信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

信号的频域分析

- 连续周期信号的频域分析
- 连续非周期信号的频谱
- 常见连续时间信号的频谱
- 连续时间Fourier变换的性质
- 离散周期信号的频域分析
- 离散非周期信号的频域分析

离散时间Fourier变换（DTFT）

- DTFT的定义
- DTFT的性质
- 内插和抽取信号的频谱

一、DTFT的定义

- **DFS** $F[m] = \mathrm{DFS}(f[k]) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]\, e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}$
- **IDFS** $f[k] = \mathrm{IDFS}(F[m]) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\, e^{jm\frac{2\pi}{N}k}$

$N \rightarrow \infty$

- **DTFT** $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}$
- **IDTFT** $f[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega k}\mathrm{d}\Omega$

□ $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$特点：

1）$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是连续的

2）$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$是周期为2π的周期函数

例1：求序列 $f[k]=\{1,2,1\}$的DTFT

解：

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega}=(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^2$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}4\cos^2\frac{\Omega}{2}$$

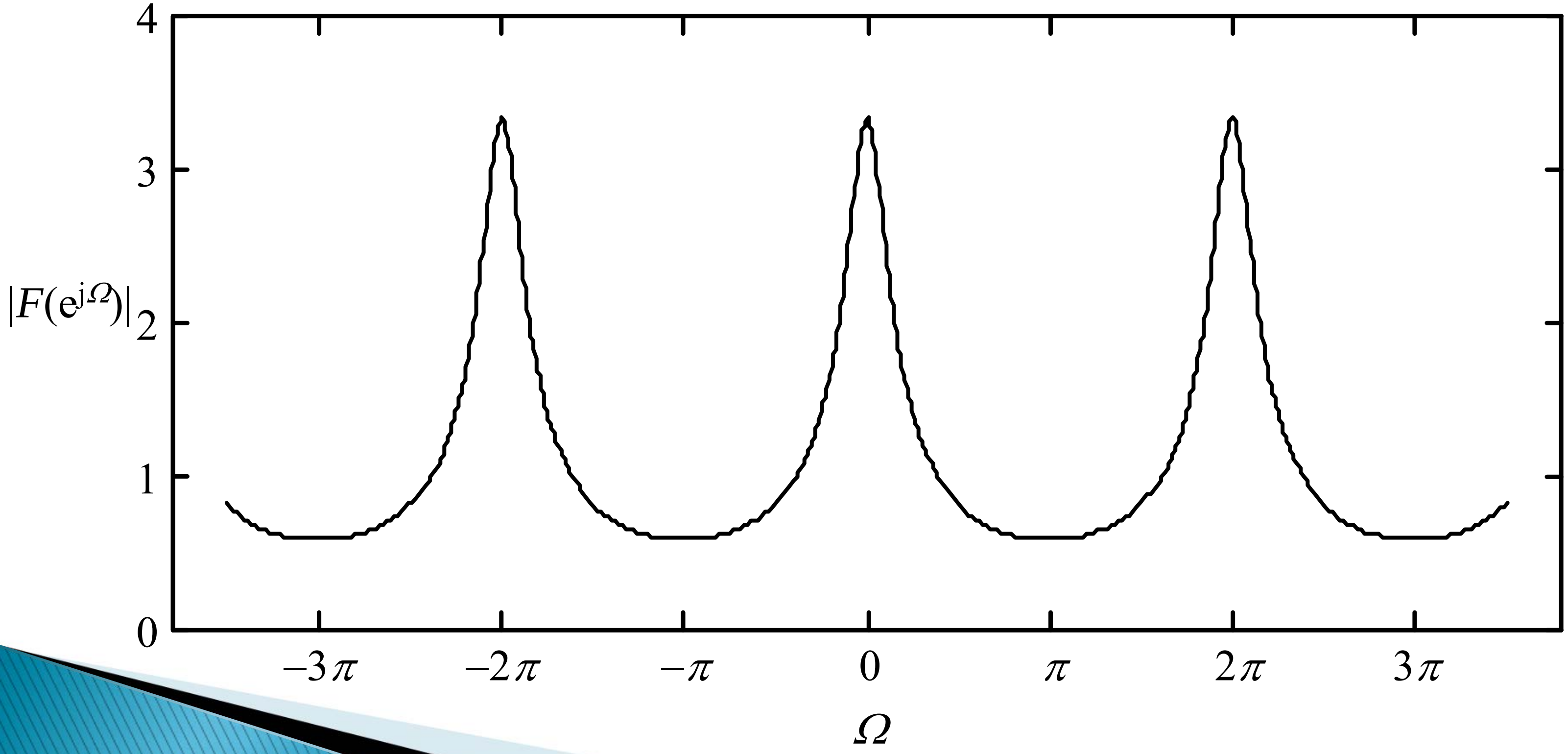
$$\left|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|=4\cos^2\frac{\Omega}{2}$$

$$\phi(\Omega)=-\Omega$$

例2 $\quad \text{DTFT}\{\alpha^k u[k]\} \quad |\alpha|<1$

解：

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega} = \frac{1}{1-\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$



