信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn
http://gr.xjtu.edu.cn/web/wanghg
“教学”栏目

第2章 信号与系统

- 信号的描述与分类
- 常用的基本信号
- 系统的描述
- 系统的性质
- 系统的分析方法

1.4 系统的描述：
(Representation of Systems)

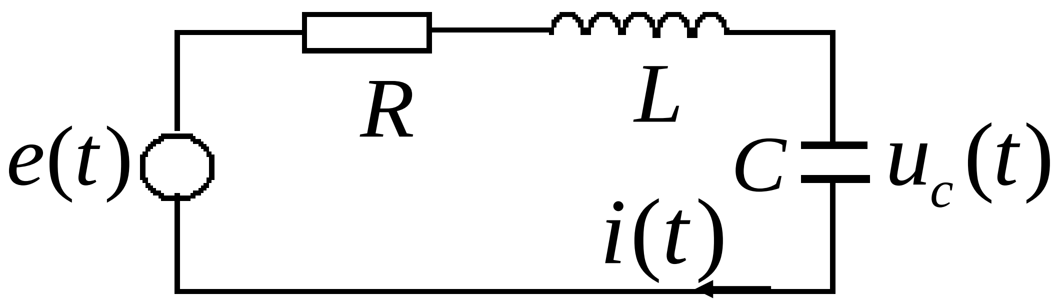
一．系统的模型： （The modle of systems)

系统是由一些相互联系，相互依赖的事物组成的具有一定功能的整体。

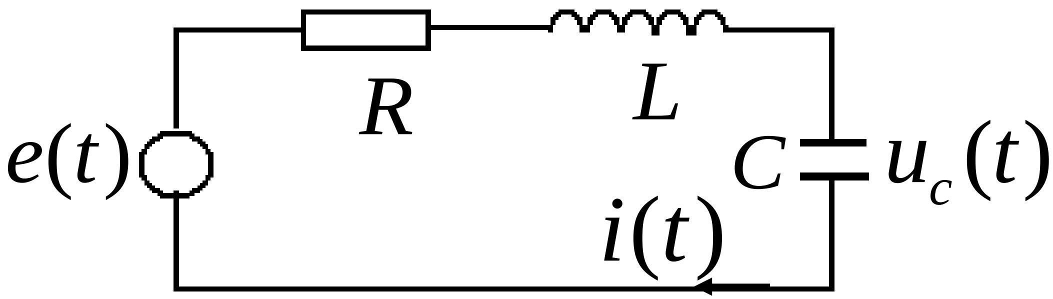
系统可以看成对信号进行某种变换的过程，要分析一个系统，首先要建立系统的模型。

从实际物理问题抽象出描述输入—输出关系或物理特性的数学模型。一般有输入—输出描述和状态空间描述两种。

例：



例：

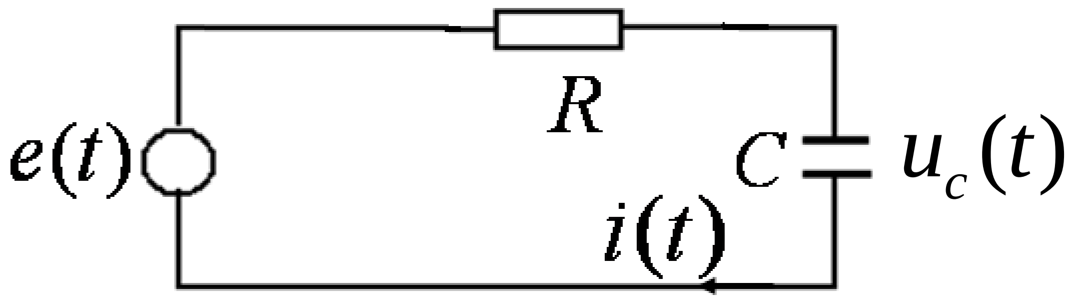


根据基尔霍夫电压定理（KVL）

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$$

$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2}+RC\frac{di(t)}{dt}+i(t)=C\frac{de(t)}{dt}$$

