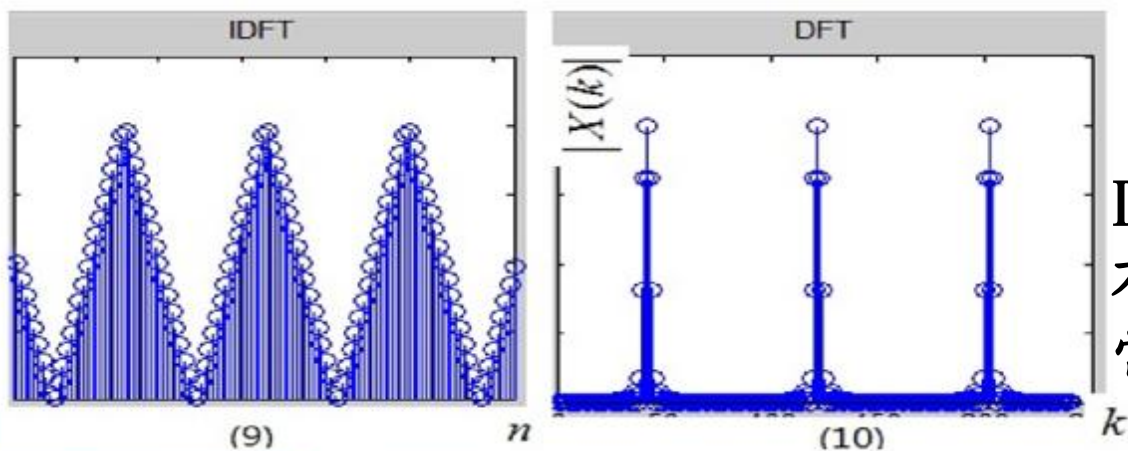


DTFT
(离散时间傅里叶变换)
常用FFT快速计算

五、信号傅里叶分析小结



频域采样序列



DFT (离散傅里叶变换)
有限长度序列的傅里叶变换
常用FFT快速计算

傅立叶变换的基本性质

1. 线性特性: $af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{F} aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$
2. 共轭对称特性: $f^*(t) \xleftrightarrow{F} F^*(-j\omega); f^*(-t) \xleftrightarrow{F} F^*(j\omega)$
3. 对称互易特性: $F(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)$
4. 展缩特性: $f(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F(j\frac{\omega}{a})$

傅立叶变换的基本性质

5. 时移特性: $f(t - t_0) \xleftrightarrow{F} F(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
6. 频移特性: $f(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} F[j(\omega - \omega_0)]$
7. 时域卷积特性: $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$
8. 频域卷积特性: $f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$

傅立叶变换的基本性质

9. 时域微分特性: $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \stackrel{F}{\leftrightarrow} (j\omega)^n \cdot F(j\omega)$

10. 积分特性: $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$

修正的时域微分特性 $F(j\omega) = \pi(f(\infty) + f(-\infty))\delta(\omega) + \frac{F_1(j\omega)}{j\omega}$

11. 频域微分特性: $t^n f(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} j^n \cdot \frac{dF^n(j\omega)}{d\omega^n}$

12. 能量定理: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

课后作业：

P178:

5-15: (1)

5-16: (1)

5-17: (2)

5-18: (3) (4)