信号与系统

王洪广/梁志虎
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

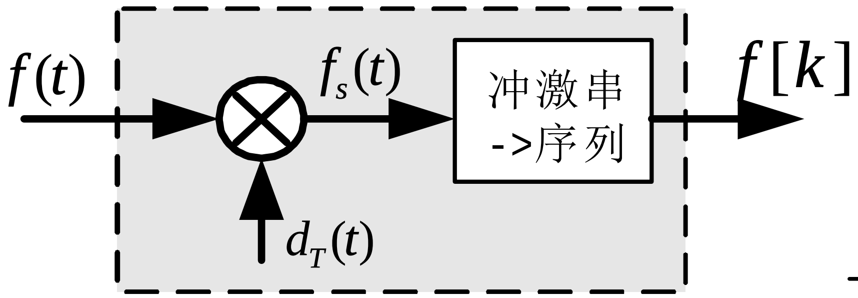
系统的频域分析及其应用

- 连续时间系统的频率响应
- 连续信号通过系统响应的频域分析
- 无失真系统与理想低通
- 抽样与抽样定理
- 调制与解调
- 离散时间系统的频域分析

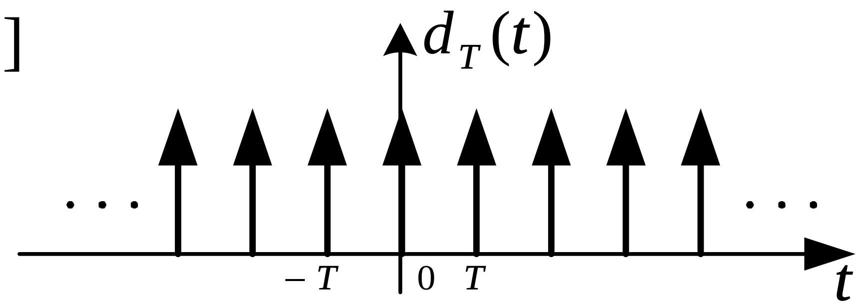
连续时间信号的时域抽样

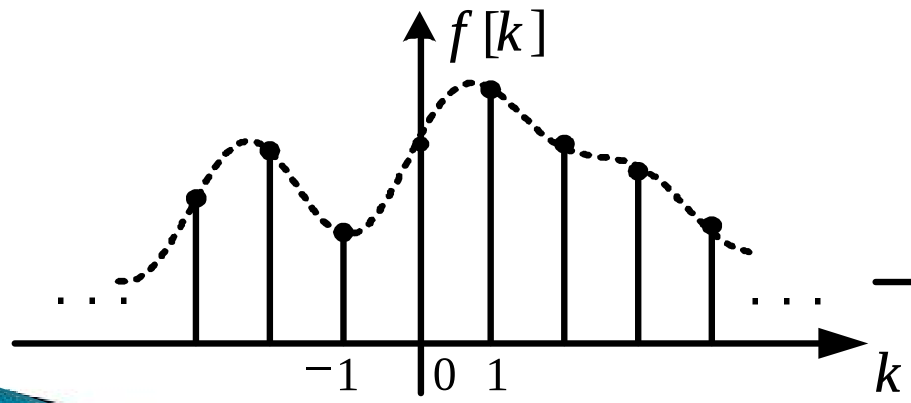
- 信号抽样的理论分析
- 时域抽样定理
- 抽样定理的工程应用
- 信号重建
- 实际应用举例

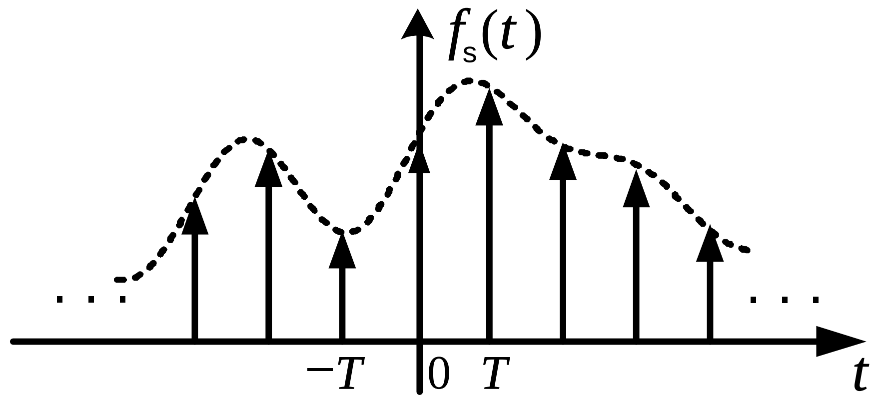
1、信号抽样的理论分析



信号理想抽样模型







$$f_s(t) = f(t) \cdot d_T(t)$$

1、信号抽样的理论分析

l 理想抽样信号的频谱分析

若连续信号$f(t)$的频谱函数为$F(jw)$，则抽样信号

$f_s(t)=f(t)\cdot d_T(t)$ 的频谱函数$F_s(jw)$为

$$F_S(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[j(\omega-n\omega_s)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[kT]\,e^{-jk\omega T}$$

且序列$f[k]$的频谱等于抽样信号的频谱，即有

$$F(e^{j\Omega})=F_s(jw)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT)e^{-j\Omega k}\quad(设\Omega=wT)$$

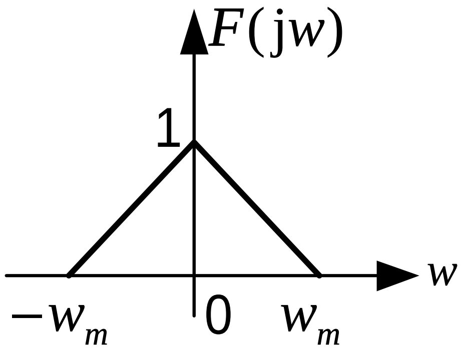
其中：T为抽样间隔，$w_s=2\pi/T$为抽样角频率。

1、信号抽样的理论分析

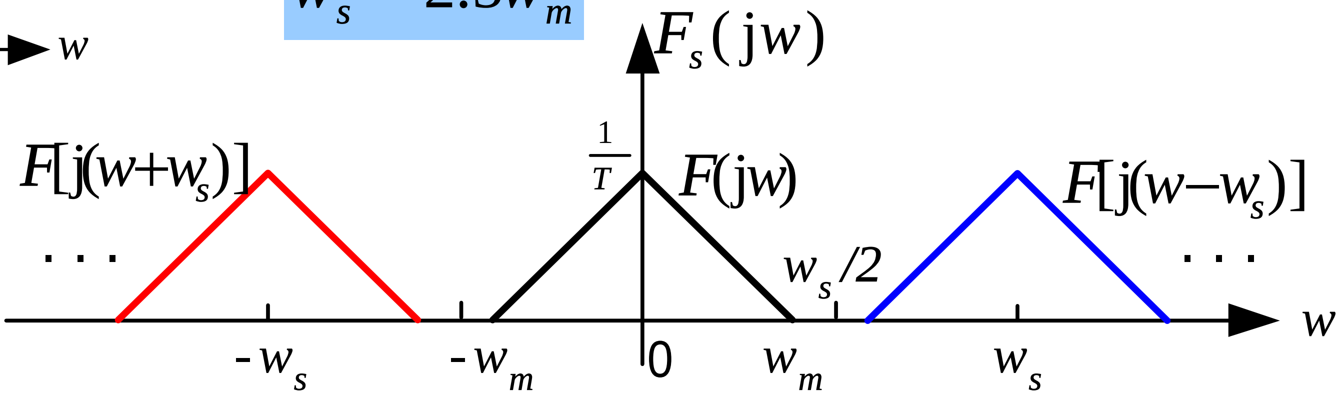
l 理想抽样信号的频谱分析

- 抽样信号$f_s(t)$频谱与抽样间隔T关系：

$$F_s(\mathrm{j}w)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[\mathrm{j}(w-nw_s)]$$