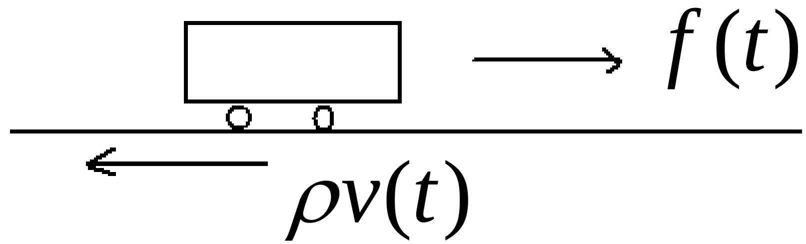
例：考虑如下的RC电路



$$i(t)=\frac{e(t)-u_c(t)}{R} \qquad i(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u_c(t)=\frac{1}{RC}e(t) \qquad （1）$$

例：



$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{\rho}{m}v(t)=\frac{1}{m}f(t) \qquad (2)$$

比较公式（1）和（2）

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

更一般的形式

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

系统的表示：（Representation of Systems）

- 系统对输入信号的作用，其本质就是对输入信号进行某种变换或运算。

- 连续时间系统是把连续时间输入信号变换成连续时间输出信号的系统。

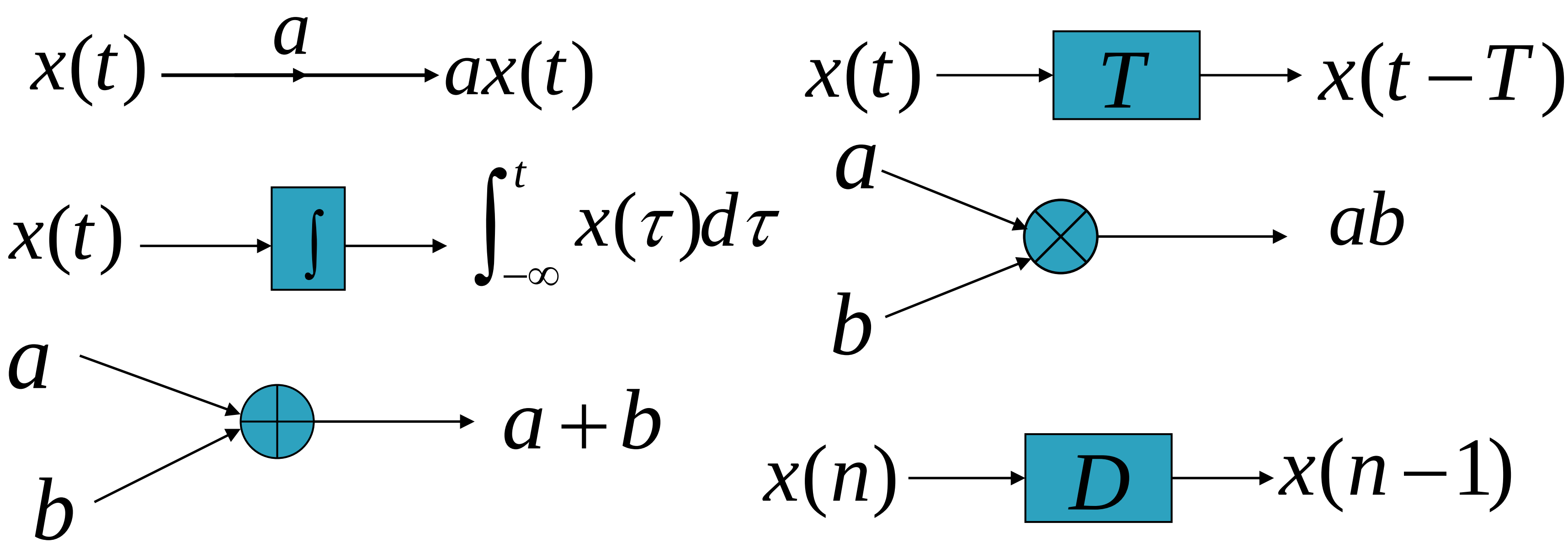
- 离散时间系统是把离散时间输入信号变换成离散时间输出信号的系统。

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x(n) \rightarrow y(n)$$

· 系统对信号的变换功能是通过系统模型中包含的各种数学运算来实现的。

· 系统模型中的基本运算：

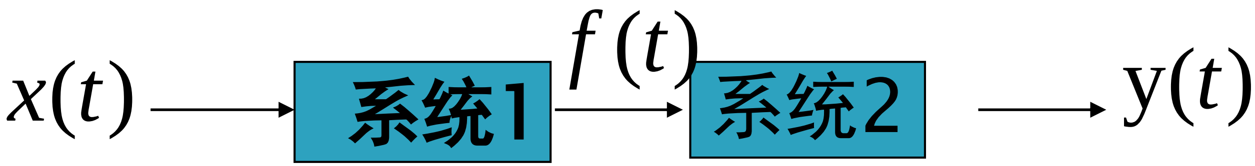


· 系统表示方法：

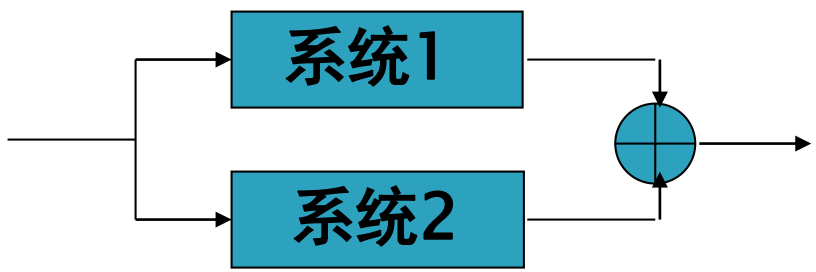
1．用方程表示。2．用电路图表示。3．用方框图表示。

系统的互联：(interconnection of systems)

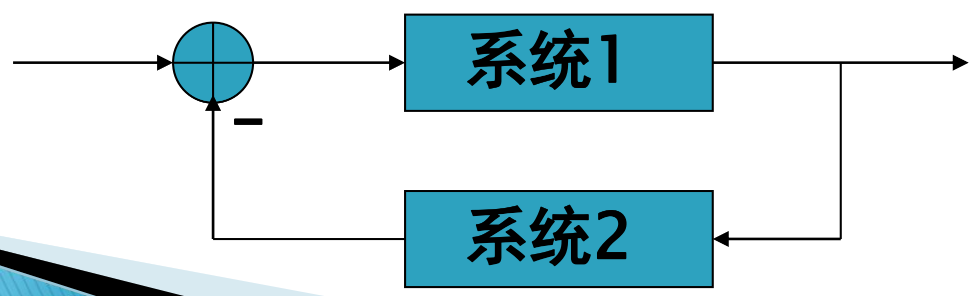
1） 级联：(cascade interconnection)