例3　DTFT $\{e^{j\Omega_0 k}\}$

解:

$$\mathrm{DTFT}\{e^{j\Omega_0 k}\}=\sum_k e^{j\Omega_0 k-j\Omega k}=\sum_k e^{-j\frac{2\pi(\Omega-\Omega_0)k}{2\pi}}$$

利用泊松求和公式

$$\delta_T(t)=\sum_k \delta(t\pm kT)=\frac{1}{T}\sum_n e^{\pm j\frac{2\pi nt}{T}}$$

可得

$$\mathrm{DTFT}\{e^{j\Omega_0 k}\}=2\pi\sum_r \delta(\Omega-\Omega_0\pm 2\pi r)$$
$$=2\pi\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)$$

二、DTFT性质

1. 线性特性

$$\mathrm{DTFT}\{af_1[k]+bf_2[k]\}=a\mathrm{DTFT}\{f_1[k]\}+b\mathrm{DTFT}\{f_2[k]\}$$

二、DTFT性质

2. 对称特性

$$\text{DTFT}\{f^*[k]\} = F^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$$

$$\text{DTFT}\{f^*[-k]\} = F^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$可表示为

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \left|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\Omega)} = F_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) + \mathrm{j}F_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

当 $f[k]$是实序列时:

$$\left|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right| = \left|F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})\right| \qquad \phi(\Omega) = -\phi(-\Omega)$$

$$F_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = F_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}) \qquad F_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = -F_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$$

若 $f[k]$实偶对称，则$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$实偶对称。

若 $f[k]$实奇对称，则$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$虚奇对称。

二、DTFT性质

3. 时移

$$\mathrm{DTFT}\{f[k-k_0]\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k_0}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

4. 频移

$$\mathrm{DTFT}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 k}f[k]\}=F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)})$$

5. 时域卷积

$$\mathrm{DTFT}\{f[k]*h[k]\}=F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

二、DTFT性质

6. 频域卷积

$$\mathrm{DTFT}\{f[k]h[k]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

7. 频域微分

$$\mathrm{DTFT}\{kf[k]\} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{\mathrm{d}\Omega}$$

8. 能量定理

$$\sum_k \left|f[k]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|^2 \mathrm{d}\Omega$$

例4：$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = 1 - |\Omega|/\pi \quad |\Omega| \le \pi$，求$f[k]$.

解：

$$G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{\mathrm{d}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{\mathrm{d}\Omega} = \begin{cases} 1/\pi & -\pi \le \Omega < 0 \\ -1/\pi & 0 < \Omega \le \pi \end{cases}$$

$$g[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega}\mathrm{d}\Omega = -\frac{\mathrm{j}}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\sin k\Omega\,\mathrm{d}\Omega$$

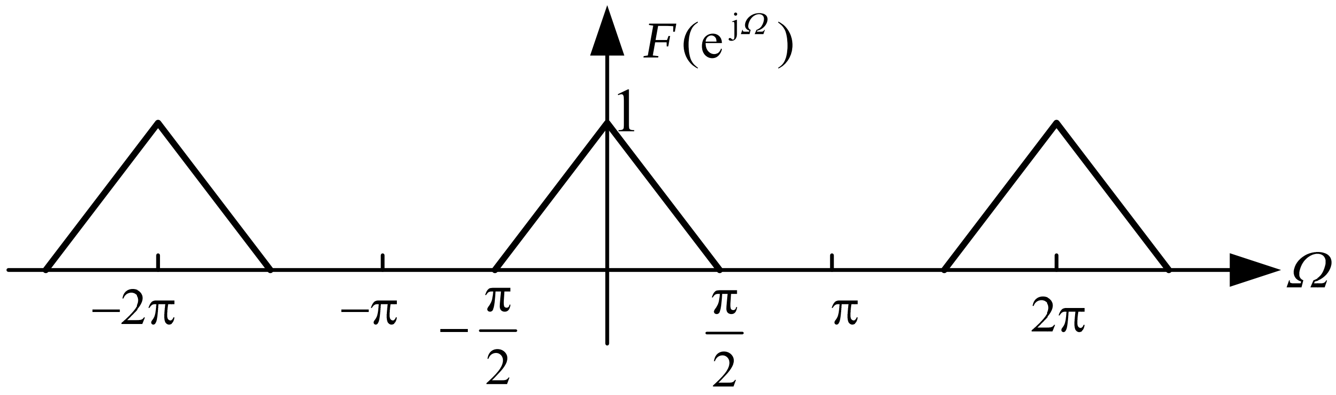
$$= \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \mathrm{j}[(-1)^k - 1]/(\pi^2 k) & k \ne 0 \end{cases}$$

