信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

本章内容：

- 信号的时域分解——用 $\delta(n)$ 表示离散时间信号；用 $\delta(t)$表示连续时间信号；
- LTI系统的时域分析——卷积运算；
- LTI系统的微分方程及差分方程表示；
- LTI系统的框图结构表示。

2.4 LTI系统的性质:
(The Properties of LTI Systems)

LTI系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

1. 记忆性:

根据 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$ ，如果系统是无记忆的，则在任何时刻 n，$y(n)$都只能和 n 时刻的输入有关，即和式中只能有 $k=n$时的一项为非零，因此必须有: $h(n-k)=0, \qquad k\neq n$

即：$h(n)=0, \qquad n\neq 0$

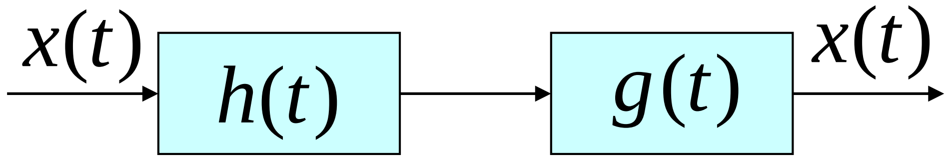
- 无记忆系统的单位脉冲响应为: $h(n)=k\delta(n)$ $h(t)=k\delta(t)$

此时，$x(n)*h(n)=kx(n)$ $x(t)*h(t)=kx(t)$，当 $k=1$时是恒等系统。

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求，则系统是记忆的。

2．可逆性：

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且该逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。



因此有：$h(t)*g(t)=\delta(t)$ $\quad$ $h(n)*g(n)=\delta(n)$

例如：延时器是可逆的LTI系统，其 $h(t)=\delta(t-t_0)$，

其逆系统是 $g(t)=\delta(t+t_0)$，显然有：

$$h(t)*g(t)=\delta(t-t_0)*\delta(t+t_0)=\delta(t)$$

累加器是可逆的LTI系统，其 $h(n)=u(n)$，其

逆系统是 $g(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$ ，显然也有：

$$h(n)*g(n)=u(n)*[\delta(n)-\delta(n-1)]$$

$$=u(n)-u(n-1)=\delta(n)$$

3．因果性：

由$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$，当LTI系统是因果系统时，在任何时刻$n$，$y(n)$都只能取决于$n$时刻及其以前的输入，和式中所有$k>n$的项都必须为零。即：

$$h(n-k)=0,\qquad k>n$$

或 $h(n)=0, n<0$

对连续时间系统，则有：$h(t)=0, t<0;$

- LTI系统具有因果性的充分必要条件是：

$$h(n)=0, n<0;\qquad h(t)=0, t<0;$$

4．稳定性：

根据稳定性的定义，由$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$,

若$x(n)$有界，则 $|x(n-k)|\le A$，若系统稳定，则 $y(n)$

必有界，由 $|y(n)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right|$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)||x(n-k)|\le A\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|$$

可知，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

对连续时间系统，相应有$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$

这是LTI系统稳定的充分必要条件。

5. LTI系统的单位阶跃响应：

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或 $u(n)$ 所产生的响应。即：

$$s(t) = u(t) * h(t)$$

$$s(n) = u(n) * h(n)$$

单位阶跃响应与单位冲激响应的关系：

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \qquad h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) \qquad h(n) = s(n) - s(n-1)$$

单位阶跃响应可以通过实验测得。

2.5 LTI系统的微分和差分方程描述:

(The LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

一. 连续时间LTI系统的微分方程描述:

可以用线性常系数微分方程（ Linear Constant -Coefficient Differential Equation ）描述相当广泛的一类连续时间LTI系统。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \qquad a_k, b_k \text{ 均为常数}$$

求解该微分方程，通常是求出一个特解 $y_p(t)$ 和通解 $y_h(t)$，于是 $y(t)=y_p(t)+y_h(t)$

特解 $y_p(t)$是与输入 $x(t)$同类型的函数；

通解 $y_h(t)$是齐次方程 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=0$ 的解。

欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：

$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$ ，求出其特征根。

在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$y_h(t)=\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}$， 其中 c_k 是待定系数。

