

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

wanghg.gr.xjtu.edu.cn

系统的频域分析及其应用

连续时间系统的频率响应

连续信号通过系统响应的频域分析

无失真系统与理想低通

抽样与抽样定理

离散时间系统的频域分析

连续系统的频率响应

虚指数信号 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 通过LTI系统的响应

任意非周期信号通过系统的响应

系统频响 $H(j\omega)$ 的定义与物理意义

$H(j\omega)$ 与 $h(t)$ 的关系

$H(j\omega)$ 的求解方法

1. 虚指数信号 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 通过连续 LTI 系统的零状态响应

$$\begin{aligned}y_f(t) &= e^{j\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')} h(t') dt' \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t'} h(t') dt' \\ &= e^{j\omega t} H(j\omega)\end{aligned}$$

其中

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} h(t) dt$$

2. 任意非周期信号通过连续LTI系统的零状态响应

若信号 $f(t)$ 的Fourier存在，则可由虚指数信号 $e^{j\omega t}(-\infty < t < \infty)$ 的线性组合表示，即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

由系统的线性时不变特性，可推出信号 $f(t)$ 作用于系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。



2. 任意非周期信号通过连续系统的零状态响应

$$T\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

由均匀性

$$T\left\{\frac{1}{2\pi} F(j\omega)e^{j\omega t}\right\} = \frac{1}{2\pi} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}$$

由积分特性

$$T\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

即

$$y_f(t) = T\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$Y_f(j\omega)$$

3. 连续系统的频率响应 $H(j\omega)$ 的定义与物理意义

$$Y_f(j\omega) = H(j\omega) F(j\omega)$$

LTI系统把频谱为 $F(j\omega)$ 的输入改变成频谱为 $H(j\omega) F(j\omega)$ 的响应，改变的规律完全由 $H(j\omega)$ 决定。

！ $H(j\omega)$ 称为系统的频率响应，定义为

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} h(t) dt \quad \text{或} \quad H(j\omega) = \frac{Y_f(j\omega)}{F(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

幅度响应

相位响应

4. $H(j\omega)$ 与 $h(t)$ 的关系

I $H(j\omega)$ 的物理意义:


$H(j\omega)$ 反映了系统对输入信号不同频率分量的传输特性

由 $H(j\omega)$ 的定义, 显然有

$$H(j\omega) = F[h(t)]$$

即 $H(j\omega)$ 等于系统冲激响应 $h(t)$ 的Fourier变换

5. $H(j\omega)$ 的求解方法

- ü 由LTI系统的冲激响应的傅里叶变换计算；
 - ü 由描述LTI系统的微分方程直接计算；
 - ü 由电路的零状态频域等效电路模型计算。
- 

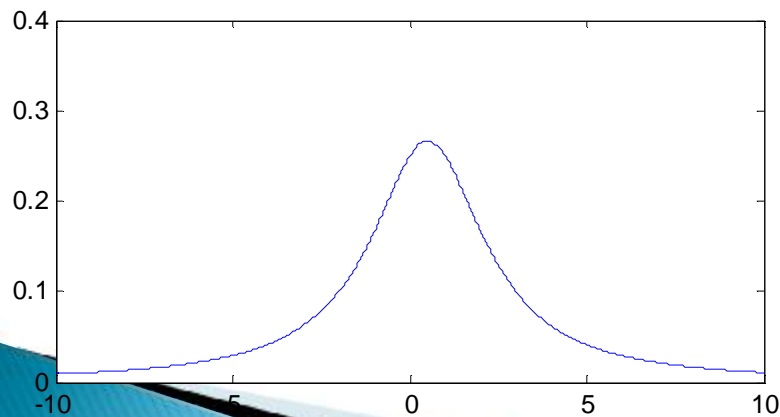
例1 已知某LTI系统的冲激响应为

$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$, 求系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

解: 利用 $H(j\omega)$ 与 $h(t)$ 的关系

$$H(j\omega) = F[h(t)] = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$



例2 已知描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t),$$

求系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

解：利用Fourier变换的微分特性，微分方程的频域表示式为

$$(j\omega)^2 Y_f(j\omega) + 3j\omega Y_f(j\omega) + 2Y_f(j\omega) = F(j\omega)$$

由定义可求得

$$H(j\omega) = \frac{Y_f(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

电路系统的响应

- u Kirchhoff 定理建立系统的微分方程
- u 采用电路基本元件频域模型直接求解



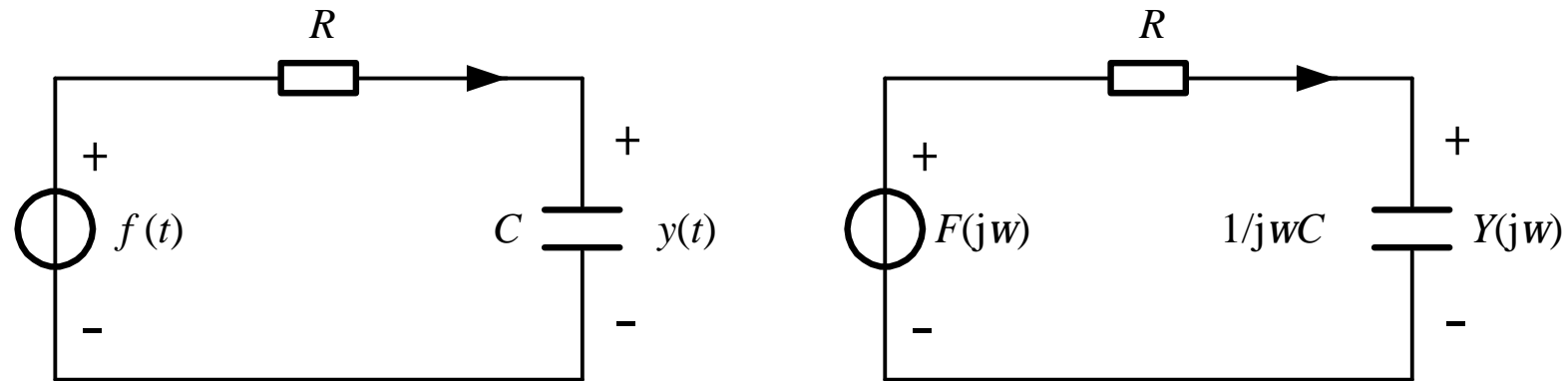
电路基本元件频域模型

电阻: $v_R(t) = Ri_R(t)$ $V_R(j\omega) = RI_R(j\omega)$ $Z_R = \frac{V_R(j\omega)}{I_R(j\omega)} = R$

