序列乘积（复卷积定理）

若

$$w(n) = x(n)y(n)$$

则

$$W(z) = Z[w(n)] = Z[x(n)y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

(1-89)

式中，c是哑变量V平面上$X(v)$与$Y(z/v)$的公共收敛域内环绕原点的一条反时针旋转的单封闭围线，满足:

$$R_{x-} < |v| < R_{x+} \quad , \quad R_{y-} < \left|\frac{z}{v}\right| < R_{y+}$$

将两个不等式相乘即得Z平面的收敛域为

$$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+} \tag{1-90}$$

V平面收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right] \tag{1-91}$$

证 $$W(z)=Z[w(n)]=Z[x(n)y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)v^{n-1}dv\right]y(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left[\oint_c X(v)v^{n}\frac{dv}{v}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\left[X(v)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\right]\frac{dv}{v}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$$

由推导过程看出$X(v)$的收敛域就是$X(z)$的收敛域，$Y(z/v)$的收敛域（z/v的区域）就是$Y(z)$的收敛域（z的区域），从而收敛域亦得到证明。

不难证明，由于乘积$x(n)y(n)$的先后次序可以互调，故X, Y的位置可以互换，故下式同样成立。

$$W(z)=Z[x(n)y(n)]$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c Y(v)X\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$$

(1-92)

而此时围线c所在收敛域为

$$\max\left[R_{y-},\frac{|z|}{R_{x+}}\right]<|v|<\min\left[R_{y+},\frac{|z|}{R_{x-}}\right]$$

复卷积公式可用留数定理求解， 但关键在于确定围线所在的收敛域。

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv=\sum_k \mathrm{Res}\left[X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1},d_k\right] \tag{1-93}$$

式中，$\{d_k\}$ 为 $X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}$ 在围线c内的全部极点。

若用$v=e^{j\theta}$，$z=e^{j\omega}$代入式(1-89)，则可得

$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

显然，上式是$X(e^{j\omega})$与$Y(e^{j\omega})$的卷积，又称为复卷积。

例 1-22　设 $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n), y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

应用复卷积定理求两序列的乘积即 $w(n)=x(n)y(n)$。

解

$$X(z)=Z[x(n)]=Z\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$Y(z)=Z[y(n)]=Z\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

利用复卷积公式（1-89）

$$
\begin{aligned}
W(z) &= Z[x(n)y(n)] \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{v}{v-(1/3)}\cdot\frac{z/v}{(z/v)-(1/2)}\cdot v^{-1}dv \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{-2z}{\left(v-\frac{1}{3}\right)(v-2z)}dv
\end{aligned}
$$

根据式（1-91），围线c所在的收敛域为max［1/3，0］<$|v|$<min［∞,2$|z|$］或1/3<$|v|$<2$|z|$。

被积函数有两个极点，$v=1/3$，$v=2z$，如图1-33所示。但只有极点$v=1/3$在围线c内，而极点$v=2z$在围线c外，利用式（1-93）可得

$$W(z)=\mathrm{Res}\left[\frac{-2z}{\left(v-\frac{1}{3}\right)(v-2z)},\frac{1}{3}\right]$$

$$=\left(v-\frac{1}{3}\right)\frac{-2z}{\left(v-\frac{1}{3}\right)(v-2z)}\Bigg|_{v=\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{-2z}{\frac{1}{3}-2z}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}$$