通解$y_h(t)$是齐次方程 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$ 的解。

假设上式的一个解为：

$$y_h(t) = ce^{\lambda t}$$

那么

$$\frac{dy_h(t)}{dt} = c\lambda e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^N y_h(t)}{dt^N} = c\lambda^N e^{\lambda t}$$

将上面的结果代入齐次方程，得到：

$$c(a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda t} = 0$$

对于上面方程的的一个解为

$$a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0 = 0$$

如果用一个多项式 $Q(\lambda)$ 表示上式

$$Q(\lambda)=0$$

当 $Q(\lambda)$ 表示为分解因式的形式，则

$$Q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_N)=0$$

则齐次方程的通解为：

$$y_h(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_Ne^{\lambda_N t}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 是任意常数，有附加条件所决定。

要确定系数 C_k，需要有一组条件，称为附加条件。

仅从确定待定系数 C_k 的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

当微分方程描述的系统是线性系统时，必须满足系统零输入—零输出的特性。

系统在没有输入即 $x(t)=0$ 时，微分方程就蜕变成齐次方程。因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，即所有的 C_k 都为零。这就要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零，即具有零附加条件，LCCDE才能描述线性系统。

当这组零附加条件在信号加入的时刻给出时，LCCDE描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

结论：LCCDE连同一组全部为零的初始条件可以描述一个LTI因果系统。

这组条件是：$y(0)=0, y'(0)=0, \cdots\cdots, y^{(N-1)}(0)=0$

如果一个因果的LTI系统由LCCDE描述（方程具有零初始条件），就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。

二．离散时间LTI系统的差分方程描述：

- 一般的线性常系数差分方程可表示为：

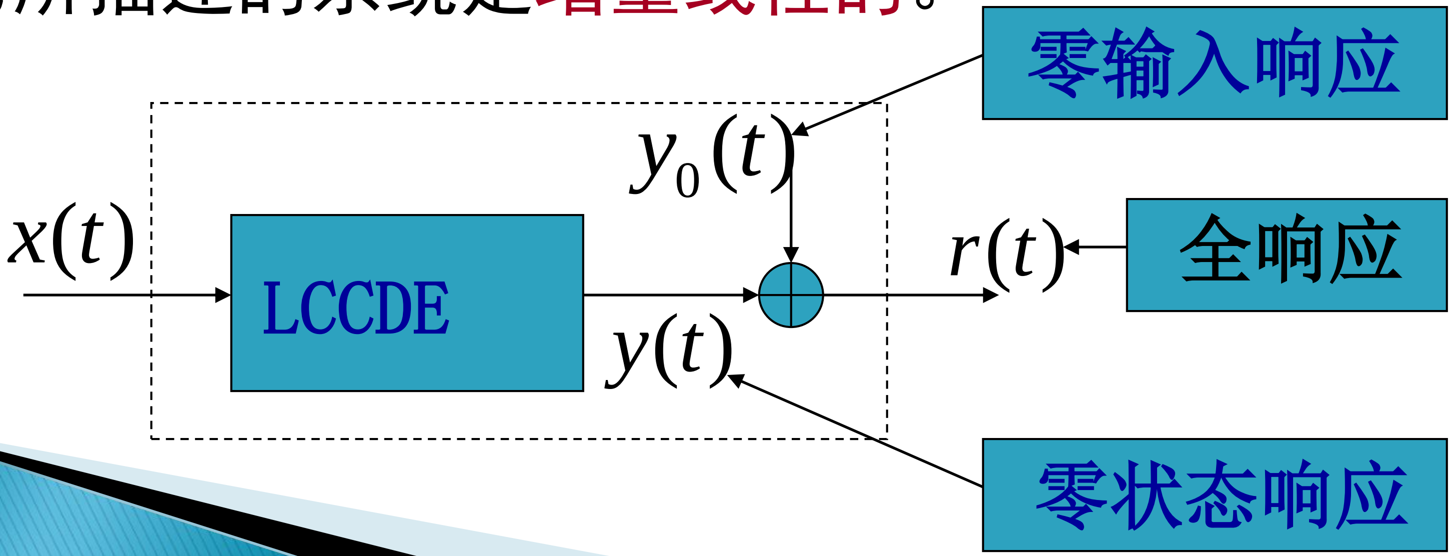
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解$y_p(n)$和通解即齐次解 $y_h(n)$来进行，其过程与解微分方程一样。

