信号与系统

王洪广/梁志虎
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

连续时间信号与系统的S域分析

- 连续时间信号的复频域分析
- 连续时间系统的复频域分析
- 连续时间系统函数与系统特性
- 连续时间系统的模拟

连续时间信号的复频域分析

- 从傅里叶变换到拉普拉斯变换
- 单边拉普拉斯变换及其存在的条件
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系
- 单边拉普拉斯变换的性质
- 单边拉普拉斯变换的反变换
- 双边拉普拉斯变换

六、单边拉普拉斯的反变换
——部分分式展开法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{s-\mathrm{j}\infty}^{s+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

- 计算拉普拉斯反变换方法：

  1. 利用复变函数中的留数定理

  2. 采用部分分式展开法

六、单边拉普拉斯的反变换

——部分分式展开法

有理真分式 $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\mathrm{L}+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\mathrm{L}+a_1 s+a_0}$

1）$F(s)$为有理真分式($m<n$)，极点为一阶极点

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\mathrm{L}(s-p_n)}$$

$$F(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\mathrm{L}+\frac{k_n}{s-p_n}$$

$$(s-p_1)F(s)=k_1+\frac{k_2}{s-p_2}(s-p_1)+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}(s-p_1)$$

$$k_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i}\qquad i=1,2,\mathrm{L},n$$

$$f(t)=(k_1\mathrm{e}^{p_1 t}+k_2\mathrm{e}^{p_2 t}+\mathrm{L}+k_n\mathrm{e}^{p_n t})u(t)$$

六、单边拉普拉斯的反变换

——部分分式展开法

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

2）$F(s)$为有理真分式($m<n$)，极点为r重阶极点

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{k_r}{(s-p_1)^r}+\frac{k_{r+1}}{s-p_{r+1}}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

$$k_j=\frac{1}{(r-j)!}\frac{\mathrm{d}^{r-j}}{\mathrm{d}s^{r-j}}[(s-p_1)^r F(s)]\qquad j=1,2,\cdots,r$$

$$k_i=(s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i}\qquad i=r+1,r+2,\cdots,n$$

六、单边拉普拉斯的反变换

——部分分式展开法

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3）$F(s)$为有理假分式($m\geq n$)

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=B_0+B_1 s+\cdots+B_{m-n}s^{m-n}+\frac{N_1(s)}{D(s)}$$

$\frac{N_1(s)}{D(s)}$ 为真分式，根据极点情况按1)或2)展开。

$$B_0 \xleftrightarrow{L} B_0\delta(t) \qquad B_1 s \xleftrightarrow{L} B_1\delta'(t)$$

$$B_{m-n}s^{m-n} \xleftrightarrow{L} B_{m-n}\delta^{m-n}(t)$$

例1 采用部分分式展开法求下列$F(s)$的反变换。

$$(1)F_1(s)=\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} \qquad (2)F_2(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

$$(3)F_3(s)=\frac{s^4-13s^2-11s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

解： (1)$F_1(s)$为有理真分式，极点为一阶极点。

$$F_1(s)=\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1=(s)F_1(s)\big|_{s=0}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

$$k_2=(s+1)F_1(s)\big|_{s=-1}=\frac{s+2}{s(s+3)}\bigg|_{s=-1}=-\frac{1}{2}$$

$$k_3=(s+3)F_1(s)\big|_{s=-3}=\frac{s+2}{s(s+1)}\bigg|_{s=-3}=-\frac{1}{6}$$

$$f_1(t)=\frac{2}{3}u(t)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}u(t)-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

例1 采用部分分式展开法求下列$F(s)$的反变换。

$$(1)F_1(s)=\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} \qquad (2)F_2(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

$$(3)F_3(s)=\frac{s^4-13s^2-11s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

解：(2)

$$F_2(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{(s+1)}+\frac{k_3}{(s+1)^2}+\frac{k_4}{(s+1)^3}$$

$F_2(s)$有1个3阶重极点

$$k_1=sF_2(s)\big|_{s=0}=\frac{s-2}{(s+1)^3}\Big|_{s=0}=-2$$

$$k_4=(s+1)^3F_2(s)\big|_{s=-1}=\frac{s-2}{s}\Big|_{s=-1}=3$$

$$k_3=\frac{\mathrm{d}(s+1)^3F_2(s)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=-1}=\left(\frac{s-2}{s}\right)'\Big|_{s=-1}=2$$

$$k_2=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2(s+1)^3F_2(s)}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{s-2}{s}\right)''\Big|_{s=-1}=2$$

$$f_2(t)=(-2+2\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}t^2\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