利用频域微分特性

$$f[k] = \frac{g[k]}{\mathrm{j}k} = \begin{cases} 0.5 & k = 0 \\ 0 & k = \text{even} \\ 2/(\pi^2 k^2) & k = \text{odd} \end{cases}$$

例5 已知$f[k]$的频谱如下图，试求

$$\mathrm{DTFT}\{f[k]\cos(\pi k)\}$$

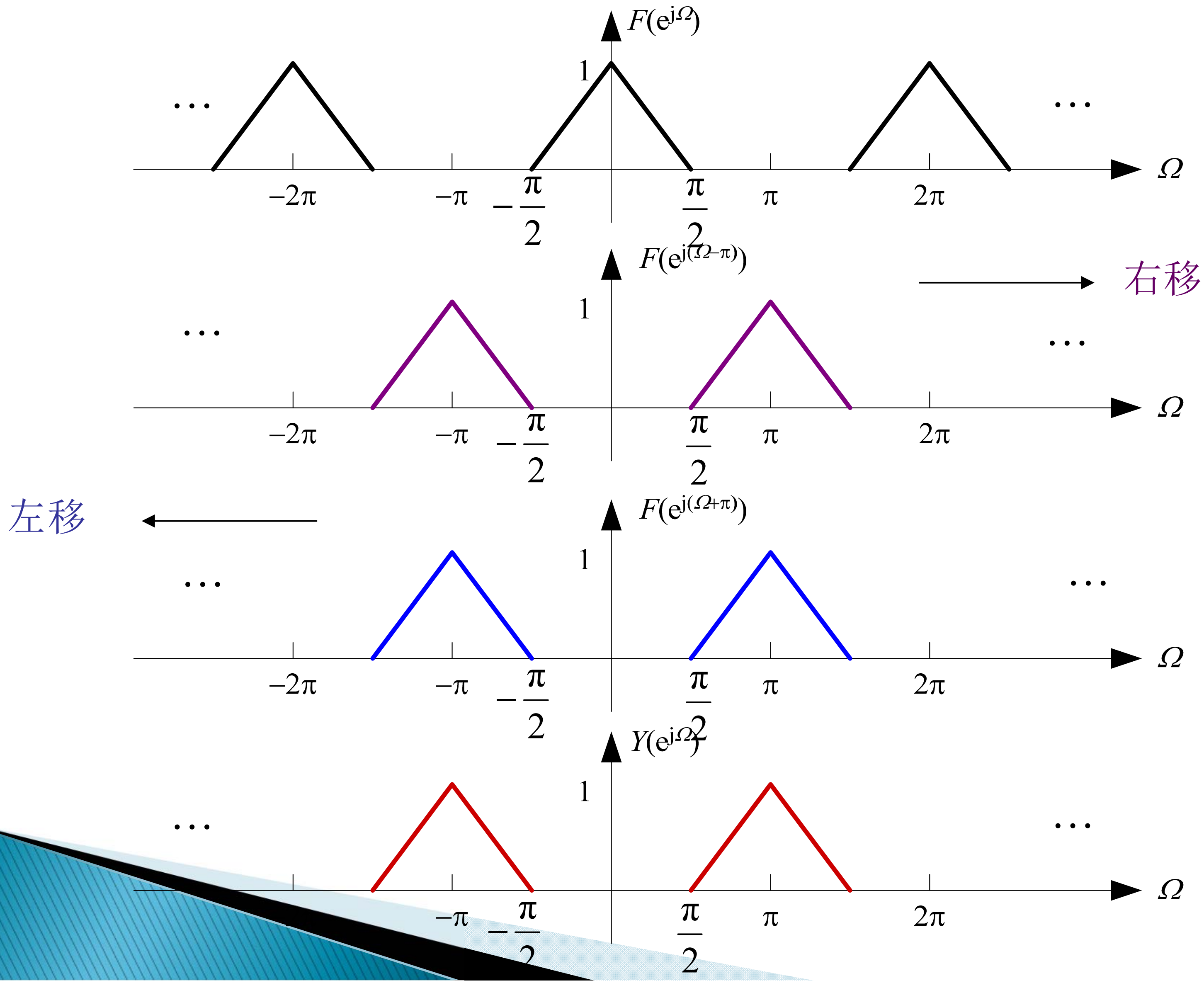


解：

利用频移特性，可得

$$\mathrm{DTFT}\{f[k]\cos(\pi k)\}=[F(e^{j(\Omega-\pi)})+F(e^{j(\Omega+\pi)})]/2$$

例5 $\mathrm{DTFT}\{f[k]\cos(\pi k)\}=[F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\pi)})+F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega+\pi)})]/2$