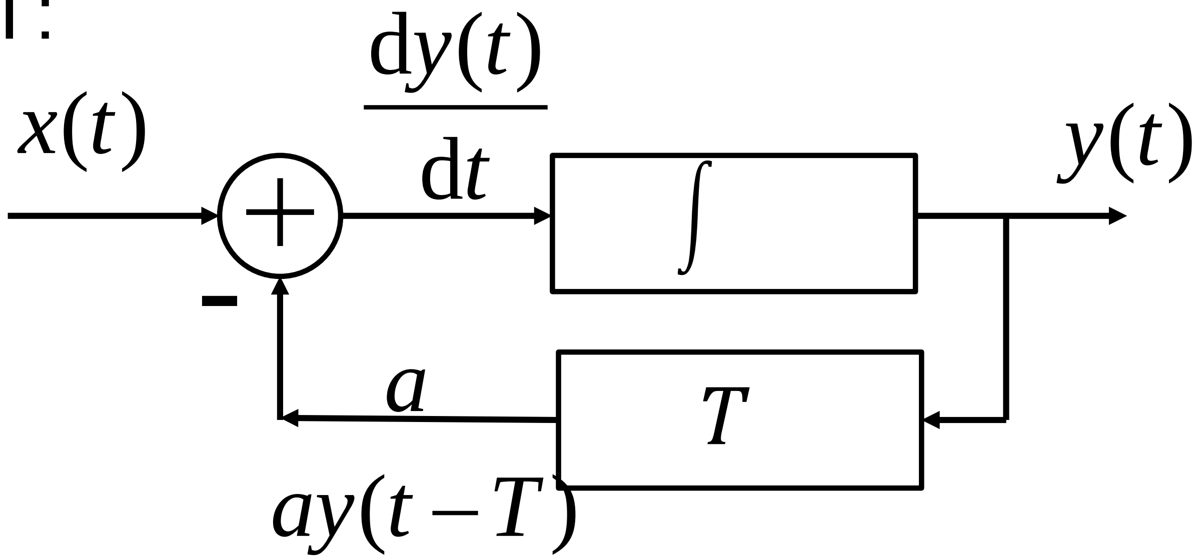
2） 并联：(parallel interconnection)



3） 反馈联结： （feedback interconnection)



例1.11:



$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-ay(t-T)+x(t)$$

输入输出方程:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t-T)=x(t)$$

1.5 系统的性质：(Properties of systems)

1） 记忆与无记忆系统（即时系统与动态系统）(memory system and memoryless system)

- 即时系统(无记忆系统)：

在任何时刻系统的输出只与该时刻的输入有关, 而与该时刻以前或以后的输入无关。

例：全电阻网络；$y(t)=kx(t)$； $y(n)=kx(n)$；

$$y(t)=\sin x(t); \qquad y(n)=x^2(n);\cdots\cdots$$

❖ 即时系统的特例：

恒等系统 ：(identity system)

$$y(t)=x(t) \qquad y(n)=x(n)$$

•记忆系统（动态系统）:(systems with memory)

它的输出不仅与当前时刻的输入有关，也与其它时刻的输入有关。

例： $$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \qquad y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$$y(t)=x(t-1) \qquad y(n)=x(n)-x(n-1)\cdots\cdots$$

都是记忆系统 。

2）可逆性与逆系统：

(Invertibility and inverse system)

如果系统对任何不同的输入都能产生不同的输出，即输入与输出一一对应，则系统是可逆的。如果系统对两个或两个以上不同的输入产生相同的输出，则系统是不可逆的(**noninvertible**)。

例： $y(t)=x^2(t)$ $\quad y(n)=x(2n)$ $\quad y(t)=0$

$y(n)=x^2(n)$ $\quad y(n)=x(n)\cdot x(n-1)$

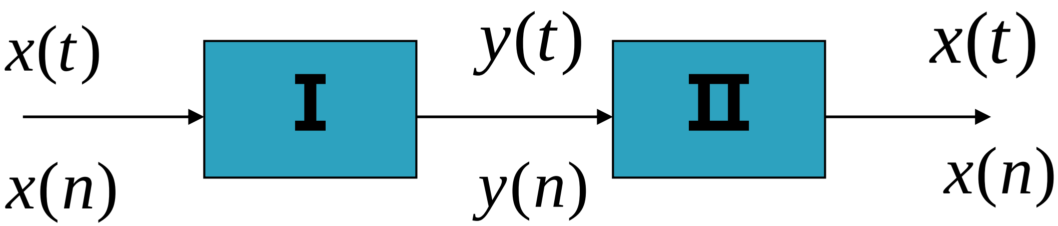
显然对 $x_1(n)=\delta(n)$ 都有 $y(n)=0$

$x_2(n)=\delta(n-1)$ 系统不可逆。

- 判断系统是否可逆一般是困难的。
- 如果一个系统与另一个系统级联后构成一个恒等系统，

则后者是前者的逆系统(**inverse system**)。

例:



$$y(t) = ax(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{a}x(t)$$

$$y(n) = x(n - n_0) \Rightarrow y(n) = x(n + n_0)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = x'(t)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \Rightarrow y(n) = x(n) - x(n-1)$$

3. 因果性 (causality)

如果一个系统在任何时刻的输出都只与当时这个时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是**因果的(causal system)**。否则就是**非因果的(noncausal system)**。

一般说来，**非因果系统是物理不可实现的**。这体现了因果性对系统实现的重要性。

对非实时处理信号的离散时间系统，或信号的自变量并不具有时间概念的情况，因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决条件。

例如在图像处理中，自变量是图像中各点的坐标位置，而并非代表时间。对某些数据处理系统，如股市分析、经济预测等，实际上是以足够的延时来换取非因果性的实现。

$y(n)=x(-n)\ \because n<0$ 时 $y(n)$ 决定于以后时刻的输入。

$y(n)=x(n)-x(n+1);\quad y(t)=x(2t)$ 是非因果系统。

RLC电路，$y(n)=x(n)-x(n-1)\quad y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$

都是因果系统。

思考题：$y(t)=x(t)\cos(t+1)$ 是因果系统还是非因果系统？

4. 稳定性（stability）

如果一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是稳定系统(stable system)。否则，就是不稳定系统(unstable system)。

例如：单摆、RC电路都是稳定系统；$y(n)=x(n-1)$ 也是稳定系统。

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k),\quad y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau,\quad y(t)=tx(t)$$

都是不稳定系统。

例：检验系统 $y(t)=tx(t)$ 和 $y(t)=e^{x(t)}$ 的稳定性。

· 工程实际中总希望所设计的系统是稳定的。系统的稳定性在系统分析和系统综合中具有重要意义。

5. 时变与时不变系统：

(Time-invariant and time-varying system)

如果一个系统当输入有一个时间上的平移时，输出也产生相同的平移，除此之外无任何其它变化，则系统是时不变的 (**time-invariant**)，否则系统是时变的(**time-varying**)。

即若： $x(t) \to y(t)$ $\qquad$ $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

则系统是时不变的。

检验一个系统时不变性的步骤：

1. 令输入为 $x_1(t)$，根据系统的描述，确定此时的输出 $y_1(t)$。
2. 将输入信号变为 $x_2(t)$，再根据系统的描述确定输出 $y_2(t)$。
3. 令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$，根据自变量变换，检验 $y_1(t-t_0)$ 是否等于 $y_2(t)$。