例1 采用部分分式展开法求下列$F(s)$的反变换。

$$(1)F_1(s)=\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} \qquad (2)F_2(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

$$(3)F_3(s)=\frac{s^4-13s^2-11s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

解： $(3)F_3(s)$为有理假分式，将其化为有理真分式

$$F_3(s)=s-4+\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}$$

$$f_3(t)=d'(t)-4d(t)+L^{-1}[\frac{s+2}{s^3+4s^2+3s}]$$

$$=d'(t)-4d(t)\ \ +\frac{2}{3}u(t)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}u(t)-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

例2 求下列$F(s)$的反变换。(1)$F(s)=\dfrac{s^2+8}{(s+4)^2}$

(2)$F(s)=\dfrac{1}{3s^2(s^2+4)}$ (3)$F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

解： (1)$F(s)$不是真分式，且有1个2阶重极点

$$F(s)=1+\frac{-8s-8}{(s+4)^2}=1+\frac{k_1}{(s+4)^2}+\frac{k_2}{s+4}$$

$$k_1=(s+4)^2F(s)\big|_{s=-4}=(-8s-8)\big|_{s=-1}=24$$

$$k_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s+4)^2F(s)\big|_{s=-4}=(-8s-8)'=-8$$

$$f(t)=\delta(t)+24te^{-4t}u(t)-8e^{-4t}u(t)$$

例2 求下列$F(s)$的反变换。(1)$F(s)=\dfrac{s^2+8}{(s+4)^2}$

(2)$F(s)=\dfrac{1}{3s^2(s^2+4)}$ (3)$F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

解： (2)$F(s)$ 有1个2阶重极点和一对共轭极点，为计算简便

令$s^2=q$， 则$F(s)=\dfrac{1}{3q(q+4)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{k_1}{q}+\dfrac{k_2}{(q+4)})$

$$k_1=q\cdot\frac{1}{q(q+4)}\Big|_{q=0}=\frac{1}{4}$$

$$k_2=(q+4)\cdot\frac{1}{q(q+4)}\Big|_{q=-4}=-\frac{1}{4}$$

于是 $F(s)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4s^2}-\dfrac{1}{4(s^2+4)})$

$$f(t)=\frac{1}{12}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)u(t)$$

例2 求下列$F(s)$的反变换。(1)$F(s)=\dfrac{s^2+8}{(s+4)^2}$

(2)$F(s)=\dfrac{1}{3s^2(s^2+4)}$ (3)$F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

解： (3)$F(s)$不是有理分式，将其表示为

$$F(s)=\underbrace{\frac{1}{s(s^2+4)}}_{F_1(s)}-\underbrace{\frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}}_{F_2(s)=F_1(s)e^{-2s}}$$

$$F_2(s)=F_1(s)e^{-2s}\xrightarrow{\text{时移特性}}f_2(t)=f_1(t-2)$$

将$F_1(s)$展开为 $F_1(s)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2s+k_3}{s^2+4}$

k_2, k_3用待定系数法求

$$k_1=\frac{1}{4}\qquad k_2=-\frac{1}{4}\qquad k_3=0$$

$$f_1(t)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)u(t)\qquad f_2(t)=-\frac{1}{4}[1-\cos 2(t-2)]u(t-2)$$

六、单边拉普拉斯的反变换
——留数法

拉普拉斯反变换

$$L^{-1}[F_{\_}(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

留数定理

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{k=1,t>0}^{n} \underset{s=\lambda_k}{Res}\left[F(s)e^{st}\right]$$

六、单边拉普拉斯的反变换

—— 留数法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1,t>0}^{n}\underset{s=\lambda_k}{\text{Res}}\left[F(s)e^{st}\right]$$

λ_k单极点：

$$\underset{s=\lambda_k}{\text{Res}}\left[F(s)e^{st}\right]=\left[(s-\lambda_k)F(s)e^{st}\right]_{s=\lambda_k}$$

λ_k为m阶重极点：

$$\underset{s=\lambda_k}{\text{Res}}\left[F(s)e^{st}\right]=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}(s-\lambda_k)^m F(s)e^{st}\right]_{s-\lambda_k}$$