三、抽取信号的频谱

$$f[k] \longrightarrow \boxed{\downarrow 2} \longrightarrow f[2k]$$

$$\mathrm{DTFT}\{f[2k]\} = Y_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k} f[2k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}$$

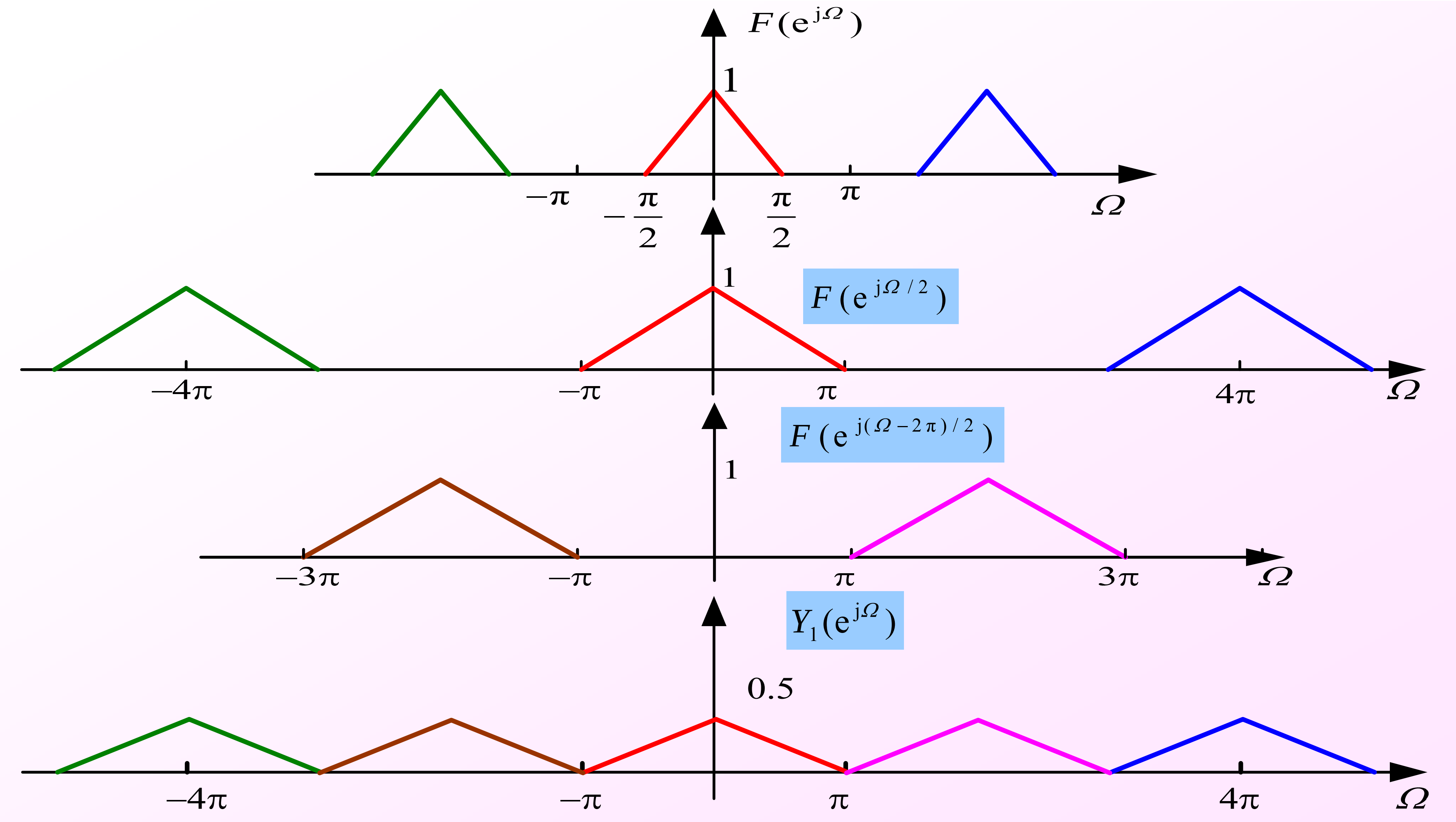
$$= \sum_{k=\mathrm{even}} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k/2}$$

$$= \sum_{k} \frac{f[k] + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k} f[k]}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k/2}$$

$$= \frac{1}{2}[F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Omega}{2}}) + F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Omega-2\pi}{2}})]$$

三、抽取信号的频谱

$$Y_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}[F(e^{j\frac{\Omega}{2}}) + F(e^{j\frac{\Omega-2\pi}{2}})]$$