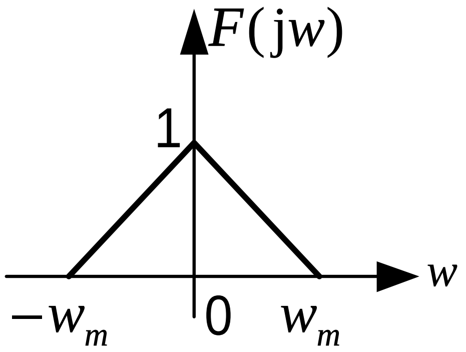
$$w_s=2.5w_m$$



1、信号抽样的理论分析

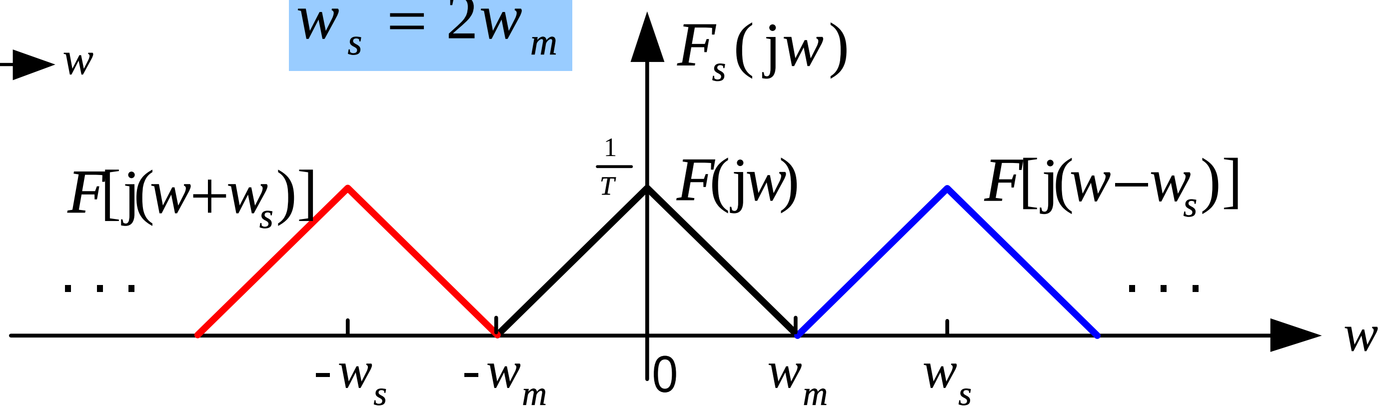
l 理想抽样信号的频谱分析

- ü 抽样信号$f_s(t)$频谱与抽样间隔T关系：



$$F_s(jw)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[j(w-nw_s)]$$

$w_s = 2w_m$

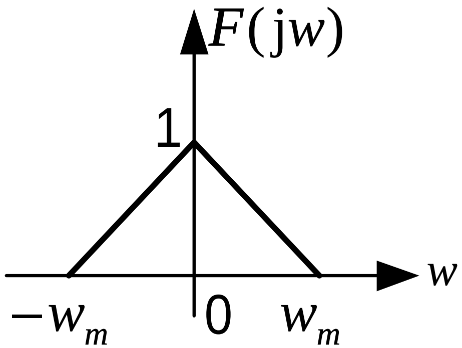


1、信号抽样的理论分析

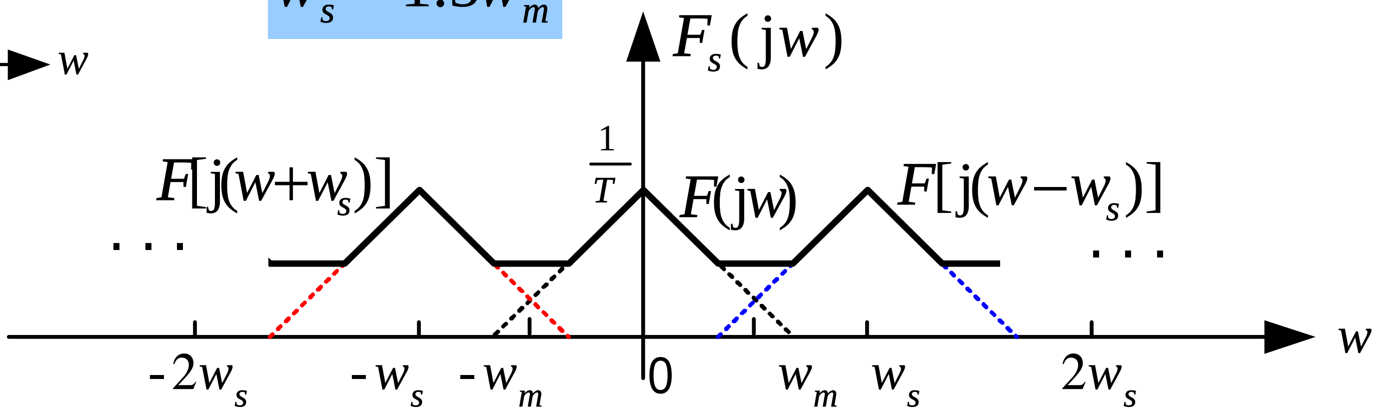
理想抽样信号的频谱分析

- 抽样信号$f_s(t)$频谱与抽样间隔T关系：

$$F_s(jw) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(w - nw_s)]$$



$w_s = 1.5w_m$



混叠
(aliasing)

2、时域取样定理

若带限信号$f(t)$的最高角频率为ω_m，则信号$f(t)$可以用等间隔的抽样值唯一地表示。而抽样间隔T需不大于$1/2f_m$，或最低抽样频率f_s不小于$2f_m$。

若从抽样信号$f_s(t)$中恢复原信号$f(t)$，需满足两个条件：

(1) $f(t)$是带限信号，即其频谱函数在$|w|>w_m$各处为零；

(2) 抽样间隔T需满足 $T \le \pi / w_m = 1/(2 f_m)$ ，

或抽样频率f_s需满足 $f_s \ge 2f_m$（或$\omega_s \ge 2\omega_m$）。

$f_s = 2f_m$ 为最小取样频率，称为Nyquist Rate.

例1 已知实信号$f(t)$的最高频率为f_m (Hz)，试计算对各信号$f(2t)$， $f(t)*f(2t)$，$f(t)\cdot f(2t)$抽样不混叠的最小抽样频率。