- 要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当线性常系数差分方程具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

- 无论微分方程还是差分方程，由于其特解都与输入信号具有相同的函数形式，也就是说它是完全由输入决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为受迫响应或强迫响应。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的自然响应。

如果LCCDE具有一组非零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是增量线性的。



- 增量线性系统的响应有零状态响应和零输入响应。零输入响应与输入信号无关，因此属于自然响应。
- 零状态响应既与输入信号有关，也与系统特性有关，因而它包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。

- 线性常系数差分方程还可以采用迭代的方法求解，将方程改写为：

$$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\right]$$

可以看出，要求出 $y(0)$，不仅要知道所有的 $x(n)$，还要知道 $y(-1),y(-2),\cdots\cdots,y(-N)$ ，这就是一组初始条件，由此可以得出 $y(0)$ 。进而，又可以通过 $y(0),y(-1),\cdots\cdots,y(-N+1)$ ，求得 $y(1)\cdots$ ，

依此类推可求出所有 $n \geq 0$ 时的解。

- 若将方程改写为：

$$y(n-N)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k)\right]$$

则可由 $y(1), y(2), \cdots\cdots, y(N)$求得 $y(0)$，进而由 $y(0)$ 和 $y(1), y(2), \cdots\cdots, y(N-1)$ 求得 $y(-1)\cdots\cdot$，依此可推出 $n \leq 0$ 时的解。

- 由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为递归方程（recursive equation）。

例. 考虑如下差分方程

$$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$$

上式可以表示成

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}y(n-1)$$

可以看出，为了求出当前的输出值，需要前一个输出值

因此，要开始进行递归就要求一个初始条件。

例如，假设强加给初始松弛条件，并且考虑输入：

$$x(n) = \delta(n)$$

这时，因为$n \le -1, x(n) = 0$, 初始松弛条件意味着对于

$n \le -1, y(n) = 0$, 所以就有一个初始条件为 $y(-1) = 0$.

由这个初始条件出发，对 $n \ge 0$ 的各个 $y(n)$ 值如下：

$$y(0) = x(0) + \frac{1}{3} y(-1) = 1$$

$$y(1) = x(1) + \frac{1}{3} y(0) = \frac{1}{3}$$

$$y(2) = x(2) + \frac{1}{3}y(1) = (\frac{1}{3})^2$$

$$\vdots$$

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}y(n-1) = (\frac{1}{3})^n$$

因为初始松弛条件，上述差分方程表征的系统就是LTI的

它的输入输出特性完全由它的单位脉冲响应表征

该系统的单位脉冲响应就是

$$h(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$$

- FIR与IIR系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

若 $a_k = 0, k \neq 0,$ 则方程变为：

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$ 此时方程无须递推。

$$y(n) = x(n) * h(n) \qquad h(n) = b_k / a_0, \qquad 0 \le k \le M$$

显然，$h(n)$为有限长序列，此时方程描述的系统称为FIR (Finite Impulse Response)系统。

若 $k \neq 0$ 时，a_k不全为零，则方程为递推型，$h(n)$为无限长，称为IIR(Infinite Impulse Response)系统。

2.6 LTI系统的方框图表示：

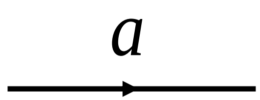
系统分析的一个重要目的是为了设计并实现满足要求的系统，其实质就是完成系统模型所包括的各种运算。利用基本运算单元来表示系统模型的运算功能，就形成了系统的模拟框图。它有助于系统的分析、模拟仿真、设计与实现。