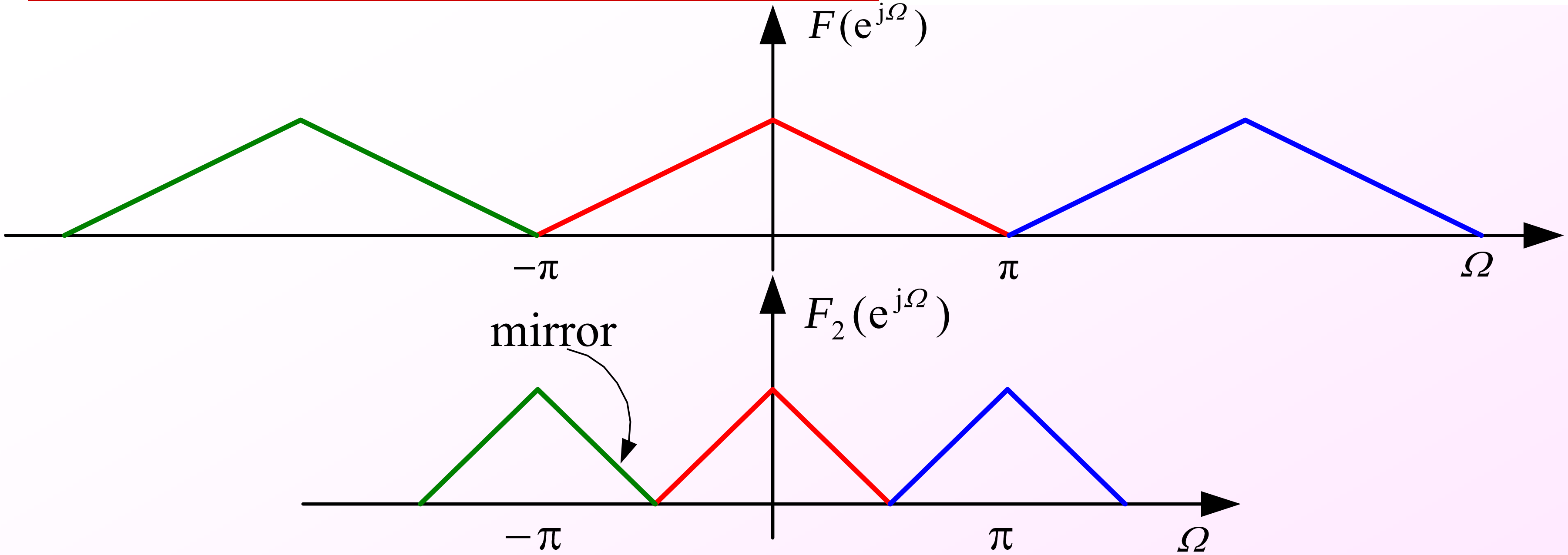
四、内插信号的频谱

$$f[k] \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow f_2[k]$$

$$f_2[k]=\begin{cases} f[k/2] & k\text{是2的整数倍} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\sum_{k=\text{even}} f[k/2]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega}=\sum_{l} f[l]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2l\Omega}=F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega})$$