电感: $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ $V_L(j\omega) = j\omega LI_L(j\omega)$ $Z_L = \frac{V_L(j\omega)}{I_L(j\omega)} = j\omega L$

电容: $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$ $I_C(j\omega) = j\omega CV_C(j\omega)$ $Z_C = \frac{V_C(j\omega)}{I_C(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C}$

例3 图示RC电路系统，激励电压源为 $f(t)$ ，输出电压 $y(t)$ 为电容两端的电压 $v_c(t)$ ，电路的初始状态为零。求系统的频率响应 $H(j\omega)$ 和冲激响应 $h(t)$ 。



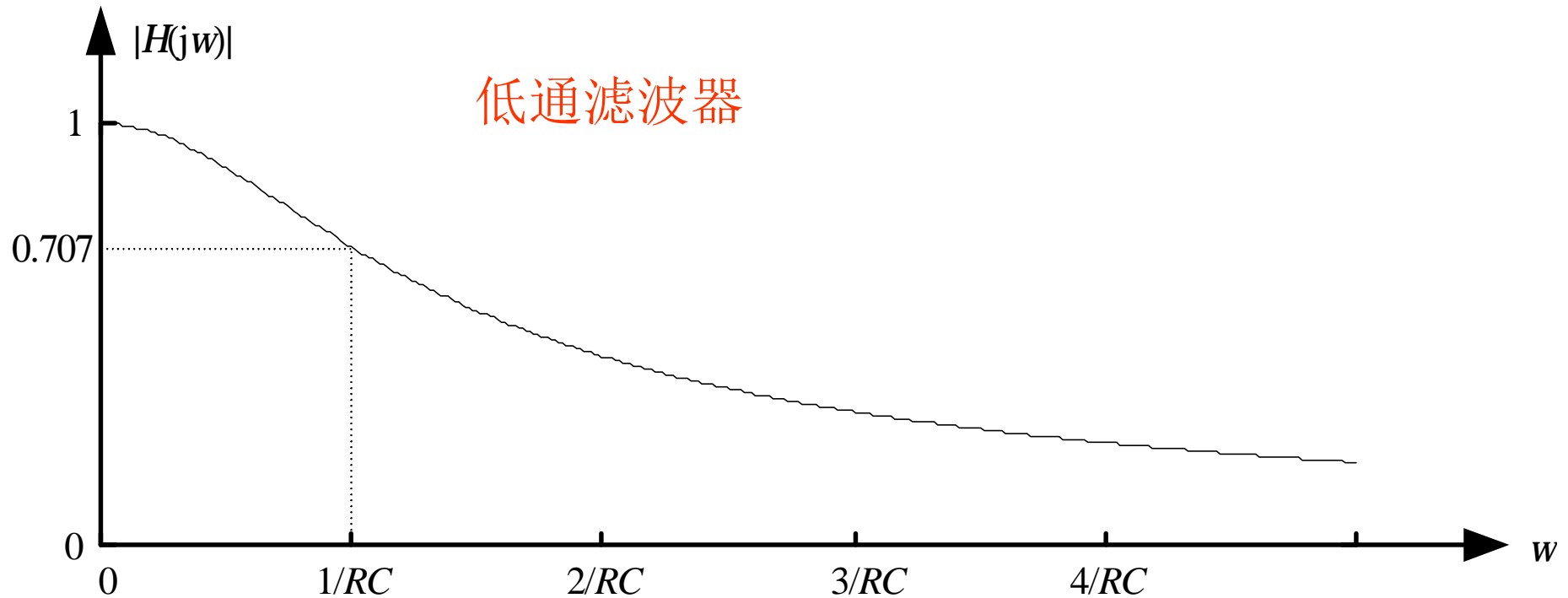
解：RC电路的频域(相量)模型如图，由电路的基本原理有

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

由Fourier反变换，得系统的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)t} u(t)$$

RC电路系统的幅度响应



随着频率的增加，系统的幅度响应 $|H(jw)|$ 不断减小，说明信号的频率越高，信号通过该系统的损耗也就越大。

由于 $|H(j(1/RC))|=0.707$ ，所以把 $w_c=1/RC$ 称为该系统的3dB截频。

连续信号通过系统响应的频域分析

连续非周期信号通过系统响应的频域分析

连续周期信号通过系统响应的频域分析

正弦信号通过系统的响应

任意周期信号通过系统的响应

一、连续非周期信号通过LTI系统的响应的频域分析

1. 已知描述LTI系统的微分方程

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \mathbf{L} + a_1 y(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \mathbf{L} + b_1 f(t) + b_0 f(t) \end{aligned}$$

方程两边进行Fourier变换，并利用时域微分特性，有

$$\begin{aligned} [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \mathbf{L} + a_1 (j\omega) + a_0] \cdot Y_f(j\omega) \\ = [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \mathbf{L} + b_1 (j\omega) + b_0] \cdot F(j\omega) \end{aligned}$$

解此代数方程即可求得零状态响应的频谱 $Y_f(j\omega)$ 。

$$Y_f(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \mathbf{L} + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \mathbf{L} + a_1 (j\omega) + a_0} F(j\omega)$$

一、连续非周期信号通过LTI系统的响应的频域分析

2. 已知系统的频域响应

$$Y_f(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$$

对 $Y_f(j\omega)$ 进行Fourier反变换，可得

$$y_f(t) = F^{-1}[Y_f(j\omega)]$$

一、连续非周期信号通过LTI系统的响应的频域分析

ü 系统零状态响应频域分析方法与卷积积分法的关系：

两种分析方法实质相同，只不过是表达信号的基本信号不同。

Fourier变换的时域卷积定理是联系两者的桥梁。



例1 已知描述某LTI系统的微分方程为

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3f'(t) + 4f(t)$, 系统的输入激励 $f(t) = e^{-3t}u(t)$, 求系统的零状态响应 $y_f(t)$ 。

解: 由于输入激励 $f(t)$ 的频谱函数为

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

系统的频率响应由微分方程可得

$$H(j\omega) = \frac{3(j\omega) + 4}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} = \frac{3(j\omega) + 4}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$$

故系统的零状态响应 $y_f(t)$ 的频谱函数 $Y_f(j\omega)$ 为

$$Y_f(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{3(j\omega) + 4}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$y_f(t) = F^{-1}[Y_f(j\omega)] = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