例3 试用留数法求$F(s)=\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}$，$\mathrm{Re}(s)>0$的Laplace反变换

解：

$$\operatorname*{Res}_{s=0}[F(s)e^{st}]=s\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}e^{st}|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-3}[F(s)e^{st}]=(s+3)\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}e^{st}|_{s=-3}=\frac{1}{12}e^{-3t}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-1}[F(s)e^{st}]=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}[(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}e^{st}]|_{s=-1}$$

$$=\frac{d}{ds}[\frac{s+2}{s(s+3)}e^{st}]|_{s=-1}$$

$$=\frac{s+2}{s(s+3)}te^{st}|_{s=-1}+\frac{s(s+3)-(s+2)(2s+3)}{s^2(s+3)^2}e^{st}|_{s=-1}$$

$$=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-t}\qquad t>0$$

信号的复频域分析小结

- 信号的复频域分析实质是将信号分解为复指数信号的线性组合。
- 信号的复频域分析使用的数学工具是拉普拉斯变换。
- 利用基本信号的复频谱和拉普拉斯变换的性质可对任意信号进行复频域分析。
- 复频域分析主要用于线性系统的分析。

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的定义

双边拉普拉斯正变换

$$L[f(t)] = F_{\mathrm{B}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

双边拉普拉斯反变换

$$L^{-1}[F_{\mathrm{B}}(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{s-\mathrm{j}\infty}^{s+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

*七、双边拉普拉斯
——双边拉普拉斯的收敛域

双边拉普拉斯变换存在的充分条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\mathrm{e}^{-st}\right|\mathrm{d}t<\infty \qquad s\in R$$

双边信号$f(t)$可表示为左右边信号之和，即$f(t) = f_R(t)+ f_L(t)$

若 $\lim\limits_{t\to\infty} f_R(t)\mathrm{e}^{-st}=0, s>s_1$ s_1, s_2为常数

$\lim\limits_{t\to-\infty} f_L(t)\mathrm{e}^{-st}=0, s<s_2$ 且$s_1<s_2$

则在$s_1<s<s_2$的带状区域内， $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换存在

收敛域

例3 求双边信号$f(t)=e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)$的拉普拉斯变换及收敛域

解：

$$f(t)=e^{at}u(t)+e^{-bt}u(-t)=f_R(t)+f_L(t)$$

$$F_R(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{at}e^{-st}dt=\frac{1}{s-a}\qquad s>a$$

$$F_L(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{bt}u(-t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{bt}e^{-st}dt=-\frac{1}{s-b}\qquad s<b$$

若$a<b$， 则$f(t)$的拉普拉斯变换存在，有

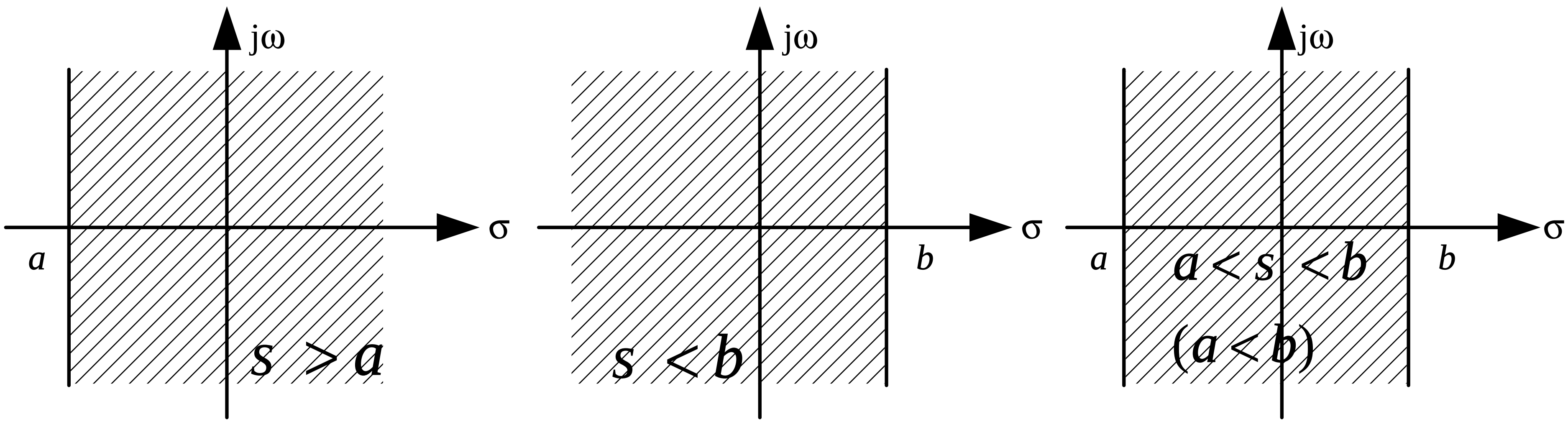
$$F_B(s)=\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}=\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}\qquad a<s<b$$