四、内插信号的频谱

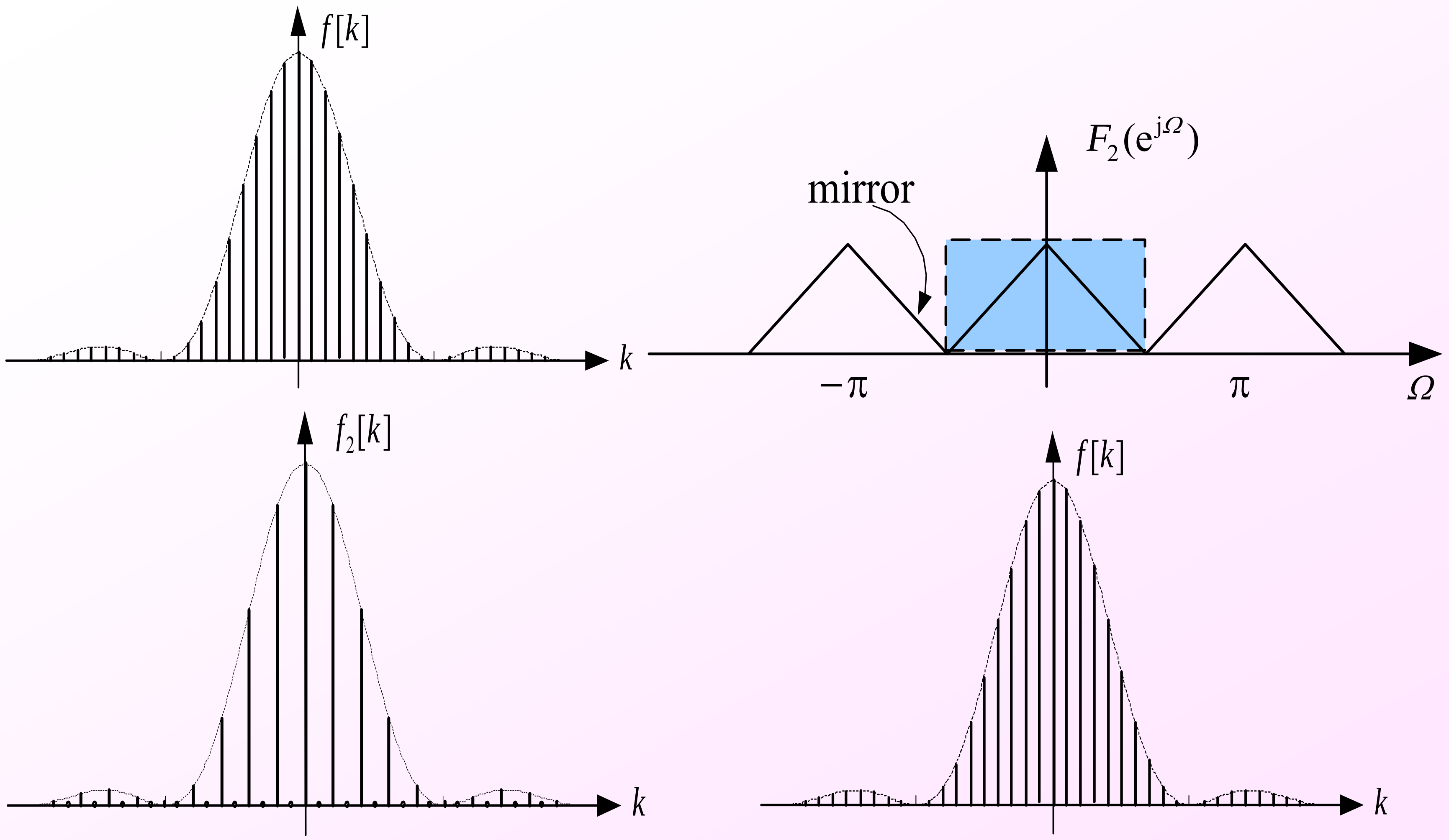


为了去掉mirror

$$f[k] \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow \boxed{h[k]} \longrightarrow y_2[k]$$

$$y_2[k] = \sum_{n=\text{even}} f[n/2]h[k-n] = \sum_{l} f[l]h[k-2l]$$

四、内插信号的频谱



五、信号傅里叶分析小结

傅立叶生平

- 1768年出生于法国
- 1807年提出“任何周期函数都可以用三角级数表示”
  *拉格朗日反对发表
  *1829年狄里赫利给出收敛条件
- 1811年，法国科学院获奖论文，提出傅里叶积分形式
- 1822年首次发表在“热的解析理论”中

五、信号傅里叶分析小结

傅立叶的两个最主要的贡献——

- "周期信号都可表示为成谐波关系的正弦信号的加权和"——傅里叶的第一个主要论点
- "非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示"
——傅里叶的第二个主要论点

注：这只是傅立叶贡献的一部分，傅立叶在传热学、数理方程等方面也有巨大贡献

五、信号傅里叶分析小结

	连续频率	离散频率
连续时间	CTFT	CTFS
离散时间	DTFT	DTFS

五、信号傅里叶分析小结

CTFS	CTFT
$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$\mathrm{C_n}=\frac{1}{\mathrm{T_0}}\int_{t_0}^{\mathrm{T_0}+\mathrm{t_0}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}$	$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
频谱函数	频谱密度函数

五、信号傅里叶分析小结

DTFS

$$f[k]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}F[m]e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$$

$$F[m]=\sum_{k=0}^{N-1}f[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

DTFT

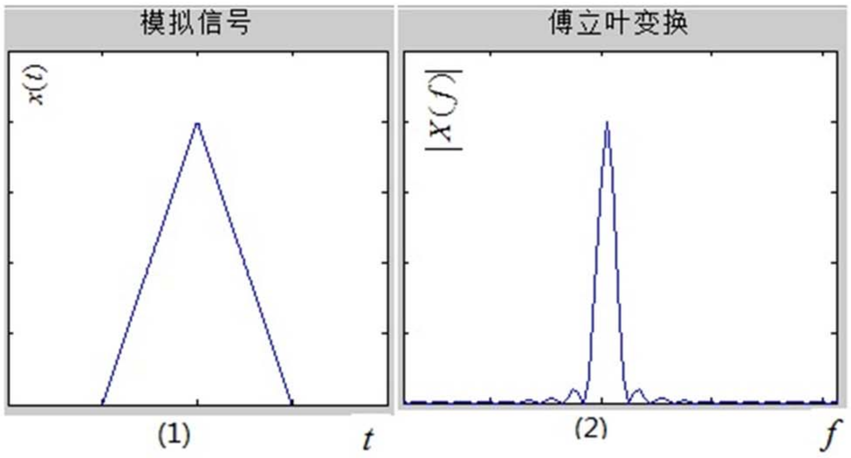
$$f[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{j\Omega})e^{j\Omega k}\,d\Omega$$