如 $y(n)=(n+1)x(n)$

当 $x(n)=x_1(n)$ 时，$y_1(n)=(n+1)x_1(n)$

当 $x(n)=x_2(n)$ 时，$y_2(n)=(n+1)x_2(n)$

令 $x_2(n)=x_1(n-n_0)$ 则有：

$$y_2(n)=(n+1)x_1(n-n_0)$$

由于 $y_1(n-n_0)=(n-n_0+1)x_1(n-n_0)\neq y_2(n)$

$\therefore$ 系统是时变的。

又如： $y(t)=x(-t)$

当 $x(t)=x_1(t)$ 时， $y_1(t)=x_1(-t)$

当 $x(t)=x_2(t)$ 时， $y_2(t)=x_2(-t)$

令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ 则有：$y_2(t)=x_1(-t-t_0)$

而 $y_1(t-t_0)=x_1[-(t-t_0)]=x_1(t_0-t)\neq y_2(t)$

$\therefore$ 该系统是时变的。

6. 线性（Linearity）

如果一个系统即满足迭加性也满足齐次性就称该系统是线性的。（Linear System）否则就是非线性的（Nonlinear System）。

若 $x_1(t) \to y_1(t)$ $\qquad x_2(t) \to y_2(t)$

$ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$ 其中**a,b**是常数

满足此关系的系统是线性的。

例： $y(t) = 4x(t) + 3x'(t)$

满足叠加性，也满足齐次性。

例2：$y(t)=\dfrac{1}{x(t)}[x'(t)]^2$

因为，若输入为 $x_1(t)+x_2(t)$ 则

$$y_2(t)=\frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}[(x_1(t)+x_2(t))']^2$$

$$=\frac{[x_1'(t)+x_2'(t)]^2}{x_1(t)+x_2(t)}\neq\frac{[x_1'(t)]^2}{x_1(t)}+\frac{[x_2'(t)]^2}{x_2(t)}$$

满足齐次性但不满足可加性。

例3： 检验系统 $y[n]=2x[n]+3$是否有线性特性。

$$\left.\begin{aligned}&y_3[n]=2x_1[n]+2x_2[n]+3\\&y_1[n]+y_2[n]=2x_1[n]+2x_2[n]+6\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ 不满足可加性。

$x[n]=0\rightarrow y[n]=3 \qquad \Rightarrow$ 不满足齐次性。

所以系统不是线性的。但是给出的方程确是个线性方程！

例4：检验系统 $y(t)=x^2(t)$ 是否有线性特性。

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=x_1^2(t)\\ y_2(t)&=x_2^2(t)\\ x_3(t)&=ax_1(t)+bx_2(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} y_3(t)&=\left[ax_1(t)+bx_2(t)\right]^2\\ &=a^2x_1^2(t)+b^2x_2^2(t)+2abx_1(t)x_2(t)\\ &=a^2y_1(t)+b^2y_2(t)+2abx_1(t)x_2(t)\end{aligned}$$

所以系统不是线性的。

例5：检验系统 $\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$ 是否有线性特性。

令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的响应分别为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ ，则

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt}+3y_1(t)=x_1(t)\\ \dfrac{dy_2(t)}{dt}+3y_2(t)=x_2(t)\end{cases}$$

将第一个及第二个方程分别乘以 k_1 及 k_2 ，然后相加

$$\frac{d}{dt}\left[k_1 y_1(t)+k_2 y_2(t)\right]+3\left[k_1 y_1(t)+k_2 y_2(t)\right]=k_1 x_1(t)+k_2 x_2(t)$$

对于这个方程，用

$$\begin{cases} x(t)=k_1 x_1(t)+k_2 x_2(t) \\ y(t)=k_1 y_1(t)+k_2 y_2(t) \end{cases}$$

如果一个系统是线性的，当我们能够把输入信号 $x(t)$ 分解成若干个简单信号的线性组合时，只要能得到该系统对每一个简单信号所产生的响应，就可以很方便的根据线性特性，通过线性组合而得到系统对 $x(t)$ 的输出响应。即

若 $x(t)=\sum_{k} a_k x_k(t)$ ，且 $x_k(t)\rightarrow y_k(t)$

$\downarrow$

则 $y(t)=\sum_{k} a_k y_k(t)$

这一思想是信号与系统分析理论和方法建立的基础。

- 线性系统一定满足零输入—零输出的特性。即：线性系统在没有输入信号加入时，一定不能有输出产生。

例如：$y(t) = x(t) + 2$

显然有 $x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t) + 2$

$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t) + 2$$

该系统既不满足齐次性，也不满足可加性，但当考查输入的增量与输出的增量之间的关系时，有

$$x_1(t) - x_2(t) \to y_1(t) - y_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