若$a>b$， 则$f(t)$的拉普拉斯变换不存在

例3 求双边信号$f(t)=e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)$的拉普拉斯变换及收敛域

解： 收敛域

右边序列 左边序列 双边序列



*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

1. 线性特性

若

$$f_1(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s) \quad s_{11} < s < s_{12}$$

$$f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_2(s) \quad s_{21} < s < s_{22}$$

则

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xleftrightarrow{L} a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$\max(s_{11}, s_{21}) < s < \min(s_{12}, s_{22})$$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

2．展缩特性

若 $$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s) \quad s_1 < s < s_2$$

则 $$\boxed{f(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} F(\frac{s}{a})}$$

$$\sigma_1 < \frac{\sigma}{a} < \sigma_2$$

*七、双边拉普拉斯
——双边拉普拉斯的性质

3．时移特性

若 $$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s) \quad s_1 < s < s_2$$

则 $$\boxed{f(t-t_0) \xleftrightarrow{L} \mathrm{e}^{-st_0}F(s)}$$

$$s_1 < s < s_2$$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

4．卷积特性

若 $$f_1(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s) \quad s_{11} < s < s_{12}$$

$$f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_2(s) \quad s_{21} < s < s_{22}$$

则 $$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s)F_2(s)}$$

$$\max(s_{11}, s_{21}) < s < \min(s_{12}, s_{22})$$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

5．乘积特性

若

$$f_1(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s) \quad s_{11} < s < s_{12}$$

$$f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_2(s) \quad s_{21} < s < s_{22}$$

则

$$f_1(t) f_2(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$$

$$s_{11} + s_{21} < s < s_{12} + s_{22}$$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

6．指数加权特性

若

$$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s) \quad s_1 < s < s_2$$

则

$$f(t)\mathrm{e}^{-lt} \xleftrightarrow{L} F(s+l)$$

$$s_1 - l < s < s_2 - l$$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

6．线性加权特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{L} F(s) \quad s_1 < s < s_2$

则 $\boxed{-tf(t) \xleftrightarrow{L} \dfrac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}}$

$s_1 < s < s_2$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

7.微分特性

若　　$f(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} F(s) \quad s_1 < s < s_2$

则　　$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \overset{L}{\longleftrightarrow} s^n F(s)}$

$s_1 < s < s_2$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的性质

8.积分特性

若 $f(t) \xleftrightarrow{L} F(s) \quad s_1 < s < s_2$

则 $\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \xleftrightarrow{L} \frac{F(s)}{s}}$

$$\max(s_1, 0) < s < \min(s_2, 0)$$

*七、双边拉普拉斯

——双边拉普拉斯的反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{s-\mathrm{j}\infty}^{s+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

- 计算拉普拉斯反变换方法：

1. 利用复变函数中的留数定理

2. 采用部分分式展开法

例4 求下列$F(s)$的反变换

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

解： $F(s)$有两个极点，故有三个不同的收敛域，分别为

$$s>-1 \qquad s<-2 \qquad -2<s<-1$$

将$F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=F_1(s)-F_2(s)$$

当$s>-1$时，$F_1(s)$与$F_2(s)$均对应右边信号，故

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

例4 求下列$F(s)$的反变换

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

解：

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=F_1(s)-F_2(s)$$

当$s<-2$时，$F_1(s)$和$F_2(s)$均对应左边信号，故

$$f(t)=-\mathrm{e}^{-t}u(-t)+\mathrm{e}^{-2t}u(-t)$$

当$-1<s<-2$时，$F_1(s)$对应左边信号，$F_2(s)$对应右边信号，故

$$f(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)$$

在利用部分分式法进行双边拉氏反变换时，必须根据各部分分式的收敛域确定其对应的时域信号。

课后作业：

P260：

7-11：（2）、（6）

7-12：（4）

7-13：（5)

7-14：（2）、（3）

7-18：（1）