解：

根据信号时域与频域的对应关系及抽样定理得：

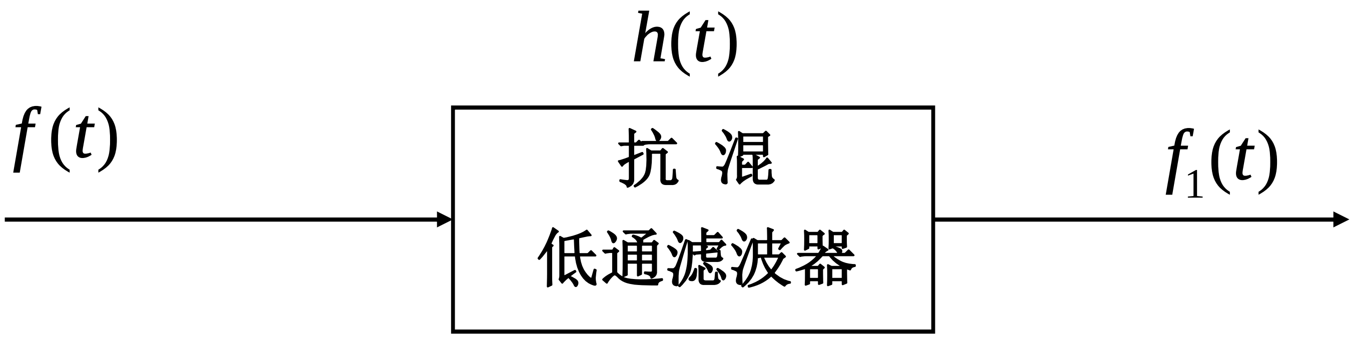
对信号$f(2t)$抽样时，最小抽样频率为 $4f_m$(Hz)；

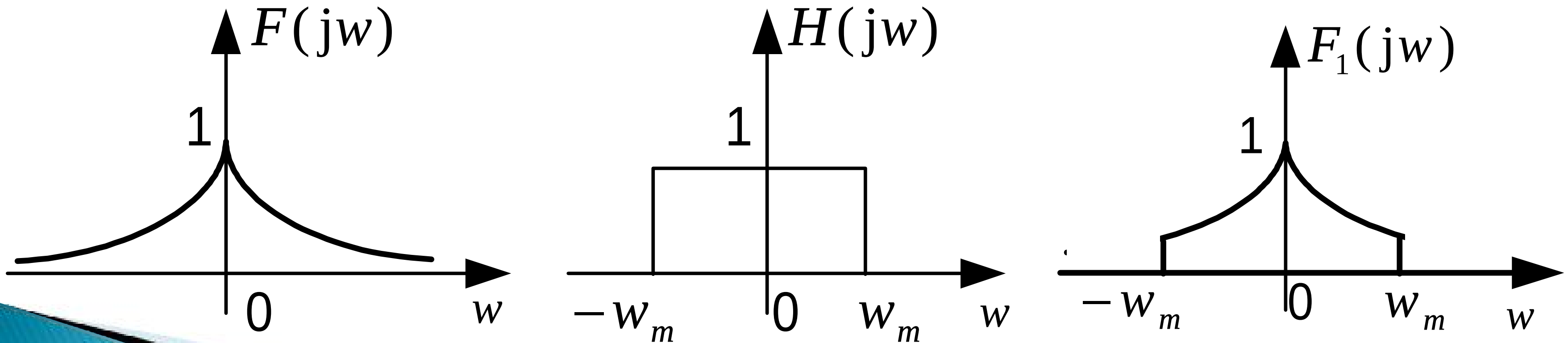
对$f(t)*f(2t)$抽样时，最小抽样频率为 $2f_m$(Hz)；

对$f(t)\cdot f(2t)$抽样时，最小抽样频率为 $6f_m$(Hz)。

3、抽样定理的工程应用

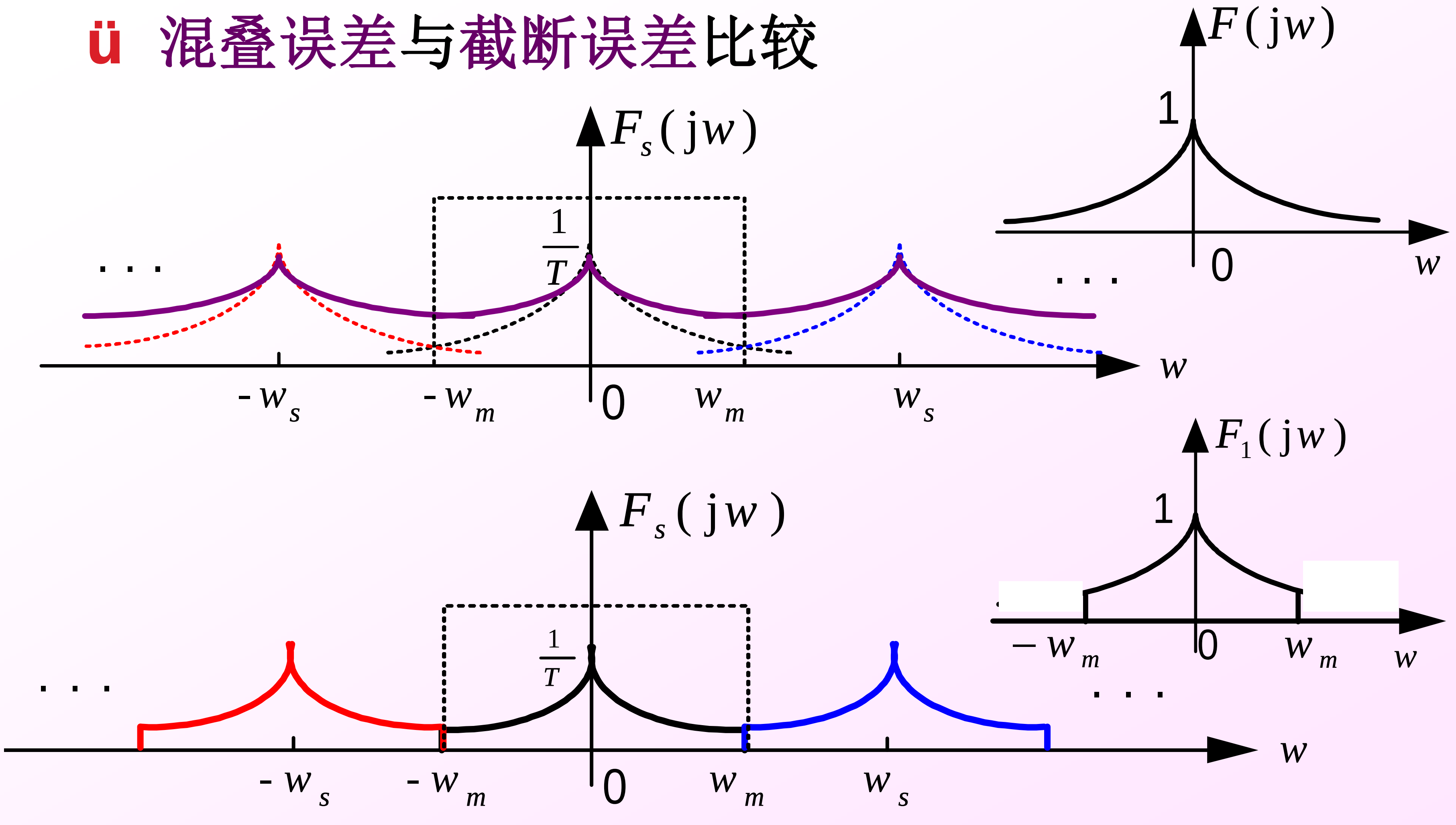
许多实际工程信号不满足带限条件





3、抽样定理的工程应用

- 混叠误差与截断误差比较



不同抽样频率的语音信号效果比较

抽样频率f_s=44,100 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

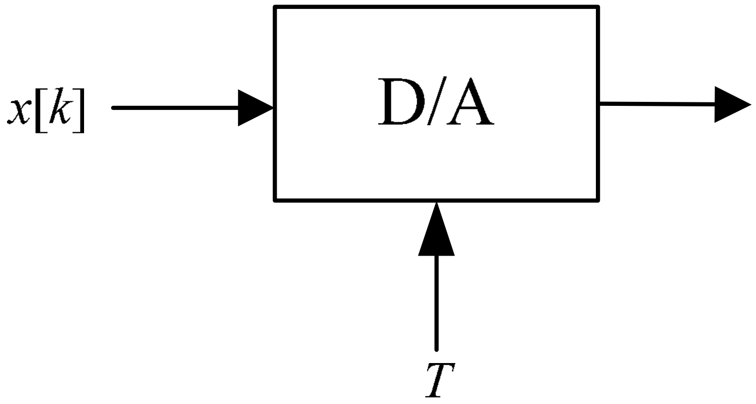
抽样前对信号进行了抗混叠滤波

思考题

(1) 根据时域抽样定理，对连续时间信号进行抽样时，只需抽样速率 $f_s \geq 2f_m$。在工程应用中，抽样速率常设为 $f_s \geq (3\sim5)f_m$，为什么？

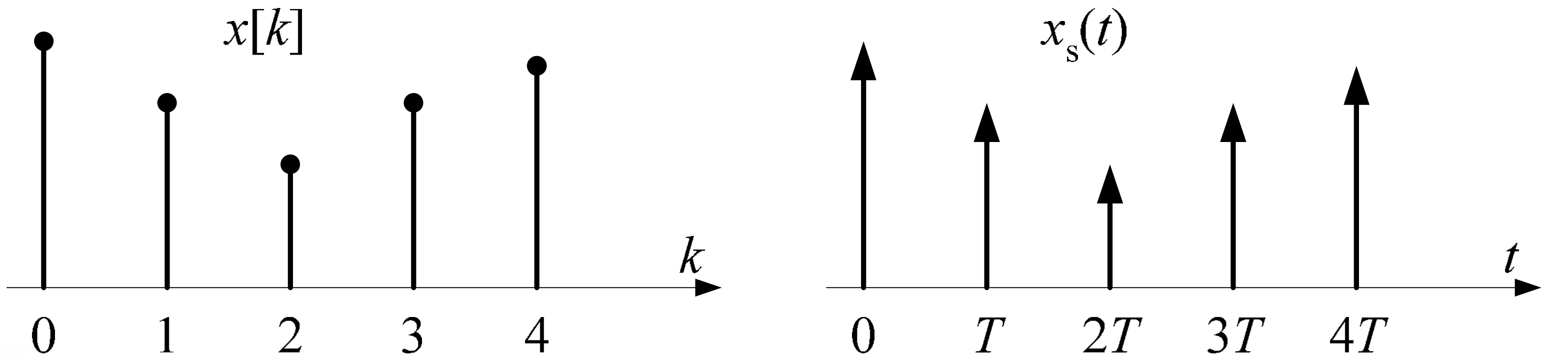
(2) 若连续时间信号 $f(t)$ 的最高频率 f_m 未知，如何确定抽样间隔T?

信号重建



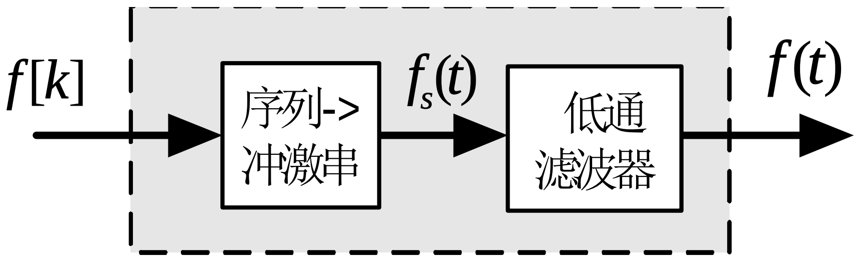
$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]d(t-kT)$$

