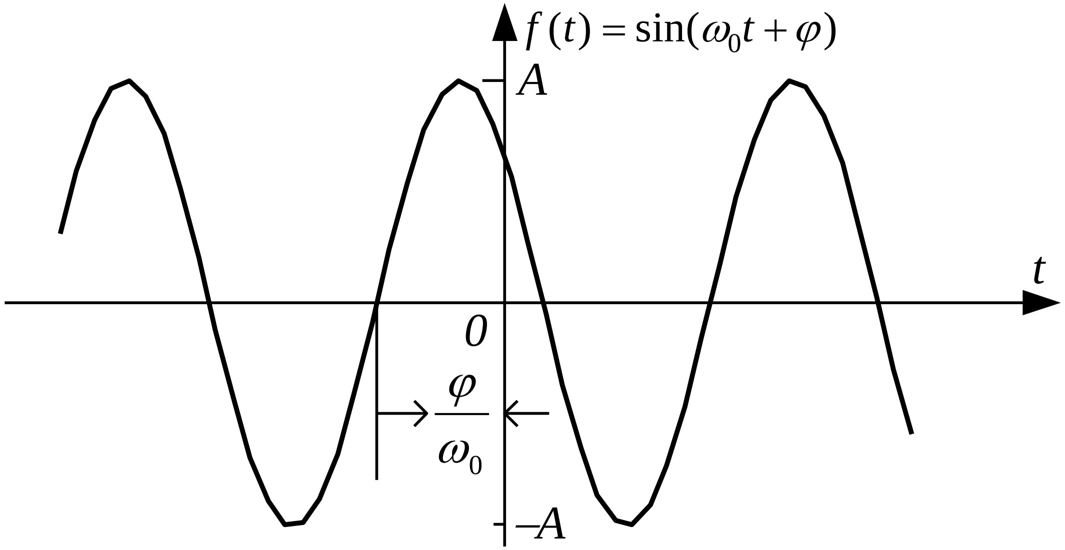
信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