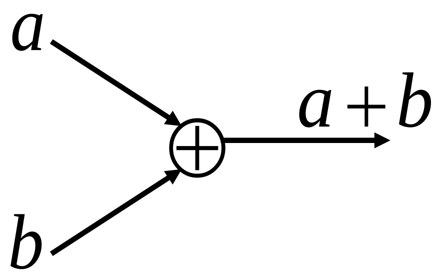
1 离散时间LTI系统的方框图表示：

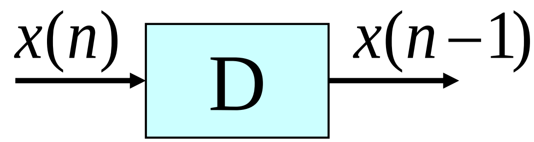
由 $$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right]$$ 可看出：

方程中包括三种基本运算：乘系数、相加、移位。

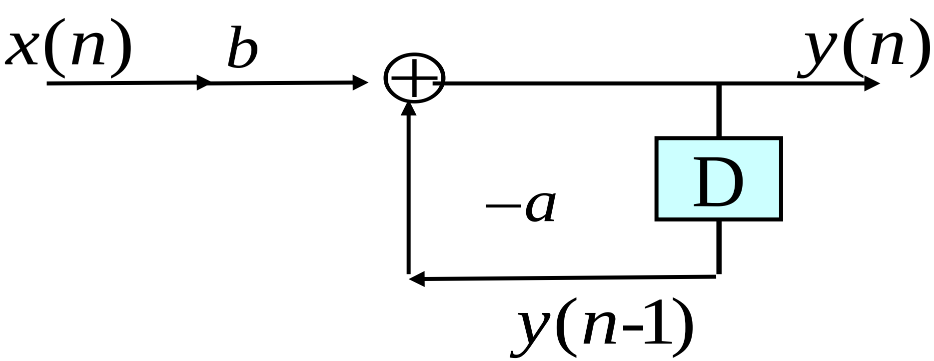
这些运算可用以下符号表示：







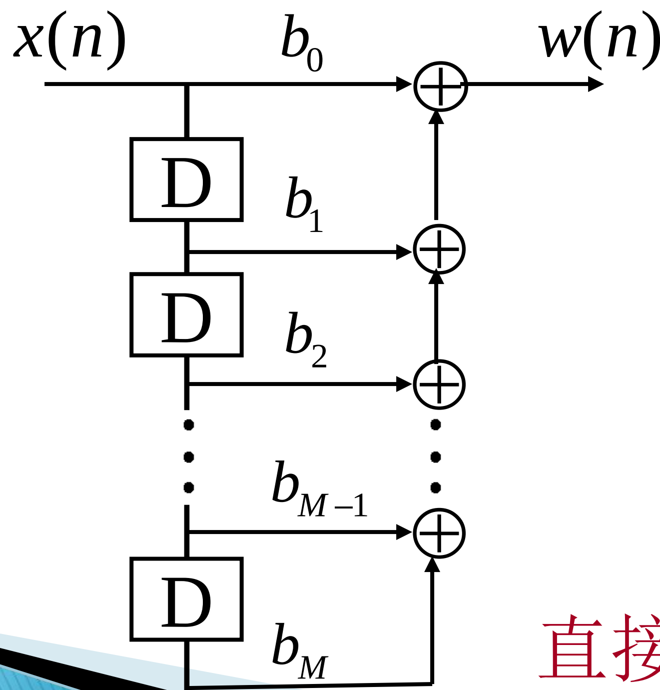
$$y(n)+ay(n-1)=bx(n)$$

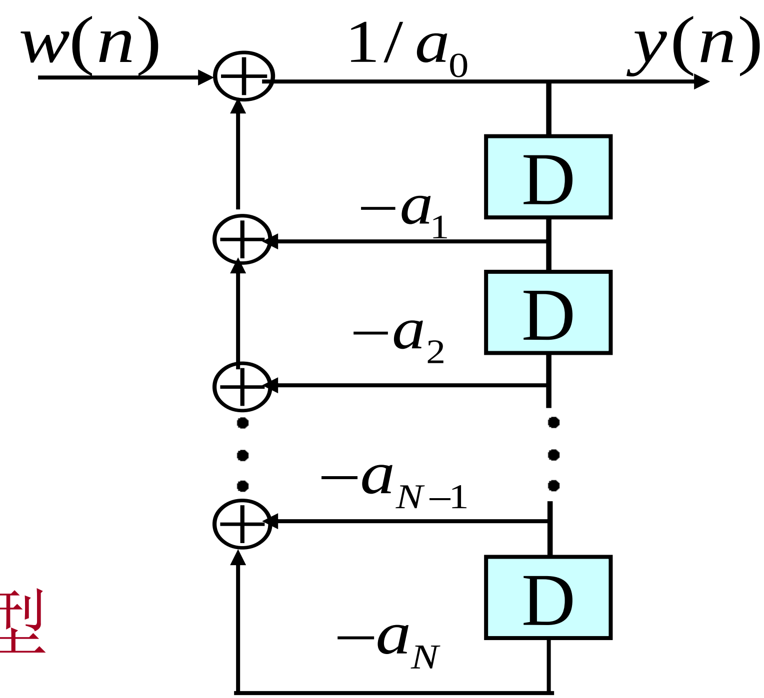


$$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right]$$

令 $w(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$, 则 $y(n)=\frac{1}{a_0}\left[w(n)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right]$