理想D/A模型框图



理想D/A时域输入和输出关系

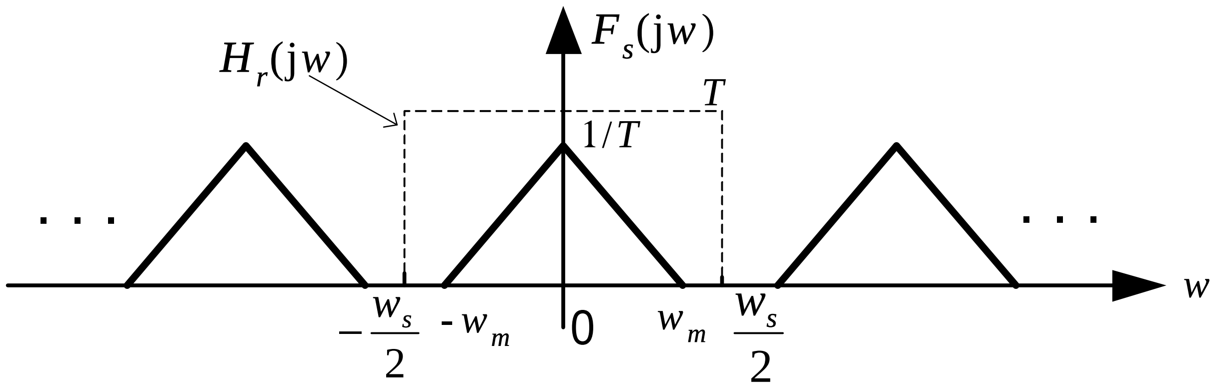
4、信号重建



信号重建模型

$$H_r(\mathrm{j}w)=\begin{cases}T & |w|<w_s/2\\ 0 & |w|>w_s/2\end{cases}$$

$$h_r(t)=F^{-1}[H_r(w)]=\mathrm{Sa}(\frac{w_s t}{2})$$

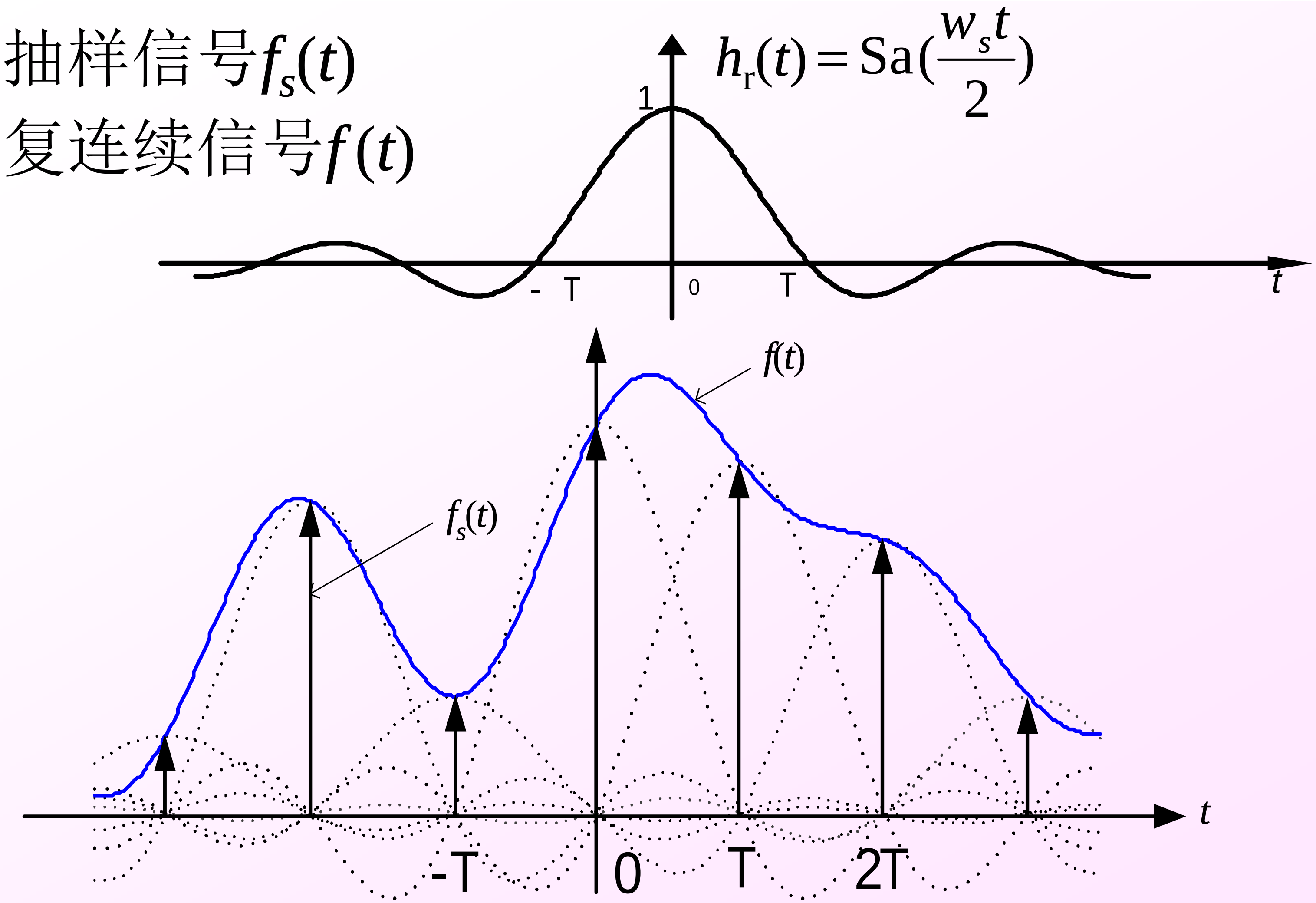


$$f(t)=f_s(t)*h_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT)\cdot h_r(t-kT)$$