二、连续周期信号通过LTI系统的响应的频域分析

1. 正弦信号通过系统的响应

$$f(t) = \sin(\omega_0 t + q), \quad -\infty < t < \infty$$

由Euler公式可得

$$f(t) = \frac{1}{2j} (e^{j(\omega_0 t + q)} - e^{-j(\omega_0 t + q)})$$

利用虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 作用在系统上响应的特点及系统的线性特性，可得零状态响应 $y(t)$ 为

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2j} [H(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + q)} - H(-j\omega_0)e^{-j(\omega_0 t + q)}] \\ &= |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + f(\omega_0) + q) \end{aligned}$$

二、连续周期信号通过LTI系统的响应的频域分析

1. 正弦信号通过系统的响应

$$T\{\sin(\omega_0 t + q)\} = |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + f(\omega_0) + q)$$

同理 $T\{\cos(\omega_0 t + q)\} = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + f(\omega_0) + q)$

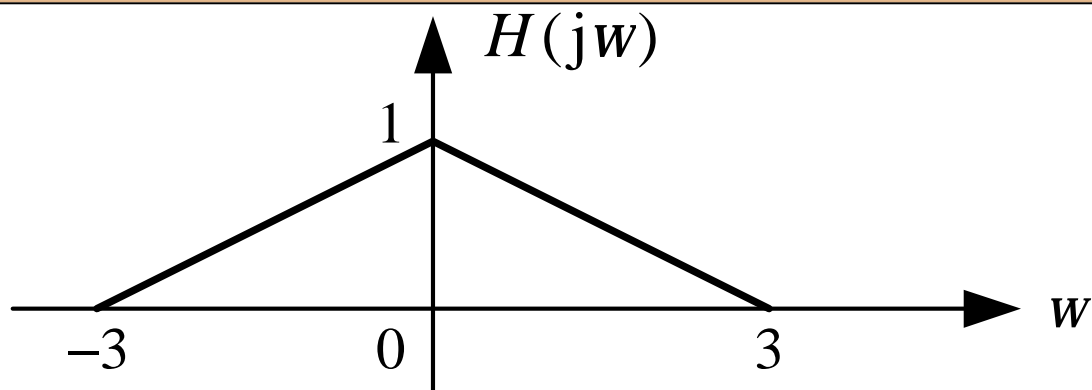
p 结论：正、余弦信号作用于线性时不变系统时，其输出的零状态响应 $y(t)$ 仍为同频率的正、余弦信号。

ü 输出信号的幅度 $y(t)$ 由系统的幅度响应 $|H(j\omega_0)|$ 确定

ü 输出信号的相位相对于输入信号偏移了 $f(\omega_0)$

例2 已知一连续时间系统的频响特性如图所示，输入信号 $f(t) = 5 + 3\cos 2t + \cos 4t$ 时，试求该系统的稳态响应 $y(t)$ 。

解：



利用余弦信号作用在系统上的零状态响应的特点，即

$$T\{\cos(\omega_0 t + q)\} = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0) + q)$$

可以求出信号 $f(t)$ 作用在系统上的稳态响应为

$$\begin{aligned} T\{f(t)\} &= 5H(j0) + 3H(j2)\cos 2t + H(j4)\cos 4t \\ &= 5 + \cos 2t \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

二、连续周期信号通过LTI系统的响应的频域分析

2. 任意周期信号通过系统的响应

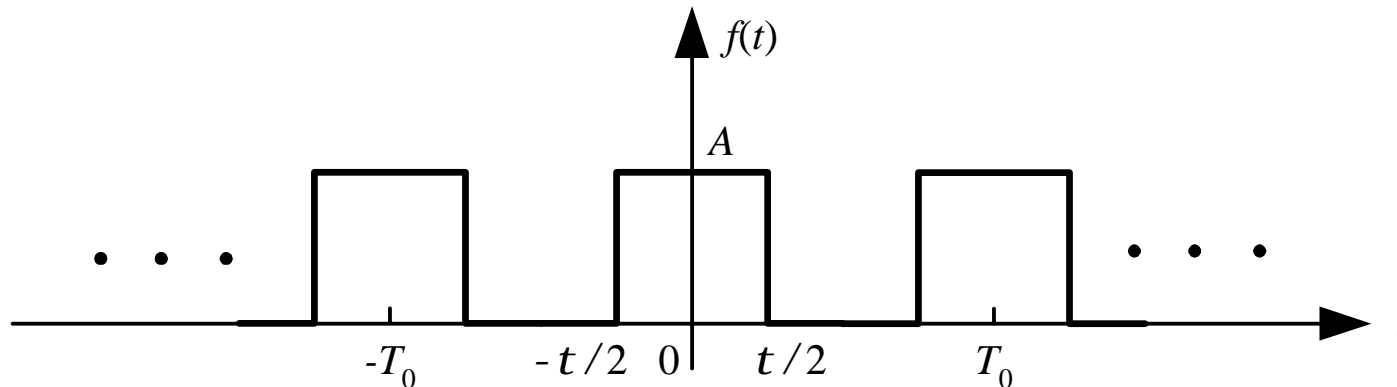
将周期为 T_0 的周期信号 $f(t)$ 用Fourier级数展开为

$$f(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\omega_0 = 2\pi/T_0)$$

利用虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 作用在系统上响应的特点及线性特性可得系统的零状态响应为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n T\{e^{jn\omega_0 t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

例3 求图示周期方波信号通过LTI系统
 $H(j\omega) = 1/(a+j\omega)$ 的响应 $y(t)$ 。



解： 对于周期方波信号，其Fourier系数为

$$C_n = \frac{At}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right)$$

可得系统响应 $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$

$$y(t) = \frac{At}{aT} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{At}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right) \text{Re}\left\{ \frac{e^{jn\omega_0 t}}{a + jn\omega_0} \right\}$$

系统响应频域分析小结

✦ 优点：求解系统的零状态响应时，可以直观地体现信号通过系统后信号频谱的改变，解释激励与响应时域波形的差异，物理概念清楚。

✦ 不足：

- (1) 只能求解系统的零状态响应，系统的零输入响应仍需按时域方法求解。
- (2) 若激励信号不存在傅里叶变换，则无法利用频域分析法。
- (3) 频域分析法中，傅立叶反变换常较复杂。