本章主要内容：

- 连续时间傅里叶级数及其性质
- 连续时间傅里叶变换及其性质
- 周期信号和非周期信号的频谱分析
- 连续时间LTI系统的频域分析
- 采样和采样定理

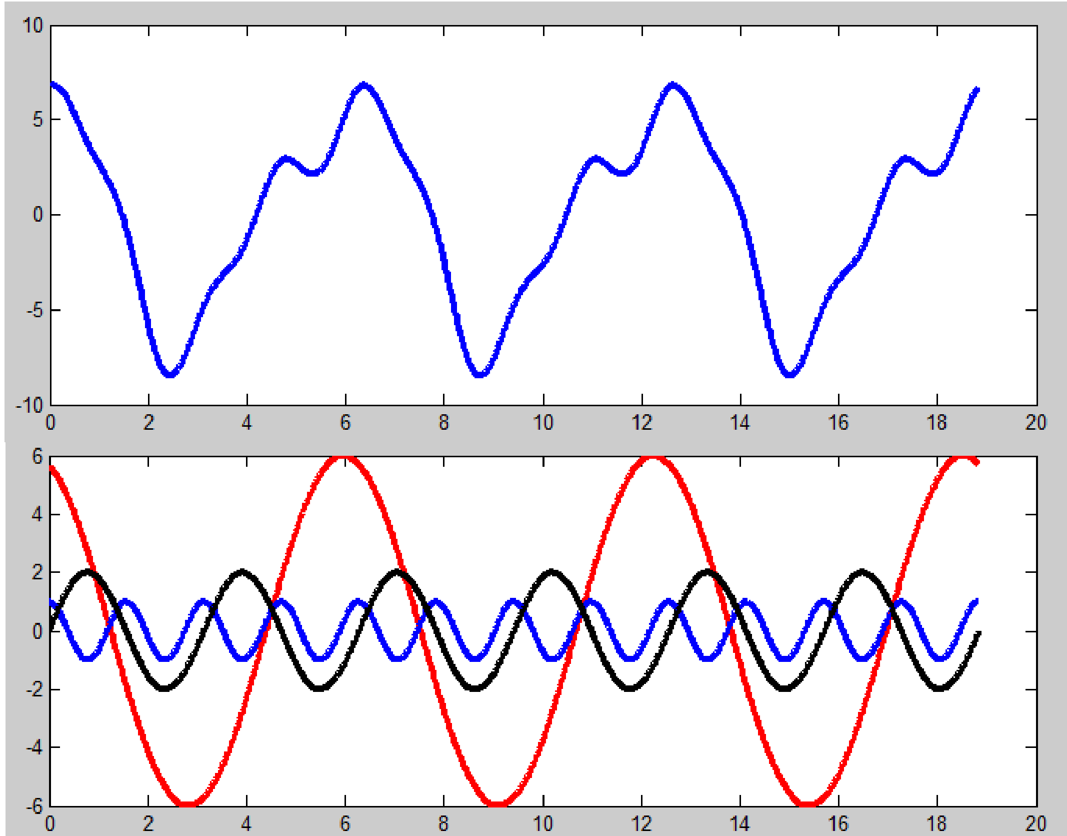


在时域无限长

用三个参数就可以描述

$$f(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

A: 振幅　　ω_0:角频率　　φ:初始相位



任何连续周期信号可以由一组适当的正弦曲线组合而成?

1807年提出

Joseph Fourier(1768-1830), 法国数学家/物理学家

傅里叶的生平：

约瑟夫 • 傅里叶

- 1768年生于法国,数学家。
- 1807年提出“任何周期函数都可用正弦函数级数表示”
- 拉格朗日反对发表
- 1822年首次发表在“热的分析理论”一书中
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件。
- 20世纪60年代提出了快速算法，推动了更广泛的应用。

傅里叶最主要的两个贡献——

- "周期函数都可以表示为成谐波关系的正弦函数的加权和"——傅里叶的第一个主要论点。
- "非周期函数都可以用正弦函数的加权积分表示"——傅里叶的第二个主要论点。

3.0 引言 （Introduction）

- 时域分析方法的基本思想：

1. 将信号在时域分解成$\delta(t)$或$\delta(n)$的线性组合。

2. 利用LTI系统的线性与时不变性，得出系统的响应可表示为单位冲激响应$h(t)$，或单位脉冲响应$h(n)$的线性组合—— 卷积积分与卷积和。

- 从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求：

1.具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号

2.本身简单，以便LTI系统对它的响应能简便得到