4、信号重建

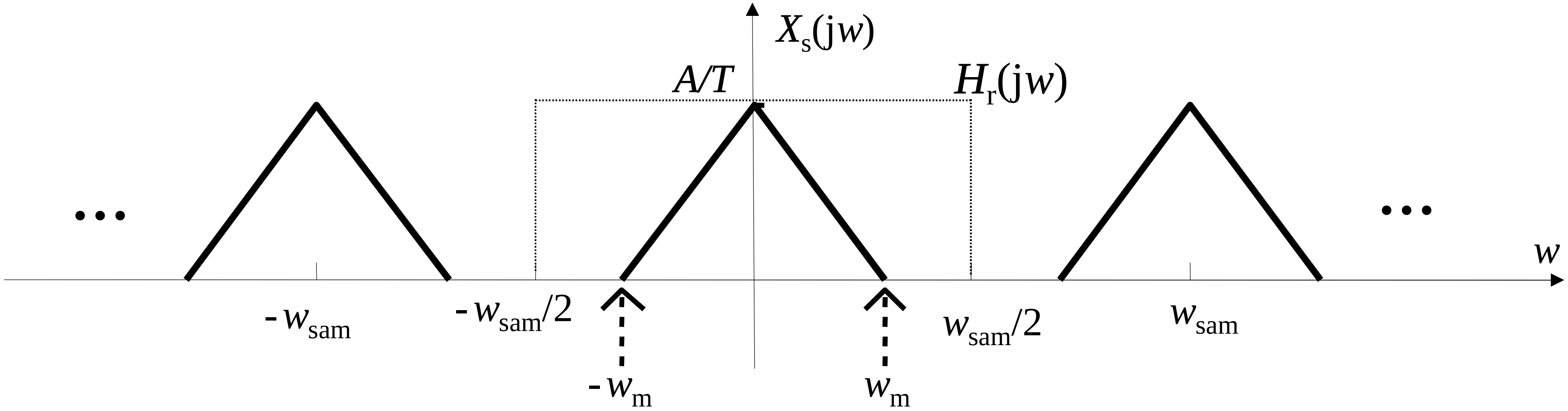
由抽样信号$f_s(t)$

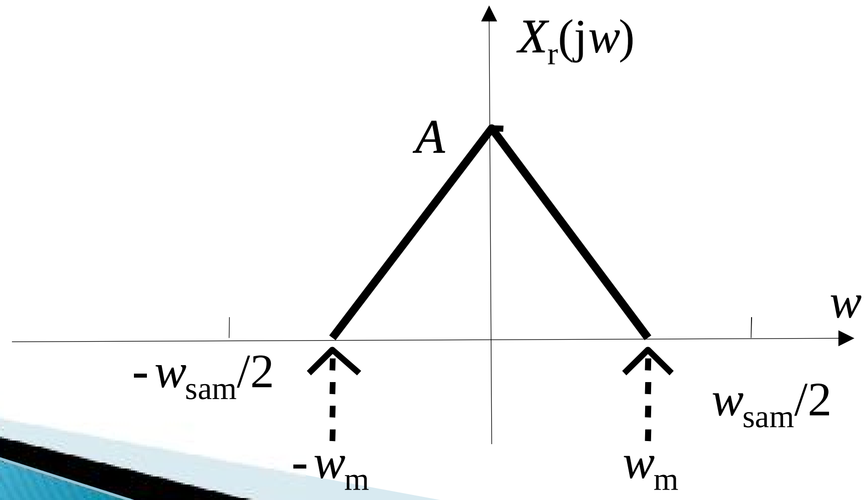
恢复连续信号$f(t)$



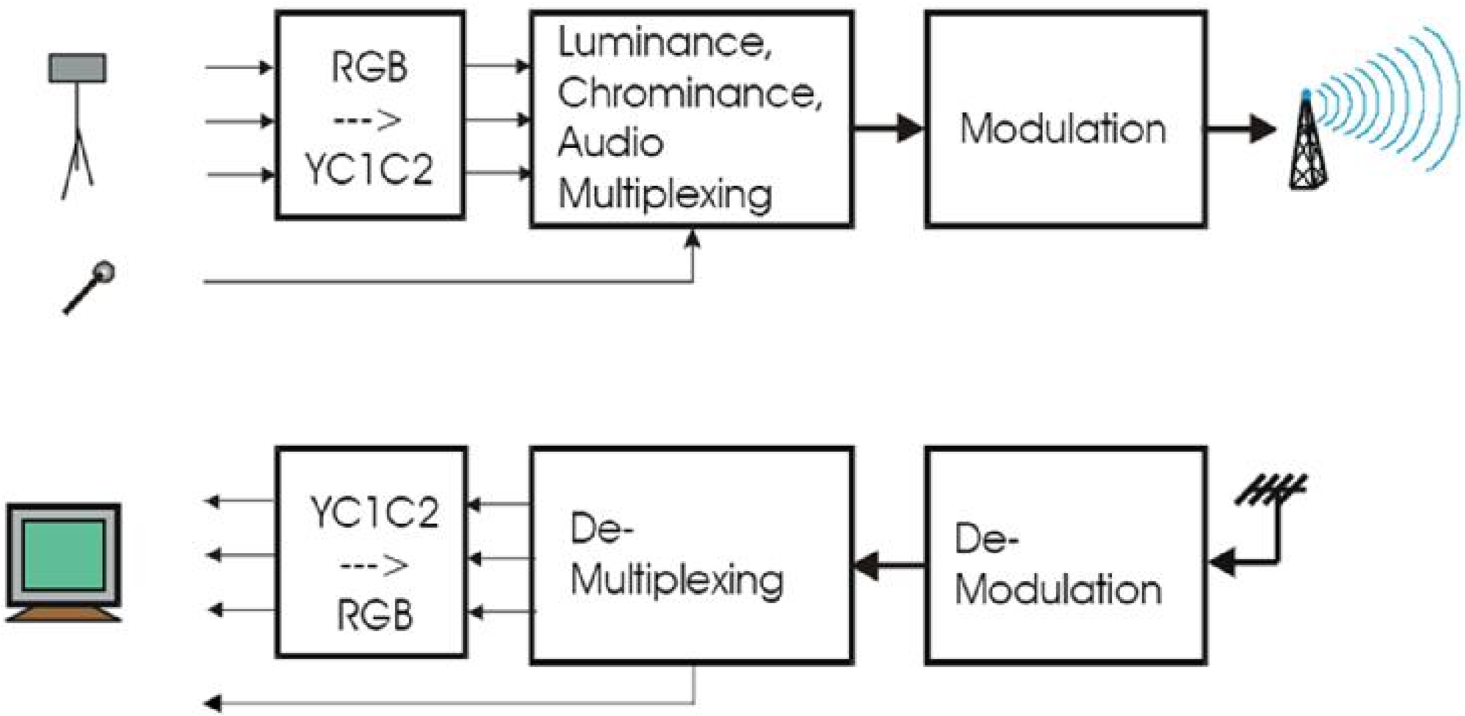
重建滤波器输出信号的频谱$X_r(jw)$

$$X_s(jw) = X(e^{jTw}) = X(e^{jW})$$



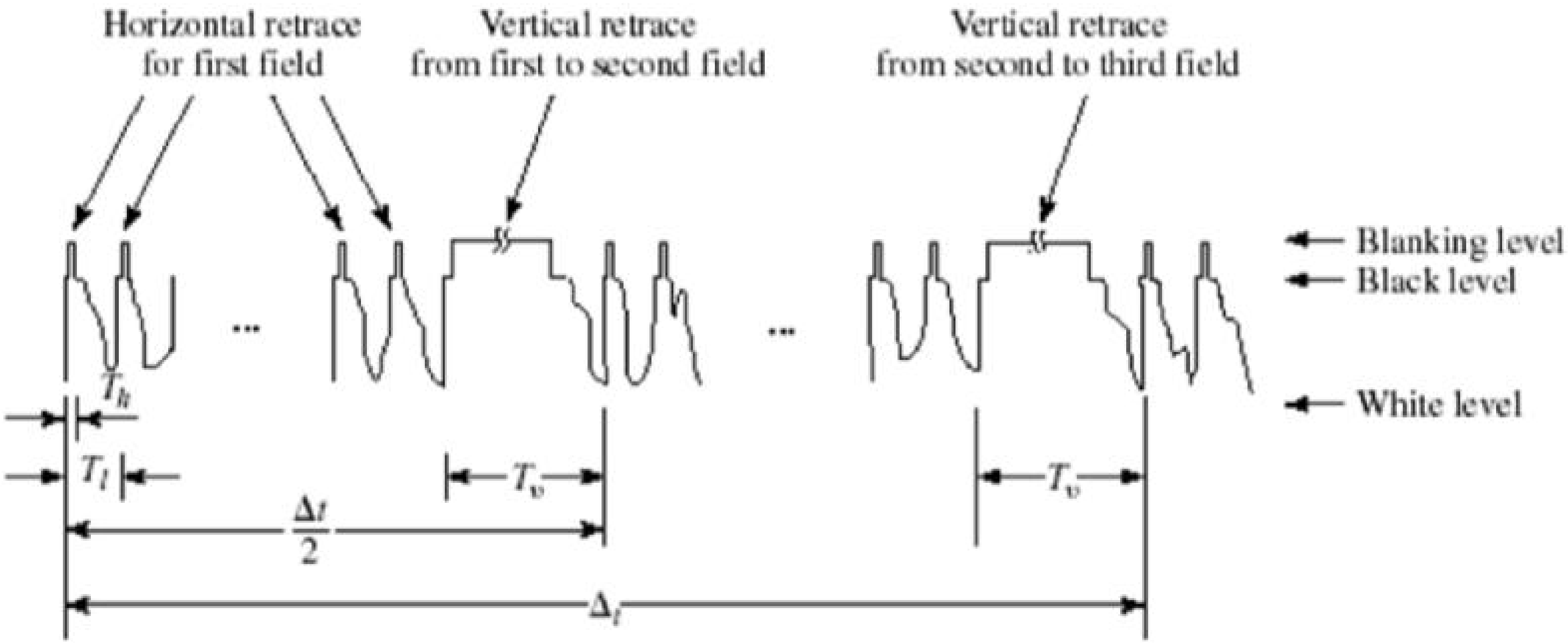


5、实际应用举例



电视系统简图

视频信号波形示意图

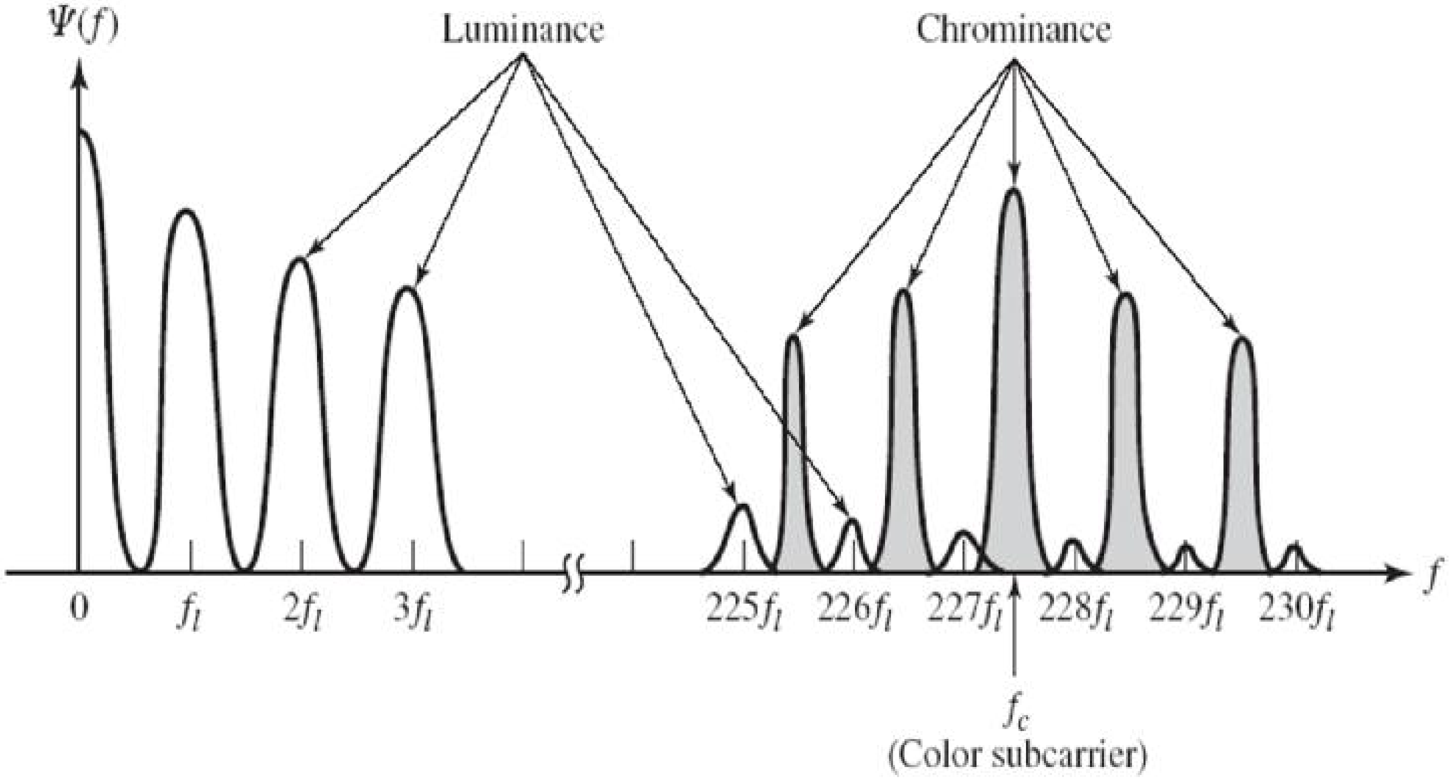


Horizontal retrace
for first field
Vertical retrace
from first to second field
Vertical retrace
from second to third field
Blanking level
Black level
White level
T_h
T_l
T_v
T_v
$\frac{\Delta t}{2}$
Δ_t