✦ 解决方法：采用拉普拉斯变换

系统的频域分析及其应用

连续时间系统的频率响应

连续信号通过系统响应的频域分析

无失真系统与理想低通滤波器

离散时间系统的频域分析

抽样与抽样定理

无失真传输系统与理想滤波器

- ◆ 无失真传输系统
- ◆ 理想滤波器的频率响应
- ◆ 理想低通滤波器
 - ⊙ 冲激响应
 - ⊙ 阶跃响应

一、无失真传输系统

若输入信号为 $f(t)$ ，则无失真传输系统的输出信号 $y(t)$ 应为

$$y(t) = K \cdot f(t - t_d)$$

K 为正常数， t_d 是输入信号通过系统后的延迟时间。

∅ 时域特性

$$h(t) = K \cdot \delta(t - t_d)$$

∅ 频域特性

$$H(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega t_d}$$

其幅度响应和相位响应分别为

$$|H(j\omega)| = K$$

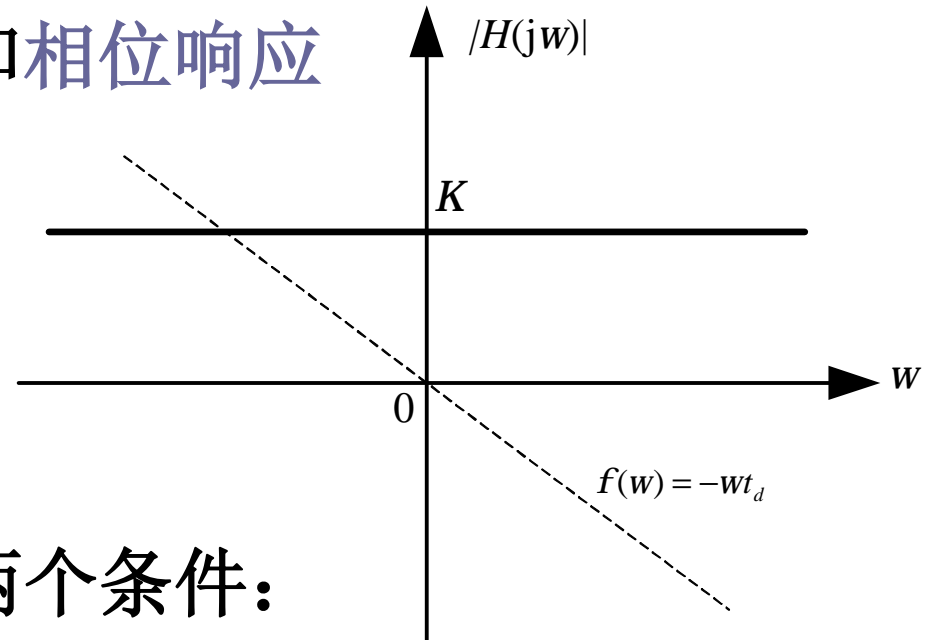
$$\phi(\omega) = -\omega t_d$$

一、无失真传输系统

无失真传输系统的幅度和相位响应

$$|H(j\omega)| = K$$

$$f(\omega) = -\omega t_d$$



ü 无失真传输系统应满足两个条件：

- 1) 系统的幅度响应 $|H(j\omega)|$ 在整个频率范围内应为常数 K ，即系统的带宽为无穷大；
- 2) 系统的相位响应 $f(\omega)$ 在整个频率范围内应与 ω 成正比。

例1 已知一LTI系统的频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$

- (1) 求系统的幅度响应 $|H(j\omega)|$ 和相位响应 $f(\omega)$,
并判断系统是否为无失真传输系统。
- (2) 当输入为 $f(t) = \sin t + \sin 3t$ ($-\infty < t < \infty$) 时, 求系统的稳态响应。
-

解: (1) 因为 $H(j\omega) = e^{-j2\arctan(\omega)}$

所以系统的幅度响应和相位响应分别为

$$|H(j\omega)| = 1 \quad f(\omega) = -2 \arctan(\omega)$$

系统的幅度响应 $|H(j\omega)|$ 为常数, 但相位响应 $f(\omega)$ 不是 ω 的线性函数, 所以系统不是无失真传输系统。

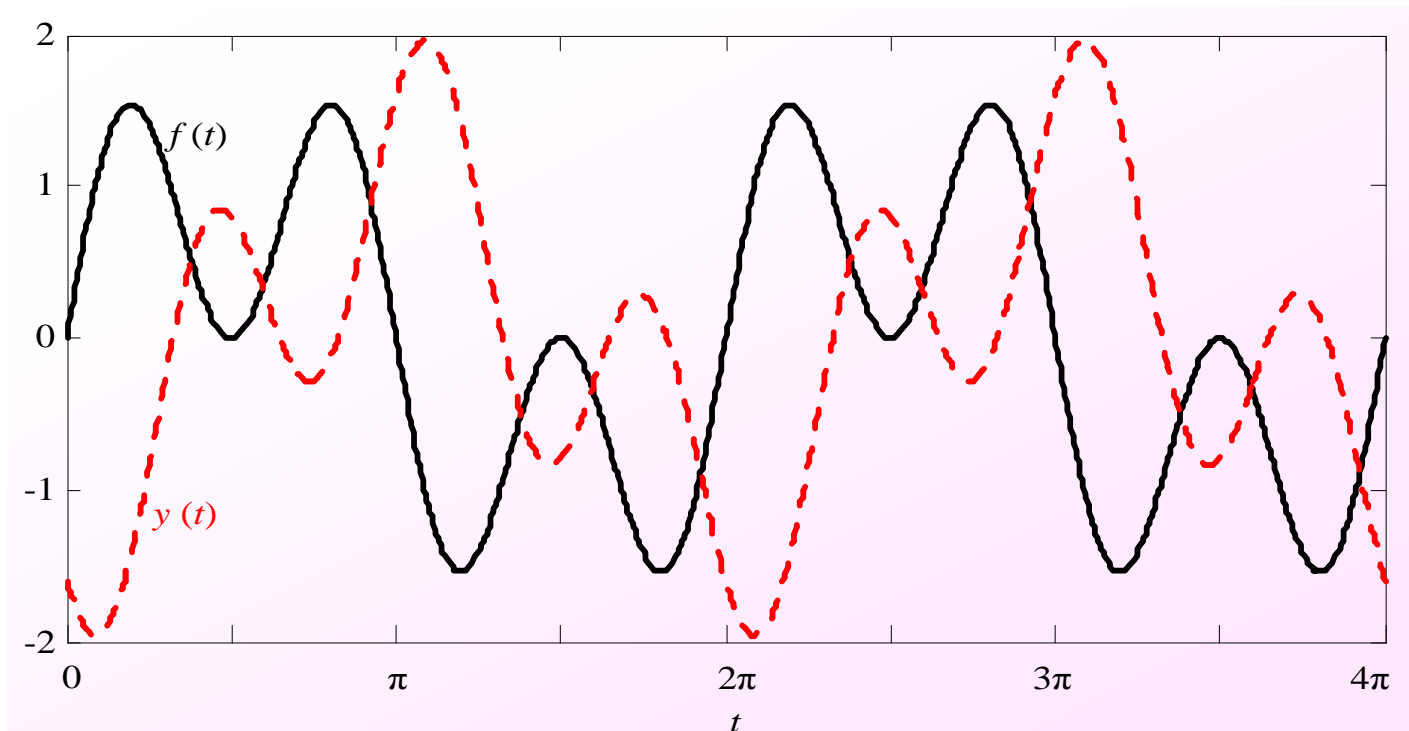
$$\begin{aligned} (2) \quad y(t) &= |H(j1)| \sin(t + f(1)) + |H(j3)| \sin(3t + f(3)) \\ &= \sin(t - \pi/2) + \sin(3t - 0.7952\pi) \end{aligned}$$