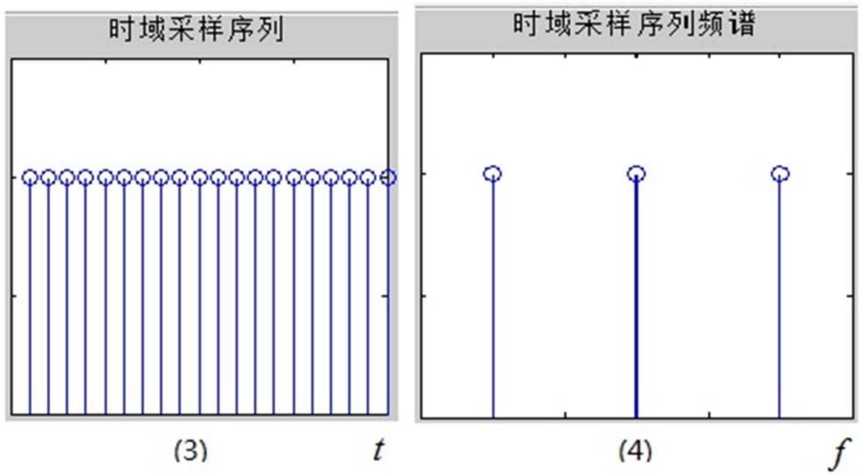
$$F(e^{j\Omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]e^{-j\Omega k}$$

五、信号傅里叶分析小结

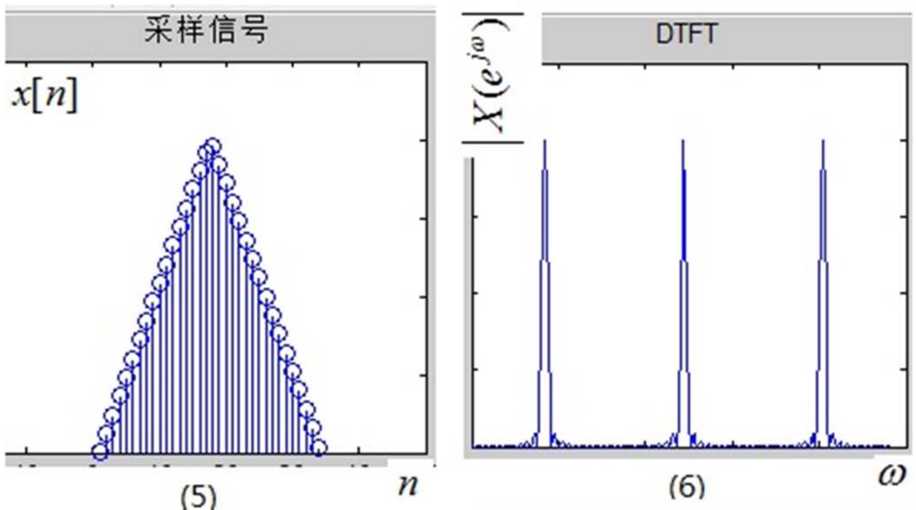
	连续时间		离散时间	
	时域	频域	时域	频域
傅里叶级数	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 连续时间，在时间上是周期的	$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ 离散频率，在频率上是非周期的 对	$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ 离散时间，在时间上是周期的 ←对偶→	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ 离散频率，在频率上是周期的
傅里叶变换	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}dt$ 连续时间，在时间上是非周期的 ←对偶→	$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ ① 连续频率，在频率上是非周期的	偶 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ ① 离散时间，在时间上是非周期的	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$ 连续频率，在频率上是周期的