频域分析的基本思想与此相同，即：设法将任意信号分解成复指数单元信号的线性组合，利用 LTI 系统的线性与时不变性求得系统的响应。其响应应该是系统对复指数单元信号的响应的线性组合。

3.1 连续时间LTI系统的特征函数:

(The Eigenfunction of Continuous-time LTI Systems)

- 考查LTI系统对复指数信号 e^{st} 的响应

$$e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

由时域分析方法，

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

可见LTI系统对复指数信号的响应是很容易求得的。说明e^{st}符合对单元信号的第一项要求。

特征函数（Eigenfunction）

如果系统对某一信号的响应只不过是该信号乘以一个常数，则称该信号是这个系统的**特征函数**。

系统对该信号加权的常数称为系统与特征函数相对应的**特征值(eigenvalue)**。

❖ **复指数函数 e^{st} 是一切连续时间LTI系统的特征函数。** $H(s)$ 是系统与复指数信号相对应的特征值。

❖ 不同的LTI系统可能会有不同的特征函数，但**只有复指数函数才能成为一切LTI系统的特征函数。**

若：$x(t)=\sum_i a_i e^{s_i t}$ 　　则：$y(t)=\sum_i a_i H(s_i) e^{s_i t}$

可见，只要能实现将信号分解为 e^{st} 的线性组合，系统对任何信号的响应就迎刃而解了。

本章先研究 $s=j\Omega$ 时的情况。

3.2 周期信号与连续时间傅里叶级数：

（Periodic signals & Continuous-time Fourier Series）

成谐波关系的复指数信号集：$\Phi_k(t)=\{e^{jk\Omega_0 t}\}$

其中，每个信号都是以 $\dfrac{2\pi}{|k\Omega_0|}$ 为周期的，公共周期为 $2\pi/|\Omega_0|$ ，且该集合中所有信号都是彼此独立的。