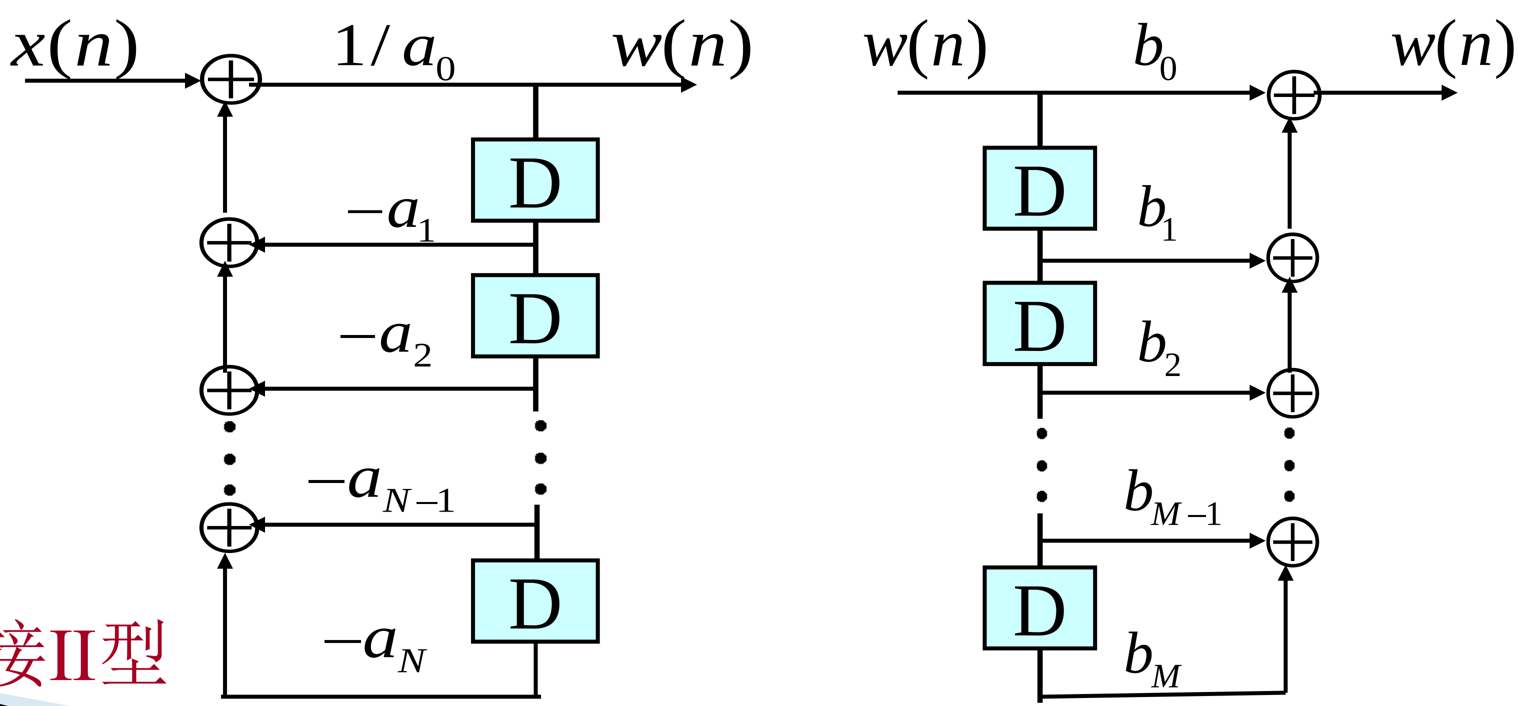
可得图：



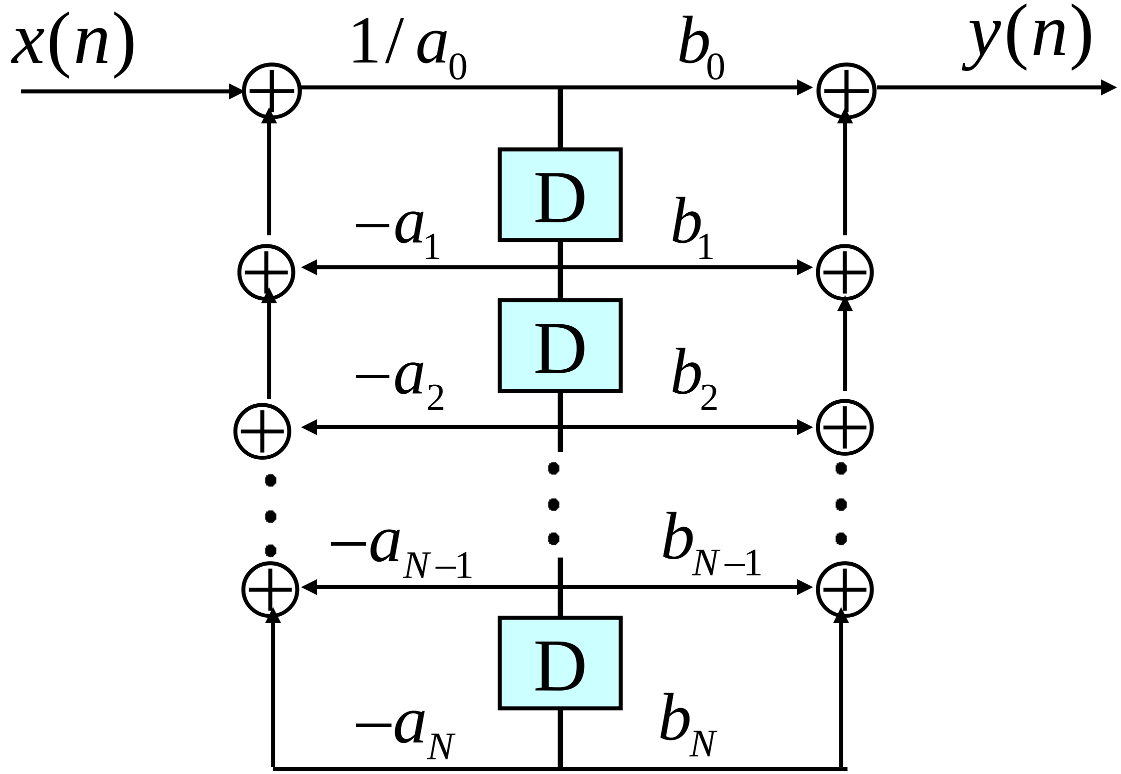


直接I型

将其级联起来，就成为LCCDE 描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。显然，作为两个级联的系统，可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，得到：