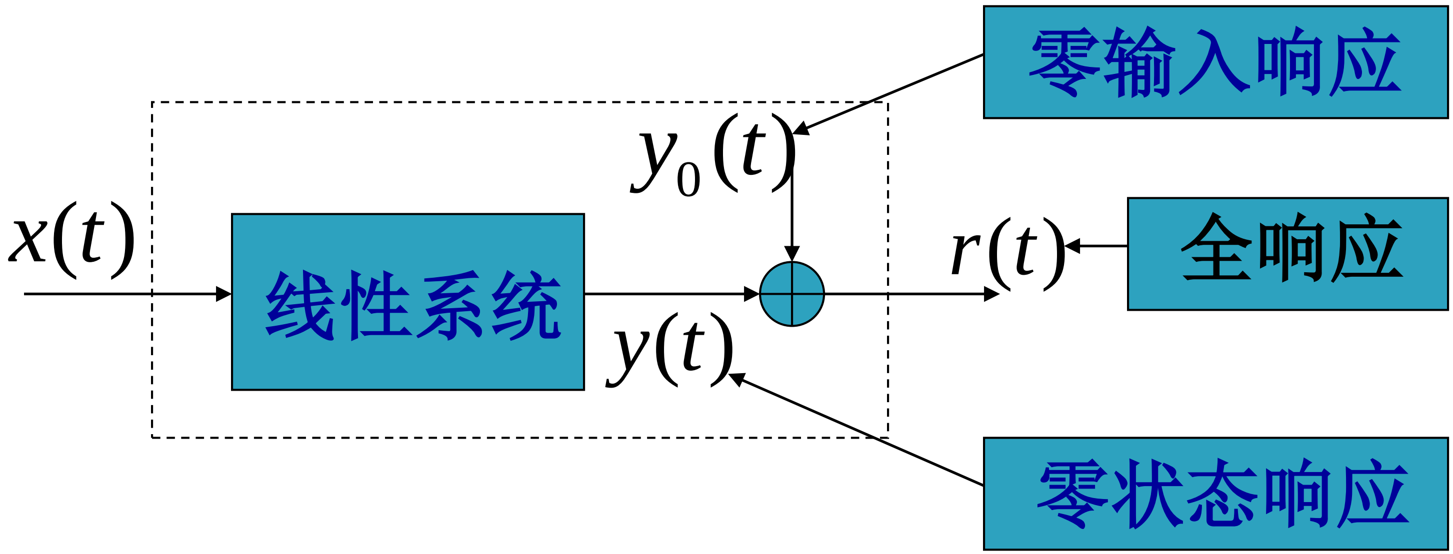
可见输入的增量与输出的增量之间是满足线性关系的，它是一个增量线性系统。

7．增量线性系统：(incrementally linear system)

有一种工程中广泛应用的系统，虽然其输入与输出之间不满足线性关系，但输入的增量与输出的增量呈线性关系，这类系统称为增量线性系统。

任何增量线性系统都可以等效为一个线性系统再加上一部分与输入无关的响应。

例如：$y(t)=kx(t)+2$ 就是增量线性系统。



可见，增量线性系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。

如果零输入响应为零，则系统是线性的。此时，也称系统最初是松弛的或系统是静止的。

本章小结：(summary)

- 建立了信号与系统的数学描述方法。
- 讨论了信号自变量变换对信号的影响。
- 介绍了作为信号分析基础的基本信号：复指数信号, 正弦信号，单位冲激与单位阶跃信号。
- 讨论了离散时间正弦信号的周期性问题。
- 定义并讨论了系统的六大基本特性及互联方式。
- 讨论了奇异函数。

因为在工程实际中相当广泛的一类系统其数学建模可以用一个线性时不变（Linear Time - Invariant）系统来描述。而且基于线性和时不变性，为系统分析建立一套完整的、普遍适用的方法提供了可能。因此线性时不变(LTI)系统将成为本课程所研究的对象。

作业

1.13 a,g

1.15

1.16

1.17

1.18