五、信号傅里叶分析小结



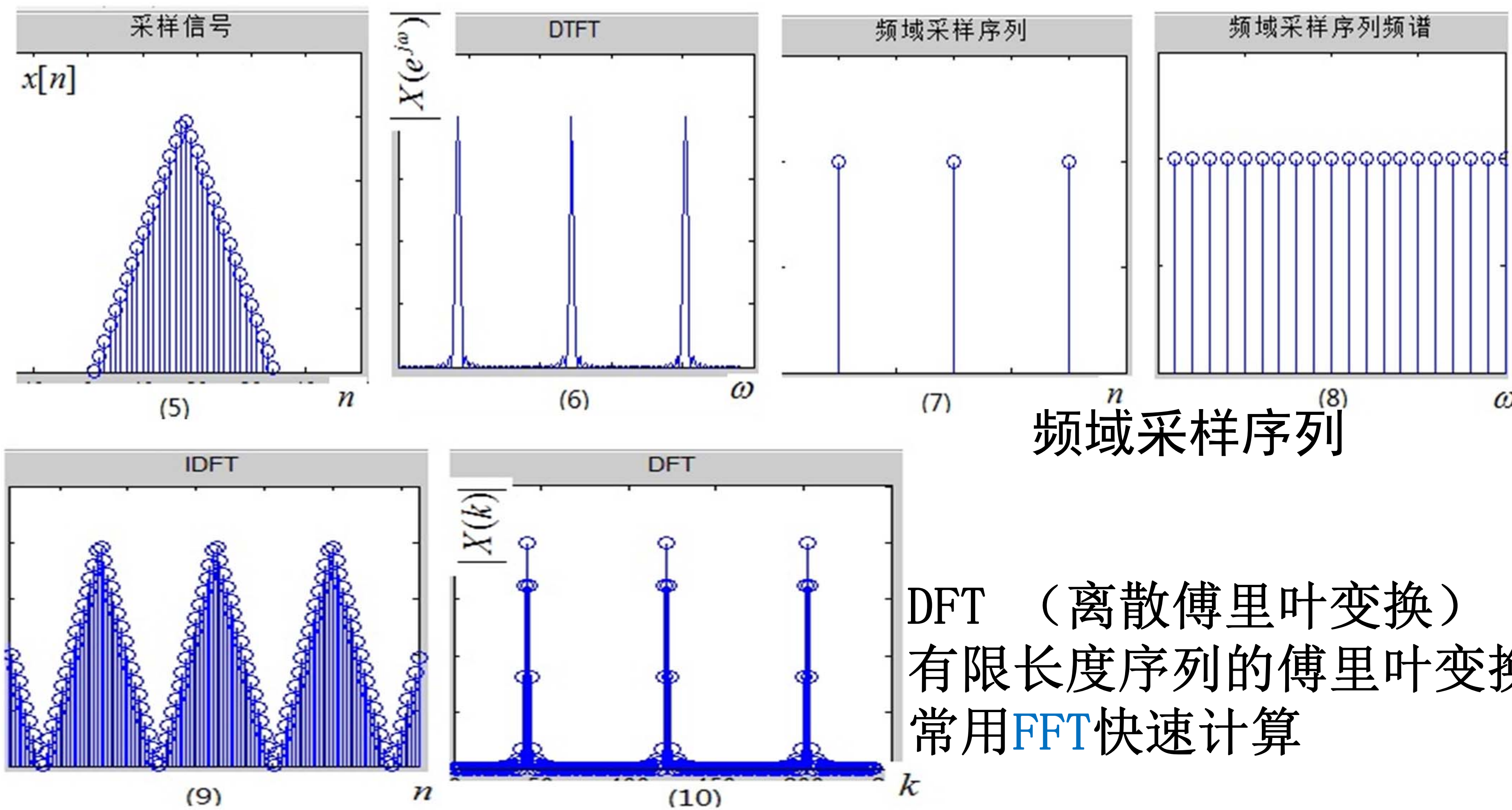


时域采样序列



DTFT
（离散时间傅里叶变换）
常用FFT快速计算

五、信号傅里叶分析小结



频域采样序列

DFT （离散傅里叶变换）
有限长度序列的傅里叶变换
常用FFT快速计算

傅立叶变换的基本性质

1. 线性特性: $af_1(t)+bf_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow}aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)$

2. 共轭对称特性: $f^*(t)\overset{F}{\leftrightarrow}F^*(-j\omega); f^*(-t)\overset{F}{\leftrightarrow}F^*(j\omega)$

3. 对称互易特性: $F(jt)\overset{F}{\leftrightarrow}2\pi f(-\omega)$

4. 展缩特性: $f(at)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a})$

傅立叶变换的基本性质

5. 时移特性：$f(t-t_0)\overset{F}{\leftrightarrow}F(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$

6. 频移特性: $f(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\overset{F}{\leftrightarrow}F[j(\omega-\omega_0)]$

7. 时域卷积特性：$f_1(t)*f_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow}F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$

8. 频域卷积特性: $f_1(t)\cdot f_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}[F_1(j\omega)*F_2(j\omega)]$

傅立叶变换的基本性质

9. 时域微分特性: $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \overset{F}{\leftrightarrow} (j\omega)^n \cdot F(j\omega)$

10. 积分特性: $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

修正的时域微分特性 $F(\mathrm{j}\omega) = \pi(f(\infty) + f(-\infty))\delta(\omega) + \frac{F_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$

11. 频域微分特性: $t^n f(t) \overset{F}{\leftrightarrow} j^n \cdot \frac{dF^n(j\omega)}{d\omega^n}$

12. 能量定理: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

课后作业：

P178：

5-15：（1）

5-16：（1）

5-17：（2）

5-18：（3）（4）