如果将该信号集中所有的信号线性组合起来，有

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

显然 $x(t)$ 也以 $T_0=\dfrac{2\pi}{|\Omega_0|}$ 为周期，该级数就是**傅里叶级数**

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k e^{jk\Omega_0 t}$$

这表明：用成谐波关系的线性组合可以表示连续时间周期信号。

即:连续时间周期信号可以分解成无数许多成谐波关系的复指数信号的线性组合*。

*不是任意的周期信号都可以，但绝大多数信号可以

$k=0$ 常数项，称为信号的直流分量

$k=\pm 1$ 两项的周期为T_0, 基波频率为f_0，两项合起来称为信号的基波分量

$k=\pm 2$ 的基波频率为$2f_0$，两项合起来称为信号的2次谐波分量

$k=\pm N$ 的基波频率为Nf_0，两项合起来称为信号的N次谐波分量

一. 连续时间傅里叶级数（CFS):

（Continuous-time Fourier Series)

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$ 指数形式的傅里叶级数

若 $x(t)$ **是实信号，则：** $x(t)=x^*(t)$

$$x(t)=x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k^* e^{-jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_{-k}^* e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\dot{A}_k=\dot{A}_{-k}^* \quad \text{或} \quad \dot{A}_k^*=\dot{A}_{-k}$$

将级数改写，可得到：

$$x(t) = \dot{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} + \dot{A}_{-k} e^{-jk\Omega_0 t}]$$

$$= \dot{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} + \dot{A}_k^* e^{-jk\Omega_0 t}]$$

$$= \dot{A}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}[\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}]$$

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\theta_k}$$

$$= \boxed{\dot{A}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)}$$

CFS的三角函数形式

令 $\dot{A}_k = a_k + jb_k$ 得到另一种三角函数形式：

$$\boxed{x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\Omega_0 t - b_k \sin k\Omega_0 t)}$$

由：$\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$ 和 $\dot{A}_k = A_k e^{j\theta_k}$ 推得：

$$A_k = A_{-k} \qquad \theta_k = -\theta_{-k}$$

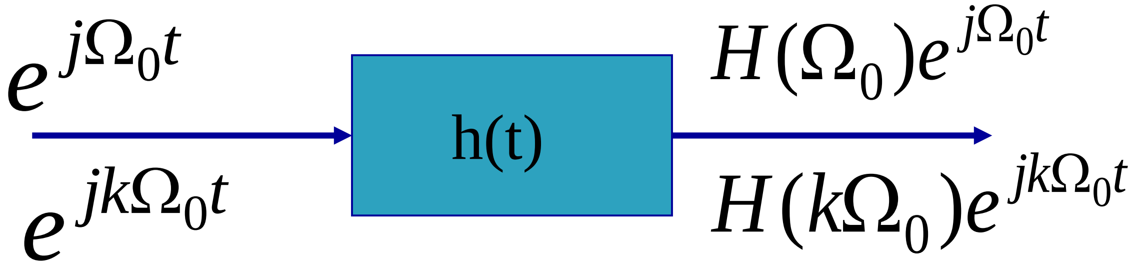
表明：$\dot{A}_k$的模是偶函数，$\dot{A}_k$的相角是奇函数。

由：$\dot{A}_k = a_k + jb_k$ 和 $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$ 推得：

$$a_k = a_{-k}, \qquad b_k = -b_{-k}$$

表明：$\dot{A}_k$ 的实部是偶函数，$\dot{A}_k$ 的虚部是奇函数。

对LTI系统，当输入周期信号时，由于



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} \longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k H(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