视频信号频谱特性

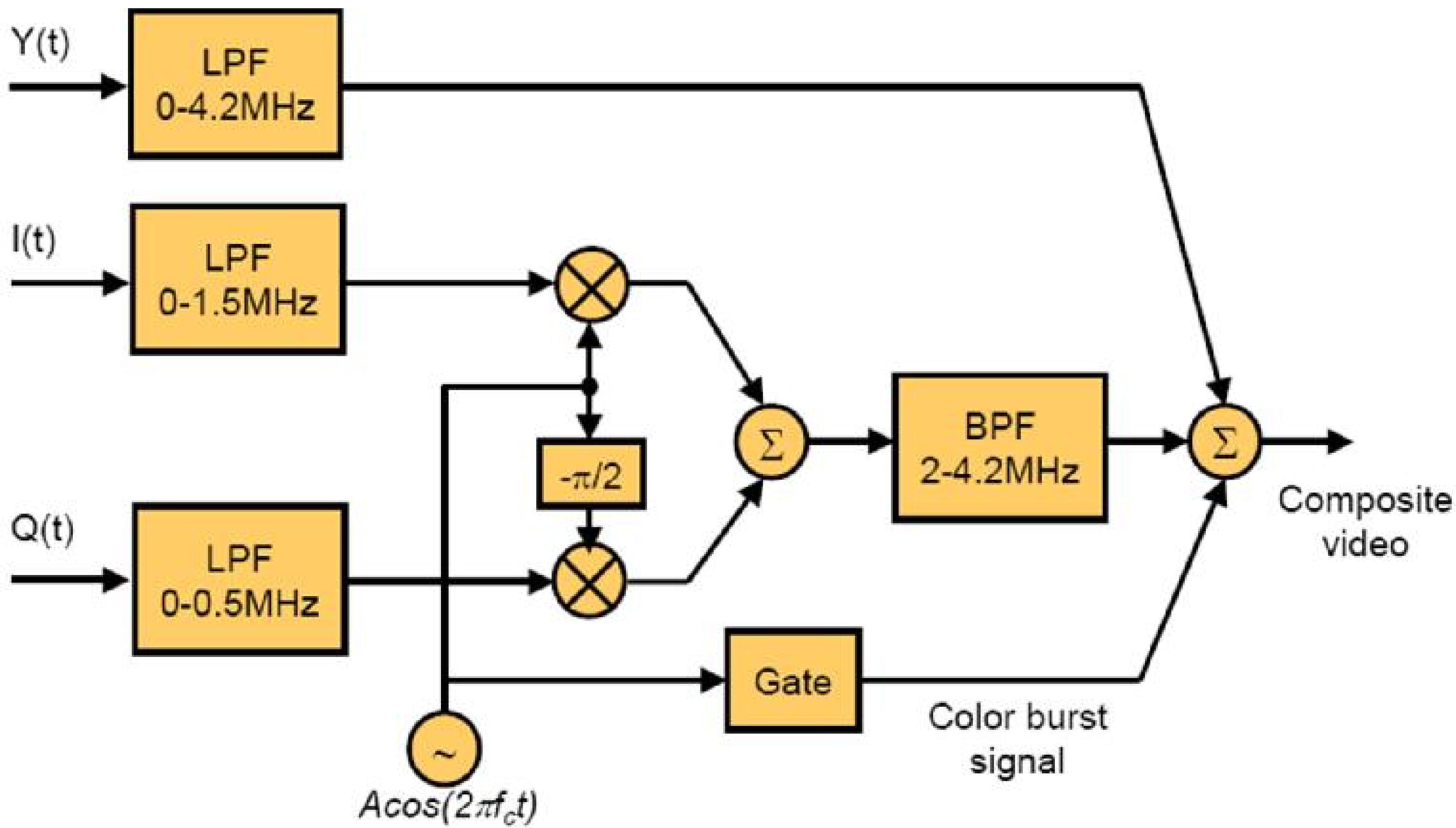
- For NTSC video
  - Maximum vertical frequency happens when black and white lines alternating on the screen, having
    - $N_{activeline}$ /2 =483/2 (cycles/picture-height)
  - The camera typically blurs the signal slightly (by the "Kell factor" or K)
    - $f_{v,max}=K*483/2$, K=0.7 for typical TV cameras
  - Maximum horizontal frequency (cycles/picture-width)
    - $f_{h,max}= f_{v,max}$ * picture-width/picture-height (cycles/picture-width)
  - Each line is scanned in T_l' =53.5 us
  - Corresponding temporal frequency is
    - $f_{max}= f_{h,max} / T_l'$ = 0.7*483/2*4/3/53.5 = 4.2 MHz (cycles/s)

视频信号频谱特性

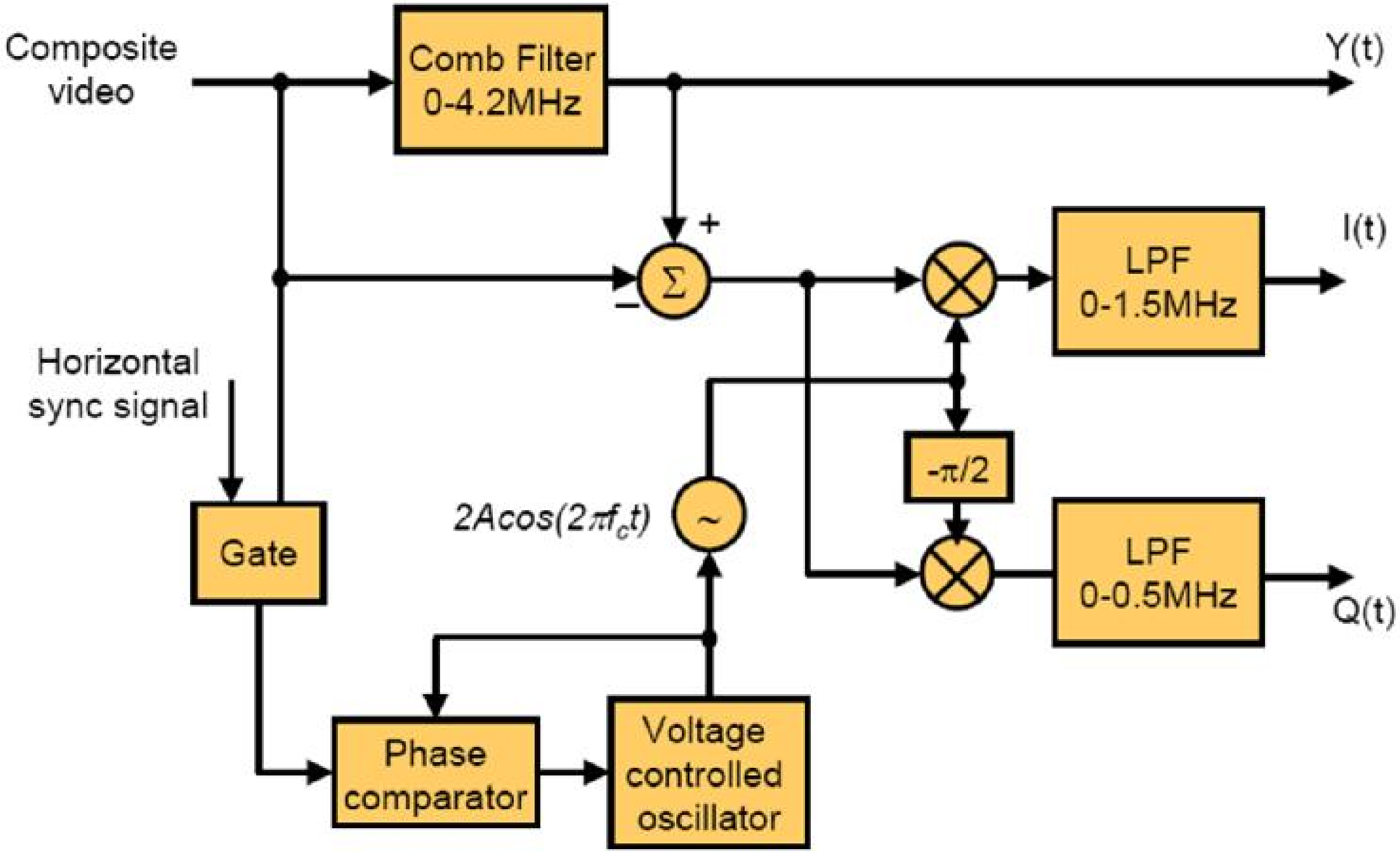


Ψ(f)
Luminance
Chrominance
0
f_l
$2f_l$
$3f_l$
$225f_l$
$226f_l$
$227f_l$
$228f_l$
$229f_l$
$230f_l$
f
f_c
(Color subcarrier)