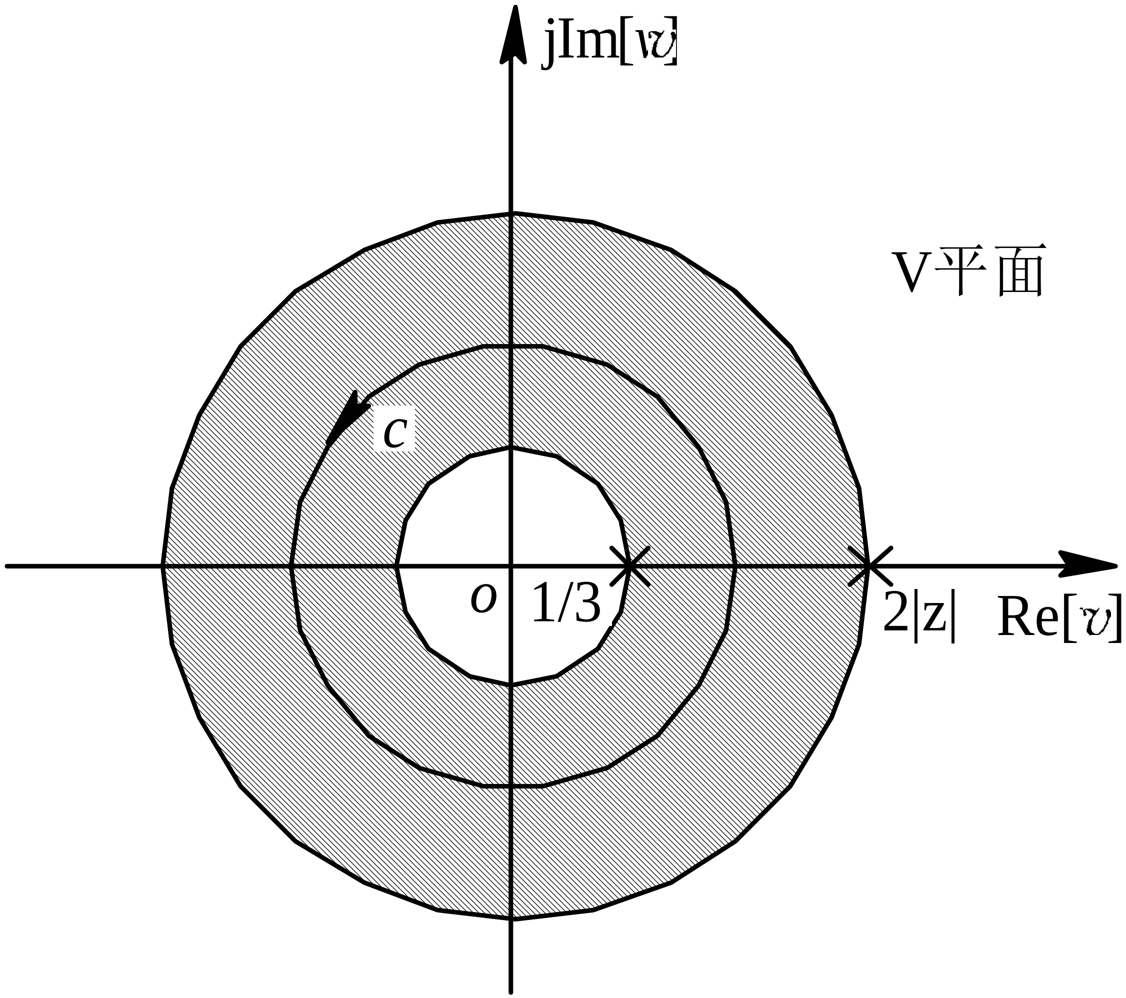

图1-33　例1-22被积函数的极点及积分围线c

由式(1-92)可得，$W(z)$的收敛域为$|z|>1/6$，则

$$w(n)=Z^{-1}[W(z)]=\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$$

也可以将序列直接相乘验证这个结果。

$$w(n)=x(n)\cdot y(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)=\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$$

则

$$W(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{6}$$

帕塞伐（Parseval）定理

利用复卷积定理可以得到重要的帕塞伐定理。若有两序列$x(n)$、$y(n)$，则有:

$$X(z)=Z[x(n)] \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$Y(z)=Z[y(n)] \qquad R_{y-}<|z|<R_{y+}$$

它们的收敛域满足以下条件：

$$R_{x-}R_{y-}<|z|=1<R_{x+}R_{y+}$$

那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv \qquad (1-94)$$

式中，“*”表示取复共轭，积分闭合围线c应在$X(v)$和$Y^*(1/v)$的公共收敛域内，即

$$\max\left[R_{x-},\frac{1}{R_{y+}}\right]<|v|<\min\left[R_{x+},\frac{1}{R_{y-}}\right]$$

证　令

$$w(n)=x(n)y^*(n)$$

由于

$$Z[y^*(n)]=Y^*(z^*)$$

利用复卷积公式可得

$$W(z)=Z[w(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^{*}(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(v)Y^{*}\left(\frac{z^{*}}{v^{*}}\right)v^{-1}dv \qquad R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y}$$

由于假设条件中已规定收敛域满足$R_{x-}R_{y-}<1<R_{x+}R_{y+}$，因此在$|z|=1$收敛域内，也就是$W(z)$在单位圆上收敛， 则

$$W(z)|_{z=1}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(v)Y^{*}\left(\frac{1}{v^{*}}\right)v^{-1}dv$$

同时

$$W(z)|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)z^{-n}|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)$$

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v}\right)v^{-1}dv$$

如果$y(n)$是实序列，则上式两边共轭（*）号可取消。如果$X(z)$、$Y(z)$在单位圆上都收敛，则围线c可取为单位圆，即

$$v=e^{j\omega}$$

则式（1-94）可变为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \qquad (1-95)$$

帕塞伐定理的一个很重要的应用是计算序列的能量，一个序列值的平方总和称为“序列能量”，利用公式（1-95），如果有$y(n)=x(n)$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega \qquad (1-96)$$

这表明时域中求能量与频域中求能量是一致的。