其中： $$H(jk\Omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

显然, $y(t)$也是一个傅里叶级数表达式, 其系数是

$$\dot{A}_k H(jk\Omega_0)$$

例3.1 某LTI系统的单位冲激响应 $h(t)=e^{-t}u(t)$

输入周期信号，可表示为 $x(t)=\sum_{k=-3}^{3}\dot{A}_k e^{j2\pi kt}$

已知 $\dot{A}_0=1, \dot{A}_1=\dot{A}_{-1}=1/2$

$\dot{A}_2=\dot{A}_{-2}=1/3, \dot{A}_3=\dot{A}_{-3}=1/4$

求 $y(t)$

解： $$y(t)=\sum_{k=-3}^{3}\dot{A}_k H(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$\Omega_0=2\pi$

$$H(jk\Omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{1+jk\Omega_0}$$

$$y(t) = 1$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j2\pi}\right)e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-j2\pi}\right)e^{-j2\pi t}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+j4\pi}\right)e^{j4\pi t} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-j4\pi}\right)e^{-j4\pi t}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+j6\pi}\right)e^{j6\pi t} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-j6\pi}\right)e^{-j6\pi t}$$

二. 傅里叶级数的系数:

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}}\qquad \Omega_0=2\pi/T_0$$

$$x(t)\cdot e^{-jn\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{j(k-n)\Omega_0 t}$$

$$\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt$$

$$\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt=\begin{cases}0 & k\neq n\\ T_0 & k=n\end{cases}$$

$$\therefore\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\dot{A}_n T_0\qquad \dot{A}_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

$$\boxed{\dot{A}_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

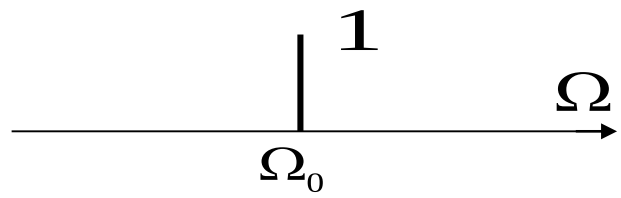
三. 频谱的概念：（Spectral）

研究 $\Phi_k(t)$中的每一个信号，它们除了成谐波关系外，每一个信号随时间 t的变化规律都是一样的，差别仅仅是频率不同。

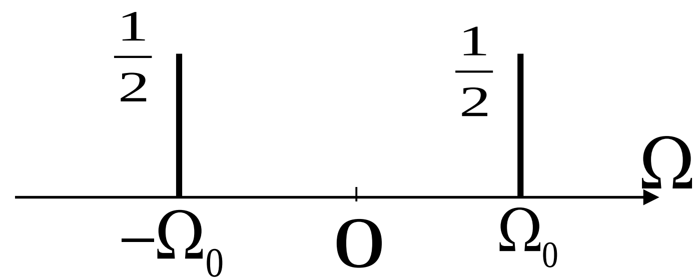
在傅里叶级数中，各个信号分量（谐 波分量）间的区别也仅仅是幅度（可以是 复数）和频率不同。

因此，可以用一根线段来表示某个分量的幅度，用线段的位置表示相应的频率。

如：分量 $e^{j\Omega_0 t}$ 可表示为



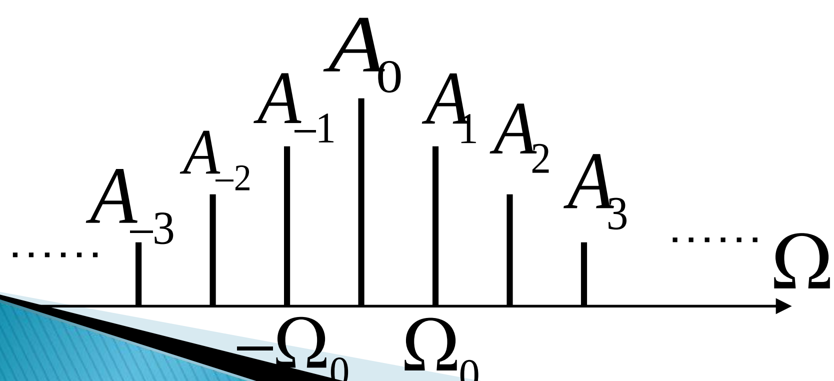
$$\cos\Omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right) \longrightarrow$$