例1 已知一LTI系统的频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$

- (1) 求系统的幅度响应 $|H(j\omega)|$ 和相位响应 $f(\omega)$, 并判断系统是否为无失真传输系统。
- (2) 当输入为 $f(t) = \sin t + \sin 3t$ ($-\infty < t < \infty$) 时, 求系统的稳态响应。

解:

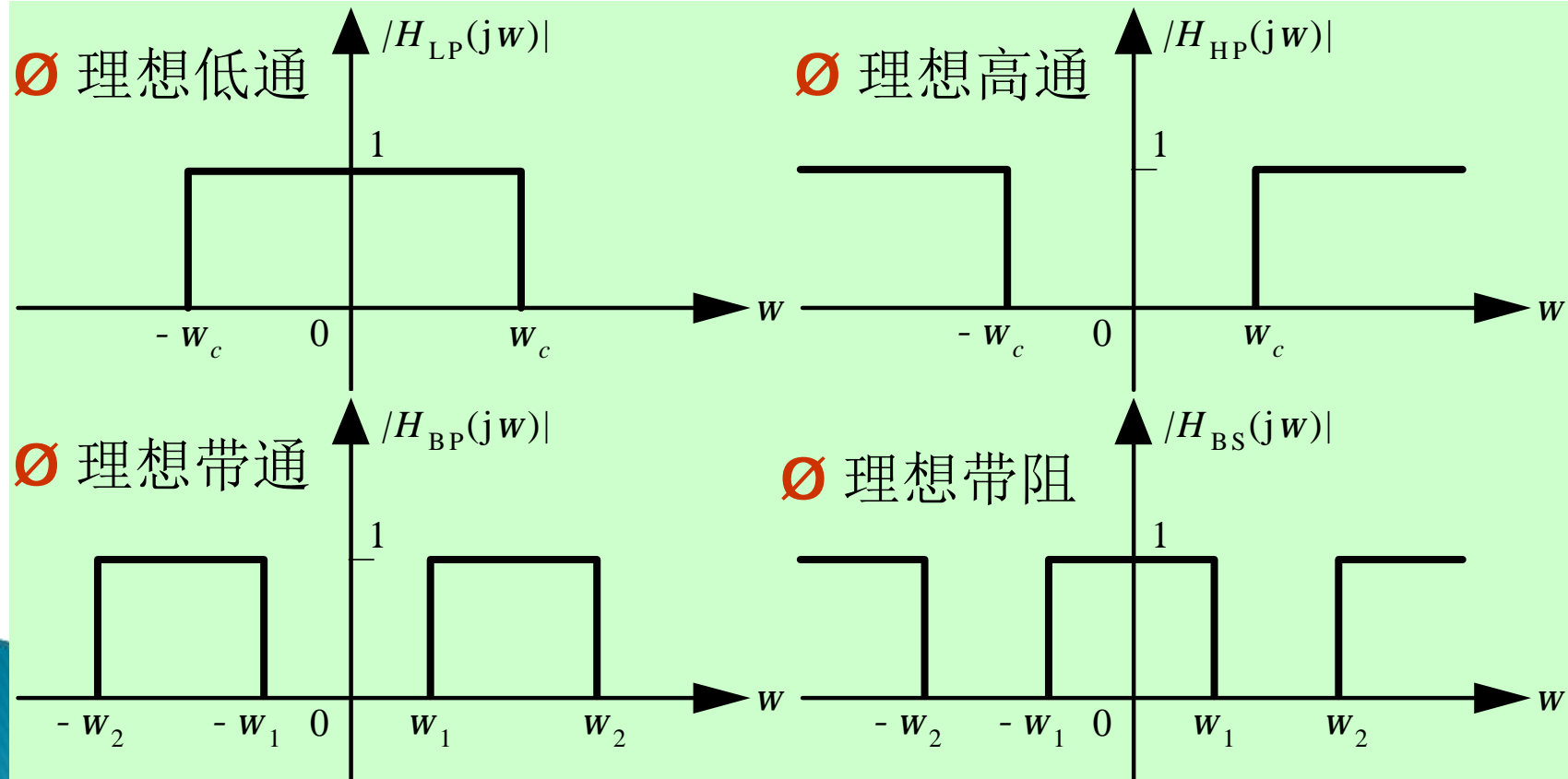
输入和输出
信号的波形



显然, 输出信号相对于输入信号产生了失真。
输出信号的失真是由于系统的非线性相位引起的。

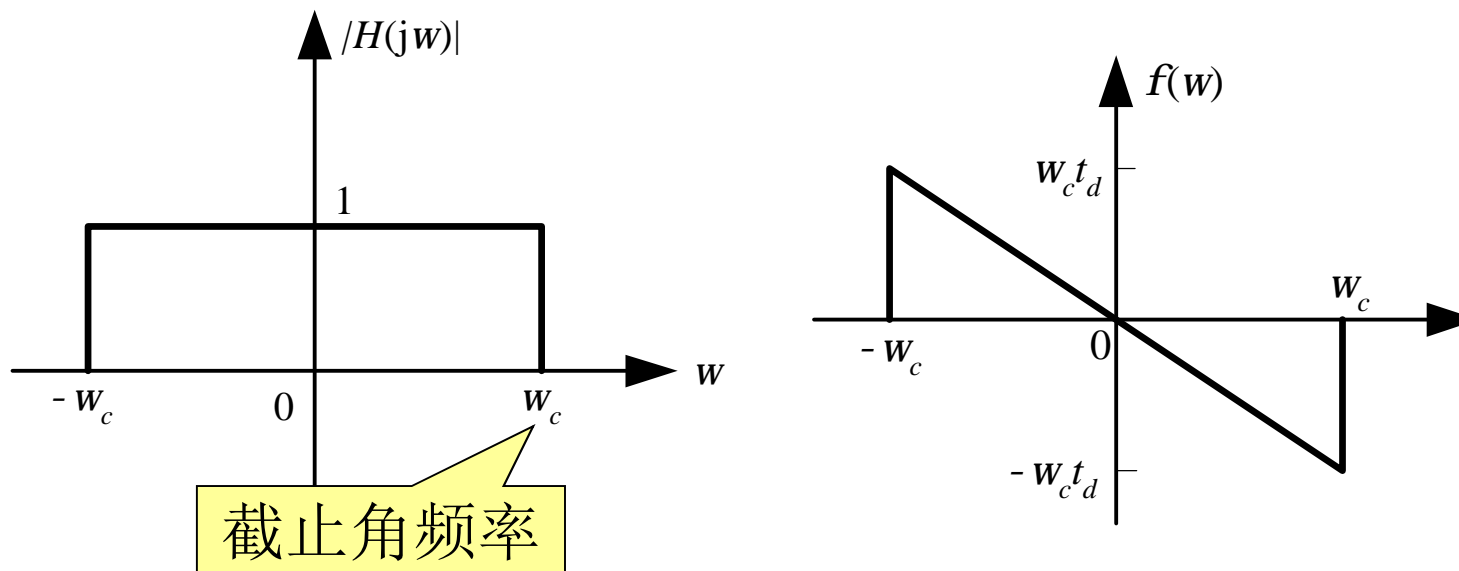
二、理想滤波器的频率响应

滤波器是指能使信号的一部分频率通过，而使另一部分频率通过很少的系统。



三、理想低通滤波器

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = p_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$$

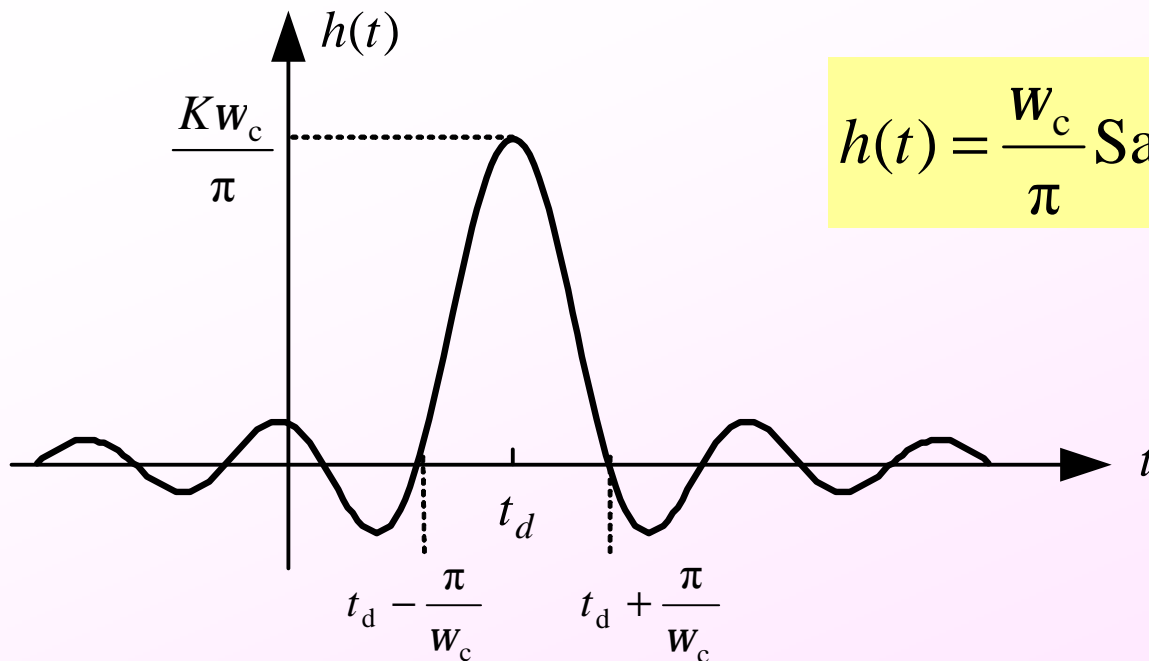


幅度响应 $|H(j\omega)|$ 在通带 $0 \sim \omega_c$ 恒为1，在通带之外为0。
相位响应 $f(\omega)$ 在通带内与 ω 成线性关系

三、理想低通滤波器

1. 理想低通滤波器的冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W_c}^{W_c} e^{j\omega t_d} e^{j\omega t} d\omega$$



$$h(t) = \frac{W_c}{\pi} \text{Sa}[W_c(t - t_d)]$$

三、理想低通滤波器

1. 理想低通滤波器的冲激响应

I 分析:

1) $h(t)$ 的波形是一个抽样函数，不同于输入信号 $d(t)$ 的波形，有失真。

ü 原因：理想低通滤波器是一个带限系统，而冲激信号 $d(t)$ 的频带宽度为无穷大。

ü 减小失真方法：增加理想低通截频 ω_c 。 $h(t)$ 的主瓣宽度为 $2\pi/\omega_c$ ， ω_c 越小，失真越大。当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时，理想低通变为无失真传输系统， $h(t)$ 也变为冲激函数。