直接II型



直接II型

② 连续时间LTI系统的方框图表示：

由 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 看出它也包括三种基本运算：微分、相加、乘系数。

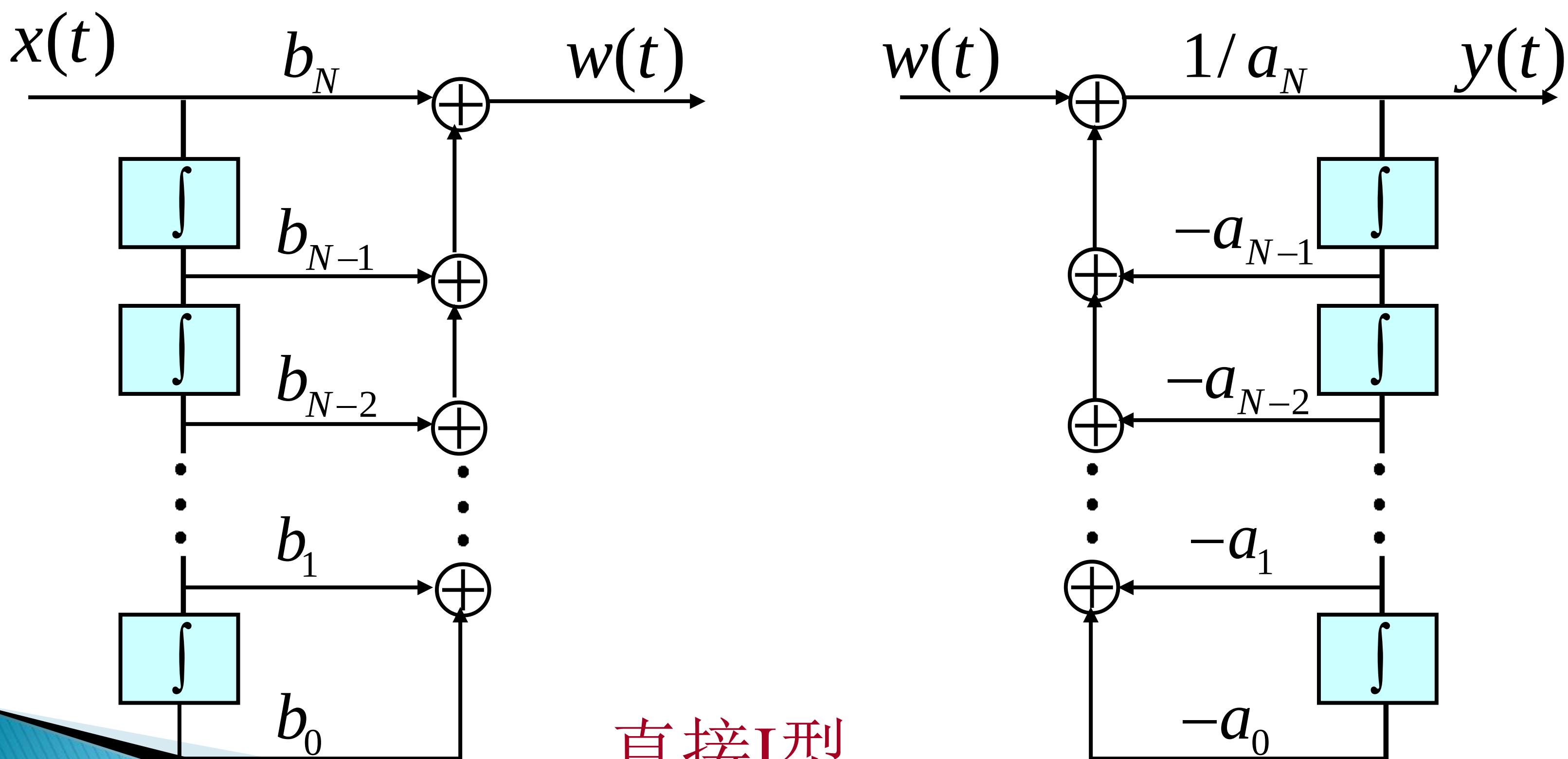
但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，工程上通常使用积分器而不用微分器。