因此，当把周期信号 $x(t)$ 表示为傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

时，就可以将 $x(t)$ 表示为

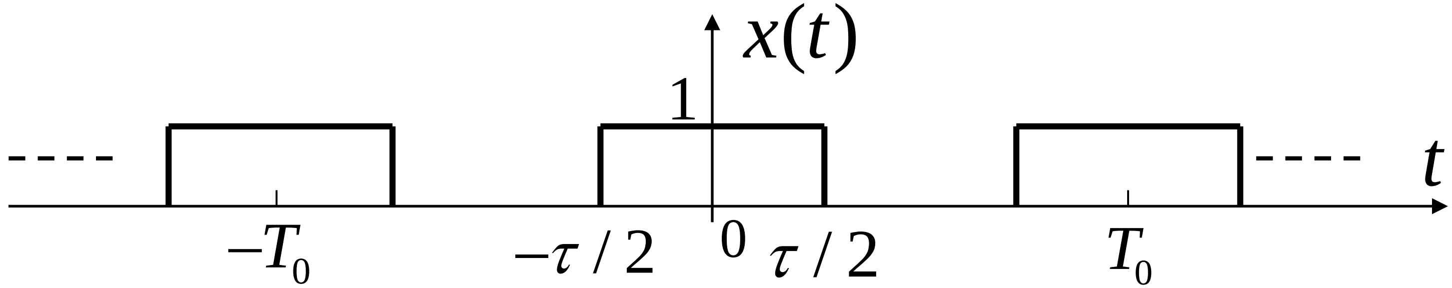


这样绘出的图称为

——频谱图

频谱图其实就是将 $\dot{A}_k$ 随频率的分布表示出来，也即 $\dot{A}_k \sim \Omega$ 的关系。由于信号的频谱完全代表了信号，研究它的频谱就等于研究信号本身。因此，这种表示信号的方法称为频域表示法。

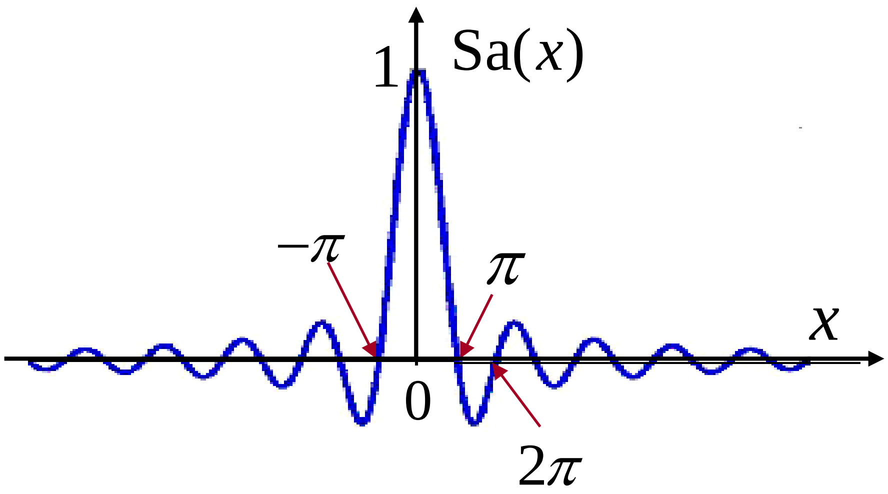
四. 周期性矩形脉冲信号的频谱:

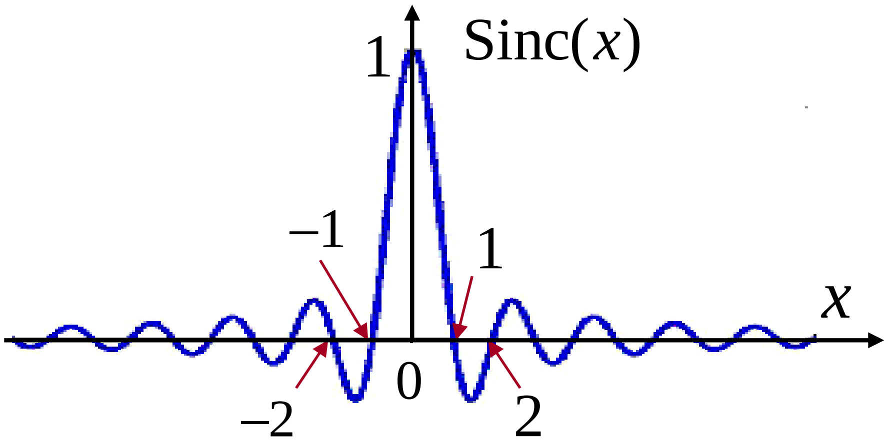


- $$A_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-jk\Omega_0 t}dt=-\frac{1}{jk\Omega_0 T_0}e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=$$

$$=\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}=\frac{\tau}{T_0}\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)=\frac{\tau}{T_0}\mathrm{sinc}(\frac{\tau}{T_0}k)$$

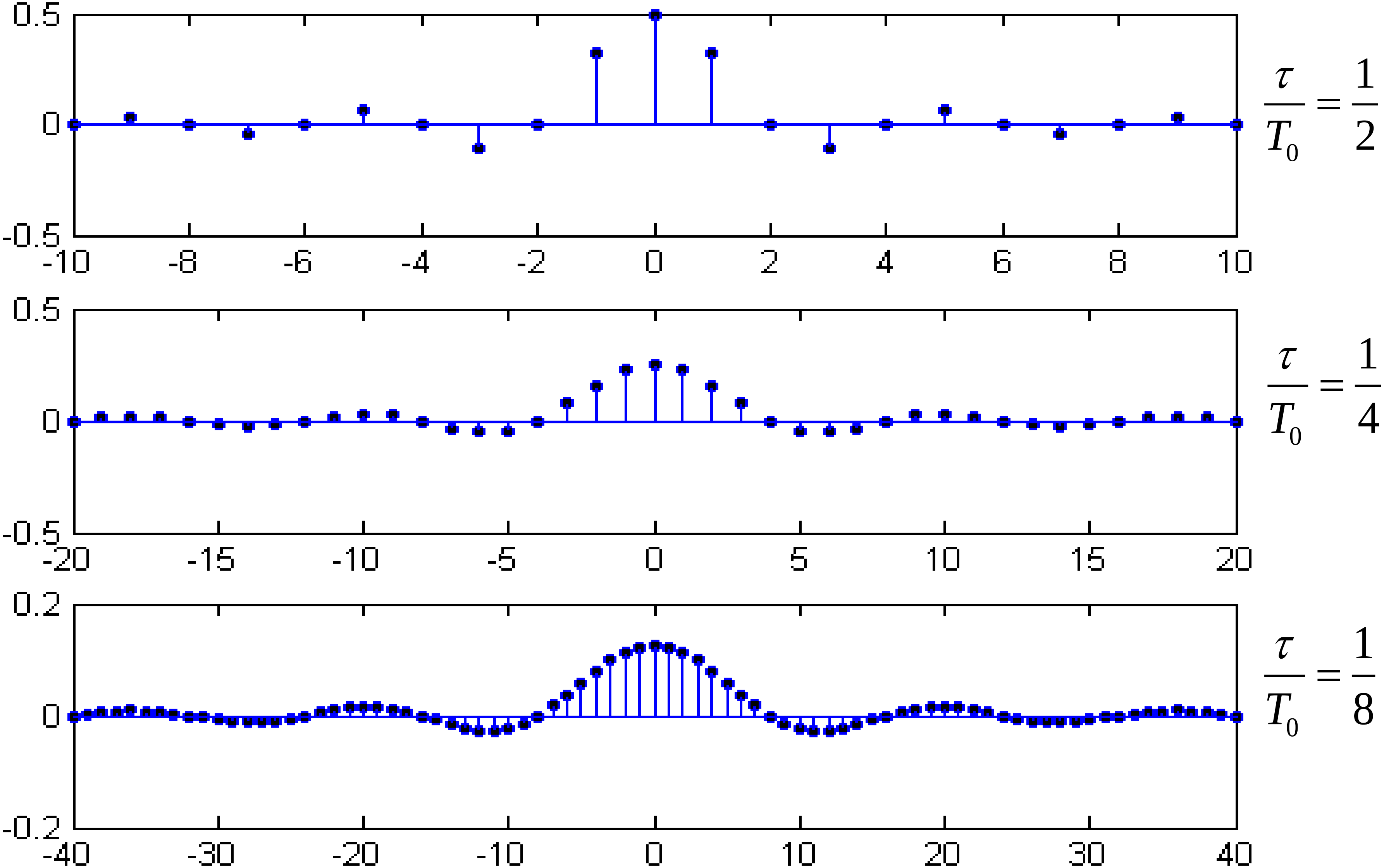
其中 $\mathrm{Sa}(x)=\frac{\sin x}{x}$　　$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$