三、理想低通滤波器

1. 理想低通滤波器的冲激响应

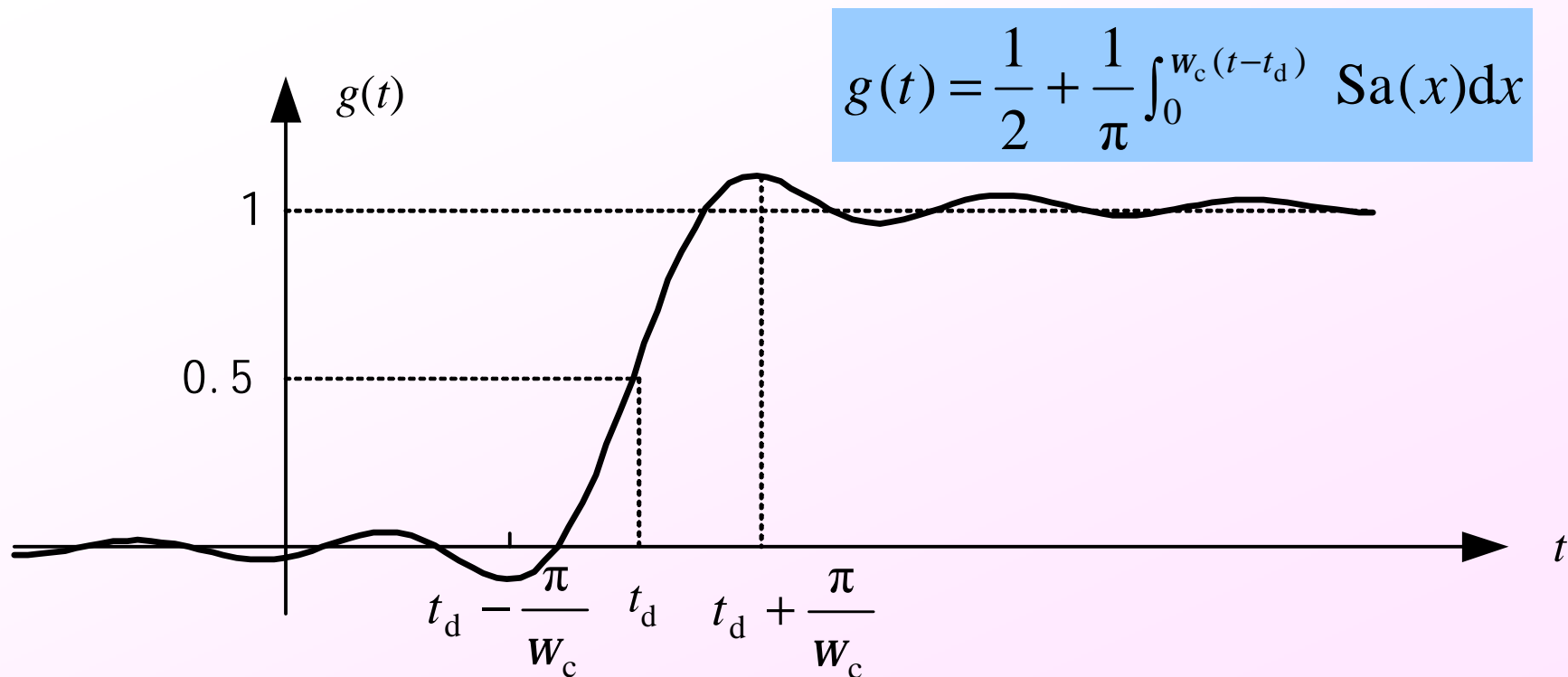
I 分析:

- 2) $h(t)$ 主峰出现时刻 $t = t_d$ 比输入信号 $d(t)$ 作用时刻 $t = 0$ 延迟了一段时间 t_d 。 t_d 是理想低通滤波器相位响应的斜率。
- 3) $h(t)$ 在 $t < 0$ 的区间也存在输出，可见理想低通滤波器是一个非因果系统，因而它是一个物理不可实现的系统。

三、理想低通滤波器

2. 理想低通滤波器的阶跃响应

$$g(t) = h^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt = \frac{W_c}{\pi} \int_{-\infty}^t \text{Sa}[w_c(t - t_d)] dt$$



三、理想低通滤波器

2. 理想低通滤波器的阶跃响应

I 分析:

1) 阶跃响应 $g(t)$ 比输入阶跃信号 $u(t)$ 延迟 t_d 。

t_d 是理想低通滤波器相位响应的斜率。

2) 阶跃响应的建立需要一段时间。

阶跃响应从最小值上升到最大值所需时间称为阶跃响应的上升时间 t_r 。

$t_r = 2\pi/\omega_c$ ，即上升时间 t_r 与理想低通截频 ω_c 成反比。

ω_c 越大，上升时间就越短，当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时， $t_r \rightarrow 0$ 。

三、理想低通滤波器

2. 理想低通滤波器的阶跃响应


I 分析:

3) 存在 Gibbs现象

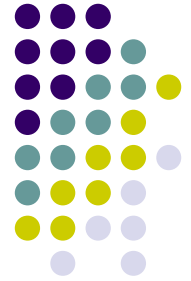
即在间断点的前后出现了振荡，其振荡的最大峰值约为阶跃突变值的9%左右，且不随滤波器带宽的增加而减小。



结论

1. 输出响应的延迟时间取决于理想低通滤波器的相位响应的斜率。
 2. 输入信号在通过理想低通滤波器后，输出响应在输入信号不连续点处产生逐渐上升或下降的波形，上升或下降的时间与理想低通滤波器的通频带宽度成反比。
 3. 理想低通滤波器的通带宽度与输入信号的带宽不相匹配时，输出就会失真。系统的通带宽度越大于信号的带宽，则失真越小，反之，则失真越大。
- 

例2 求带通信号 $f(t)=\text{Sa}(t)\cos 2t$, $-\infty < t < \infty$, 通过线性相位理想低通滤波器 $H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$ 的响应。



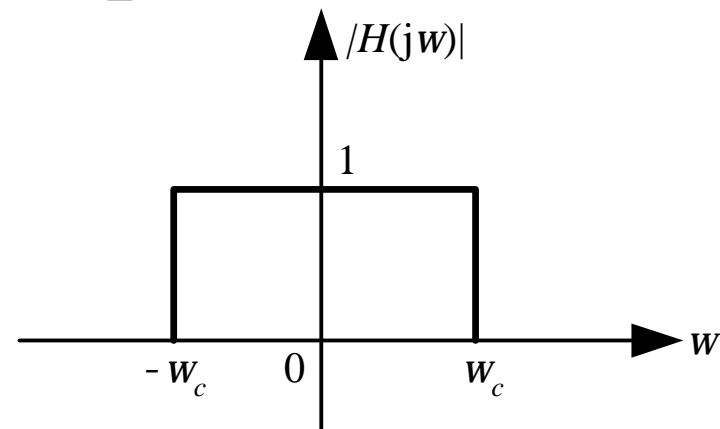
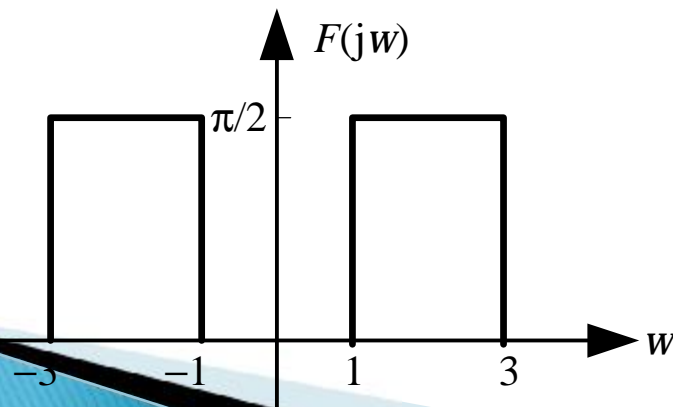
解: 因为