将方程两边同时积分N 次，即可得到一个积分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$$

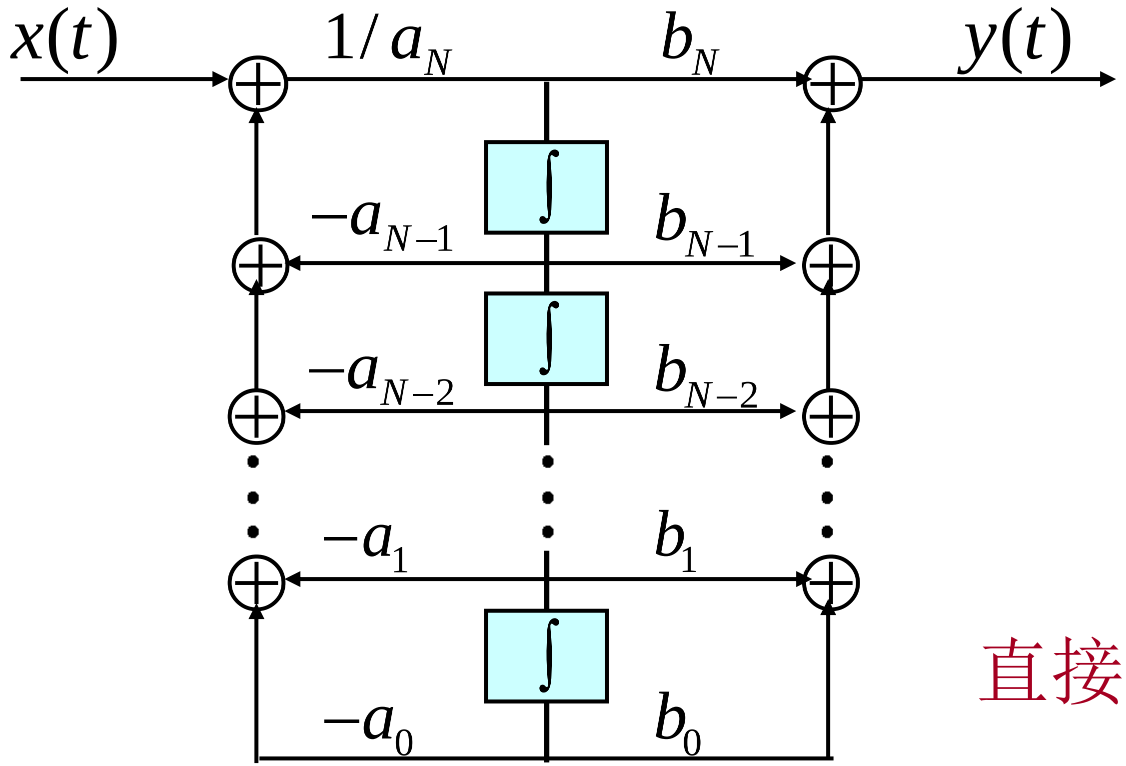
对此积分方程完全按照前面差分方程的办法即可有：

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)}_{w(t)}-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



直接I型

通过交换级联次序，合并积分器可得直接II型：



直接II型

不同的结构会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如在系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

小结（Summary）

1．信号的时域分解：$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2. LTI系统的时域分析——卷积积分与卷积和；

3．LTI系统的描述方法：

① 用 $h(t)$、$h(n)$或 $s(t)$、$s(n)$描述LTI系统；

② 用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统；

③ 用系统方框图描述系统（等同于LCCDE 描述）。

4. LTI系统的特性与 $h(t)$、$h(n)$的关系：

① 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$、$h(n)$ 的关系；

② 系统级联、并联时，$h(t)$、$h(n)$ 与各子系统之间的关系。

作业：

2.8
2.9
2.12(a)、(f)
2.16(b)
2.17(a)