视频信号复用模块

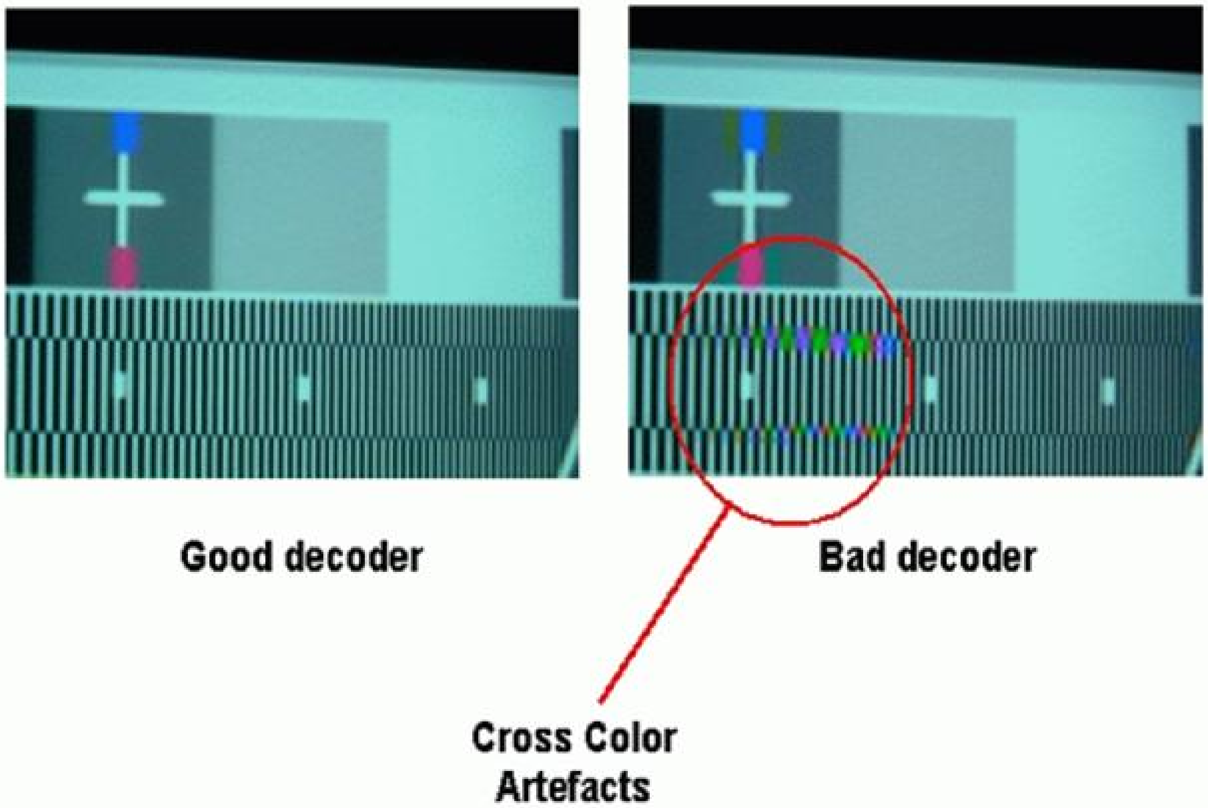

Y(t)
LPF
0-4.2MHz
I(t)
LPF
0-1.5MHz
Q(t)
LPF
0-0.5MHz
-π/2
Σ
BPF
2-4.2MHz
Σ
Composite
video
Gate
Color burst
signal
~
Acos(2πf_ct)

解复用模块



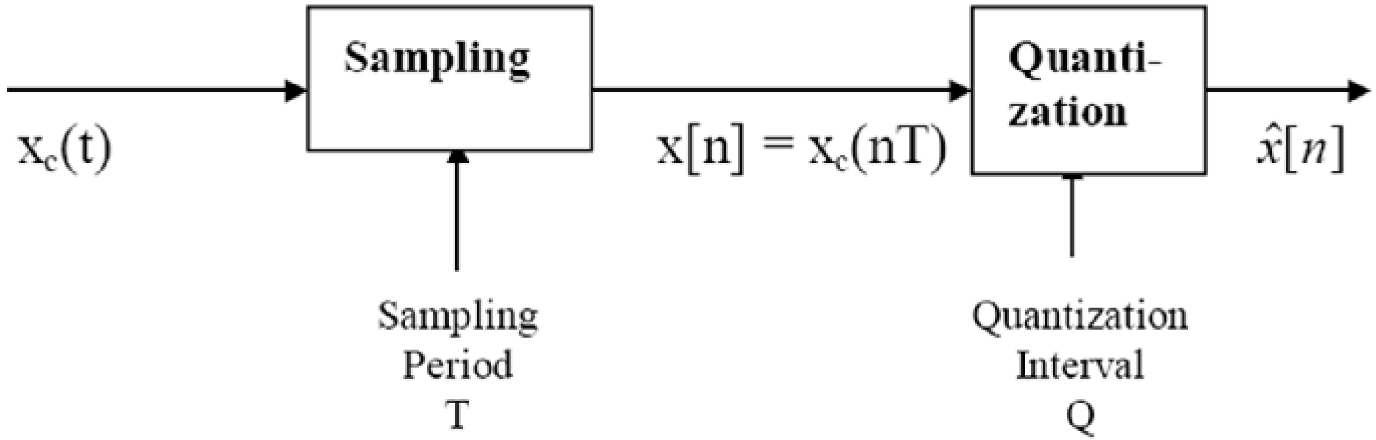
Composite
video
Comb Filter
0-4.2MHz
Y(t)
+
Σ
–
I(t)
LPF
0-1.5MHz
Horizontal
sync signal
-π/2
Gate
2Acos(2πf_ct)
~
LPF
0-0.5MHz
Q(t)
Phase
comparator
Voltage
controlled
oscillator

Comb filter Comparison

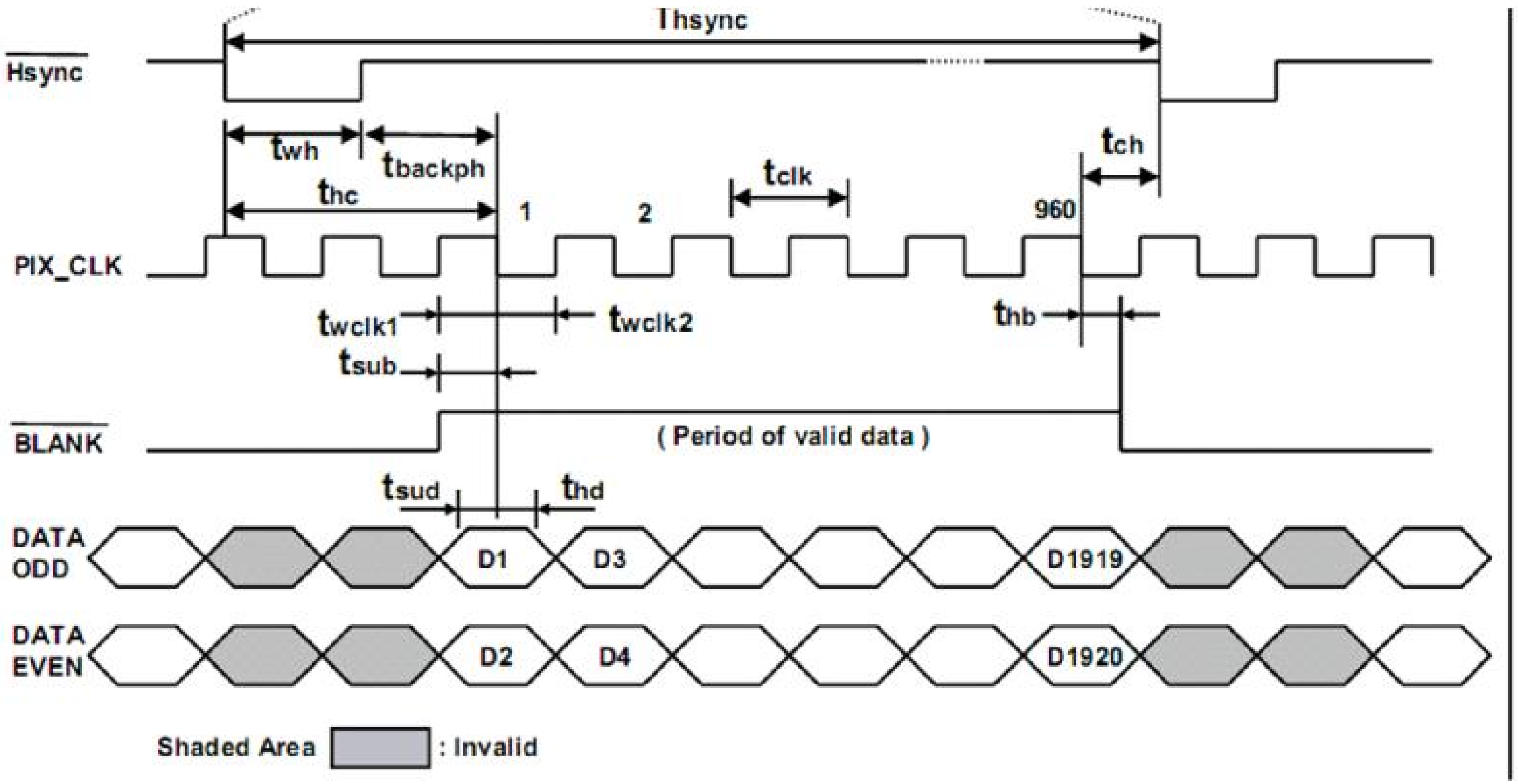


数字视频信号产生

- Digitization = Sampling + Quantization



数字视频信号格式


Thsync
Hsync
twh
tbackph
thc
tclk
tch
1
2
960
PIX_CLK
twclk1
twclk2
tsub
thb
BLANK
(Period of valid data)
tsud
thd
DATA ODD
D1
D3
D1919
DATA EVEN
D2
D4
D1920
Shaded Area
: Invalid

离散信号通过系统的响应

- 离散系统的频率响应
- e^{jWk}通过LTI系统的稳态响应
- 任意信号通过系统的响应
- 信号通过线性相位系统的响应
- 理想数字滤波器

一、离散系统的频率响应

- 离散系统的频率响应定义为

$$\mathrm{DTFT}\{h[k]\} = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}f(W)}$$

$\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})\right|$ 幅度响应(magnitude response)

$f(W)$ 相位响应(phase response)