$$\text{Sa}(t) \xleftrightarrow{F} \pi p_2(\omega)$$

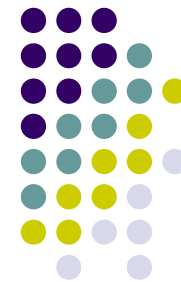
利用Fourier变换的频移特性, 可得

$$F(j\omega) = \frac{\pi}{2} [p_2(\omega + 2) + p_2(\omega - 2)]$$

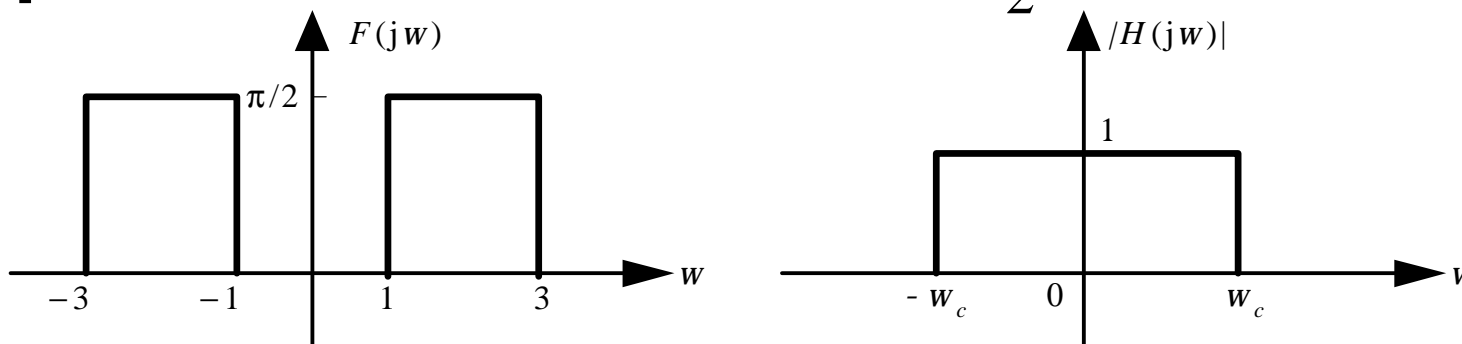
$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} \frac{\pi}{2} [p_2(\omega + 2) + p_2(\omega - 2)]$$



例2 求带通信号 $f(t)=\text{Sa}(t)\cos 2t$, $-\infty < t < \infty$, 通过线性相位理想低通滤波器 $H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$ 的响应。



解: $Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} \frac{\pi}{2} [p_2(\omega + 2) + p_2(\omega - 2)]$



1) 当 $\omega_c > 3$ 时, 输入信号的所有频率分量都能通过系统, 即

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_d} \frac{\pi}{2} [p_2(\omega + 2) + p_2(\omega - 2)]$$

$$y(t) = f(t - t_d) = \text{Sa}(t - t_d)\cos[2(t - t_d)], \quad -\infty < t < \infty$$

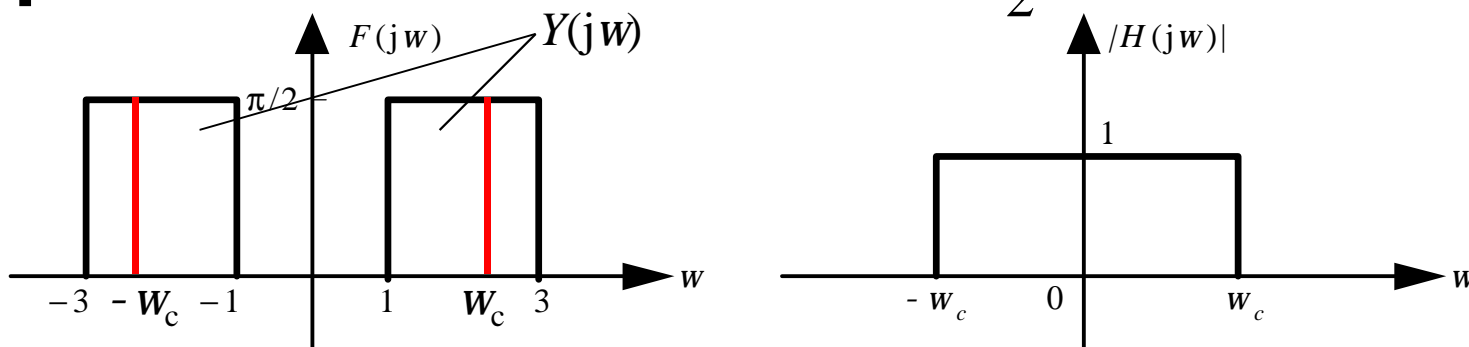
2) 当 $\omega_c < 1$ 时, 输入信号的所有频率分量都不能通过系统, 即

$$Y(j\omega) = 0 \quad y(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

例2 求带通信号 $f(t) = \text{Sa}(t)\cos 2t$, $-\infty < t < \infty$, 通过线性相位理想低通滤波器 $H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$ 的响应。



解: $Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} \frac{\pi}{2} [p_2(\omega + 2) + p_2(\omega - 2)]$



3) 当 $1 < \omega_c < 3$ 时, 只有 $1 \sim \omega_c$ 范围内的频率分量能通过系统, 故

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{2} \left[p_{\omega_c-1} \left(\omega - \frac{\omega_c + 1}{2} \right) + p_{\omega_c-1} \left(\omega + \frac{\omega_c + 1}{2} \right) \right] e^{-j\omega t_d}$$

由抽样信号频谱及Fourier变换的时域和频域位移特性可得

$$y(t) = \frac{\omega_c - 1}{2} \text{Sa} \left[\frac{\omega_c - 1}{2} (t - t_d) \right] \cos \left[\frac{\omega_c + 1}{2} (t - t_d) \right]$$

课后作业：

P208：

6-1

6-2

6-3

6-4： (2)