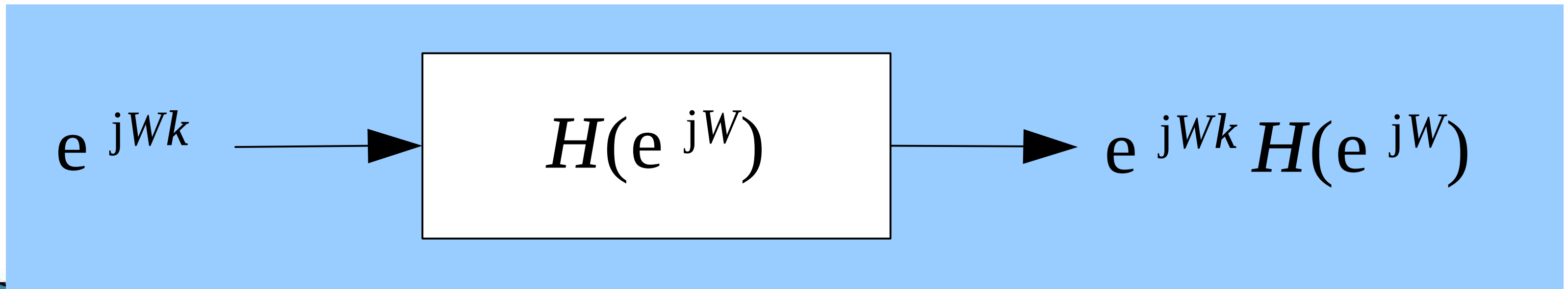
$t(W) = -\dfrac{\mathrm{d}f(W)}{\mathrm{d}W}$ 群延时 (group delay)

二、e^{jWk}通过LTI系统的稳态响应

$$y[k] = e^{jWk} * h[k] = \sum_{n} e^{jW(k-n)} h[n]$$

$$= e^{jWk} \sum_{n} e^{-jWn} h[n]$$

$$= e^{jWk} H(e^{jW})$$

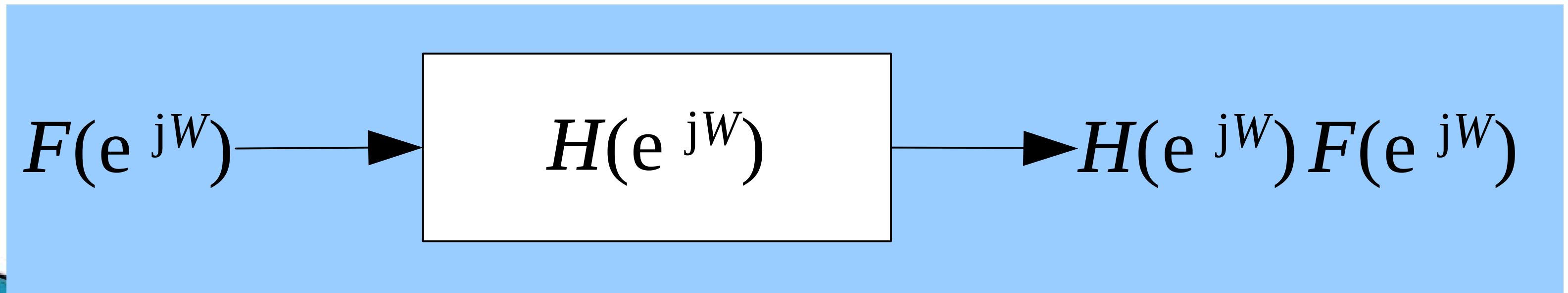


三、任意信号通过系统的响应

$$f[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}Wk}\,\mathrm{d}W$$

$$T\{f[k]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})T\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}Wk}\}\mathrm{d}W$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})\,H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})\mathrm{e}^{\mathrm{j}Wk}\,\mathrm{d}W$$



四、信号通过线性相位系统的响应

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}f(W)}$$

线性相位系统：$f(W) = -W\,k_0$

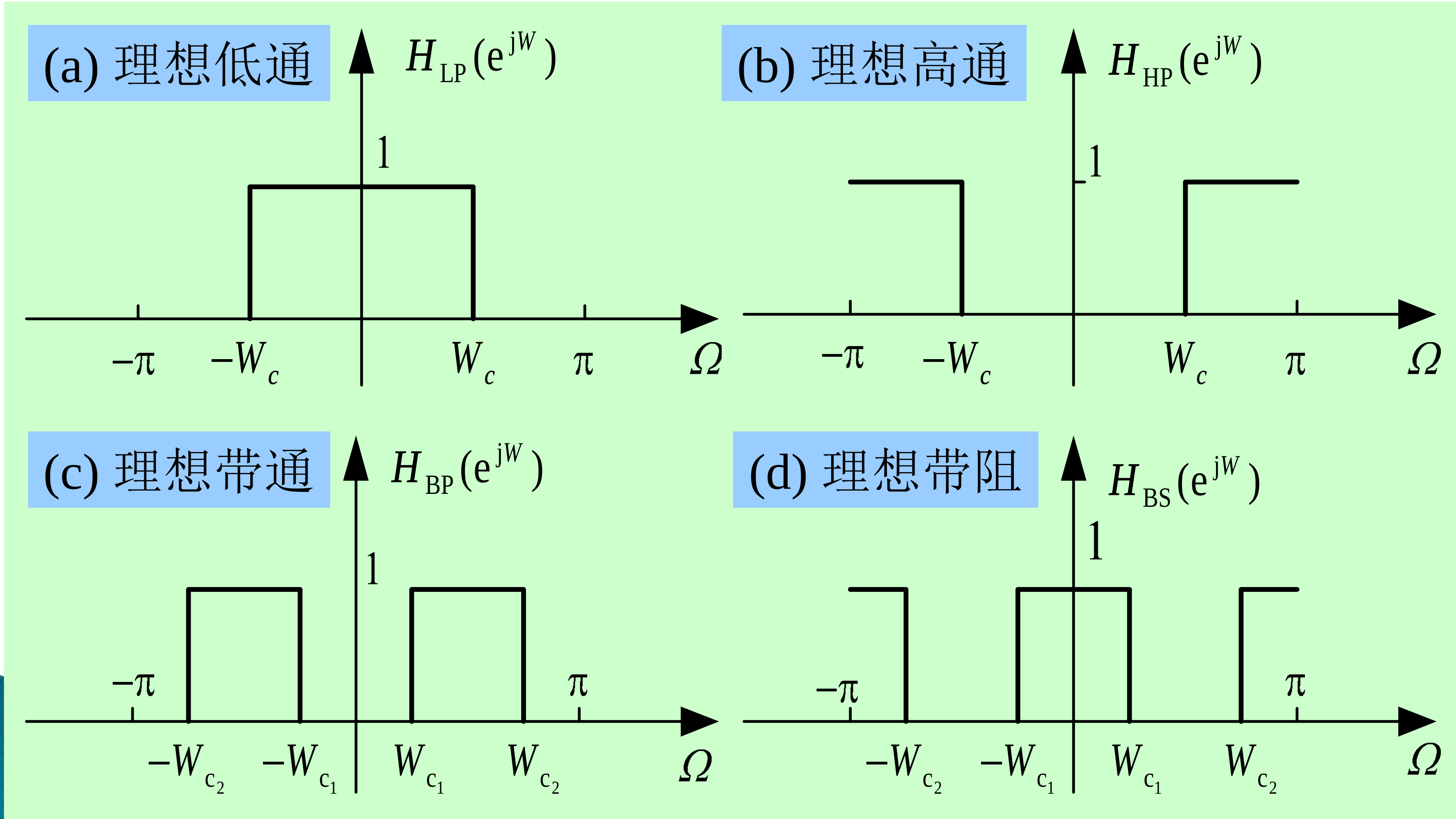
线性相位系统的群延迟：$t\,(W) = k_0$

$f[k] = \dfrac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}W_m k}$ ，通过线性相位系统的响应为

$$y[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W_m})\right|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}W_m k_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}W_m k}$$

$$y[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}W_m})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}W_m(k-k_0)}$$

五、理想数字滤波



(a) 理想低通
H LP (e jW)
1
−π
−W c
W c
π
Ω
(b) 理想高通
H HP (e jW)
1
−π
−W c
W c
π
Ω
(c) 理想带通
H BP (e jW)
1
−π
π
−W c2
−W c1
W c1
W c2
Ω
(d) 理想带阻
H BS (e jW)
1
−π
π
−W c2
−W c1
W c1
W c2
Ω

例 已知一LTI系统的$H(e^{jW})$为

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j3\Omega} & |\Omega| < \frac{2\pi}{16} \\ 0 & others \end{cases}$$

输入为$f[k]=\tilde{d}_{16}[k]$,求系统的输出。

解:

$$\tilde{d}_{16}[k]=\frac{1}{16}\sum_{l=0}^{15} e^{j\frac{2\pi}{16}kl}$$

$$y[k]=\frac{1}{16}\{H(e^{j0})+H(e^{j\frac{2\pi}{16}})e^{j\frac{2\pi}{16}k}+H(e^{j\frac{2\pi}{16}15})e^{j\frac{2\pi}{16}15k}\}$$

$$=\frac{1}{16}\{H(e^{j0})+H(e^{j\frac{2\pi}{16}})e^{j\frac{2p}{16}k}+H(e^{-j\frac{2\pi}{16}})e^{-j\frac{2\pi}{16}k}\}$$

$$=\frac{1}{16}(1+2\cos\frac{\pi}{8}(k-3)\}$$

课后作业：

P210：

6-5：（1）

6-6：（2）

6-10

6-13

6-16