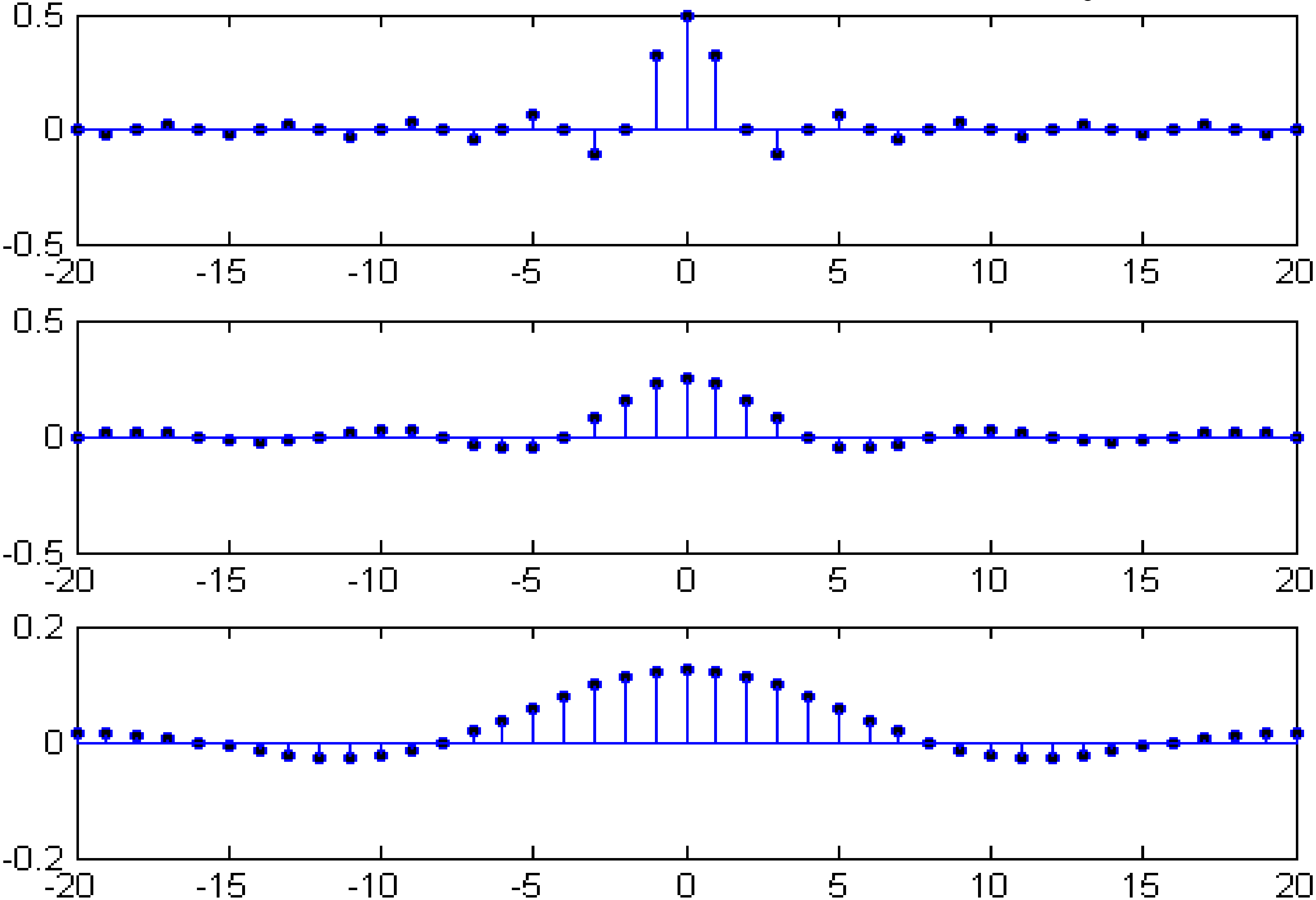


根据 $\dot{A}_k$ **可绘出**$x(t)$ **的频谱图。**$\dfrac{\tau}{T_0}$ **称为占空比。**

τ 不变 $T_0 \uparrow$ 时 $\dfrac{\tau}{T_0}\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)$



T_0 不变 $\tau\downarrow$ 时 $\dfrac{\tau}{T_0}\mathrm{Sa}(k\Omega_0\tau/2)$



$$\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\tau}{T_0}=\frac{1}{8}$$

周期性矩形脉冲信号的频谱特征：

1. 离散性　2. 谐波性　3. 收敛性

考查周期 T_0 和脉冲宽度 τ 改变时频谱的变化：

1. 当 τ 不变，改变 T_0 时，随 $T_0\uparrow$ 使占空比减小，谱线间隔变小，幅度下降。但频谱包络的形状不变，包络主瓣内包含的谐波分量数增加。

2. 当 τ 改变，T_0 不变时，随 $\tau\downarrow$ 使占空比减小，谱线间隔不变，幅度下降。频谱的包络改变，包络主瓣变宽。主瓣内包含的谐波数量也增加。

五. 信号对称性与傅氏级数的关系:

对实信号 $x(t)$，有 $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$

1 若 $x(t) = x(-t)$ 则:

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{-jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{-k} e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$\therefore \dot{A}_k = \dot{A}_{-k}$ 表明 $\dot{A}_k$ 关于 k 是偶对称的;

由于 $\dot{A}_k^* = \dot{A}_{-k}$ $\therefore \dot{A}_k = \dot{A}_k^*$ 表明 $\dot{A}_k$ 是实函数。

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos k\Omega_0 t dt$$

② 若 $x(t)=-x(-t)$ 则： $\dot{A}_k=-\dot{A}_{-k}$ $\dot{A}_k=-\dot{A}_k^*$

表明 $\dot{A}_k$ 关于 k 是奇对称的，且是纯虚数。

$$\dot{A}_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt=-j\frac{2}{T}\int_0^{T/2}x(t)\sin k\Omega_0 t\,dt$$

③ $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$

$\updownarrow$

$\dot{A}_k=a_k+jb_k$ 则有：

$$x_e(t)\leftrightarrow a_k,\qquad x_o(t)\leftrightarrow jb_k$$

实信号的偶部对应于 $\dot{A}_k$ 的实部；奇部对应于 $\dot{A}_k$ 的虚部。

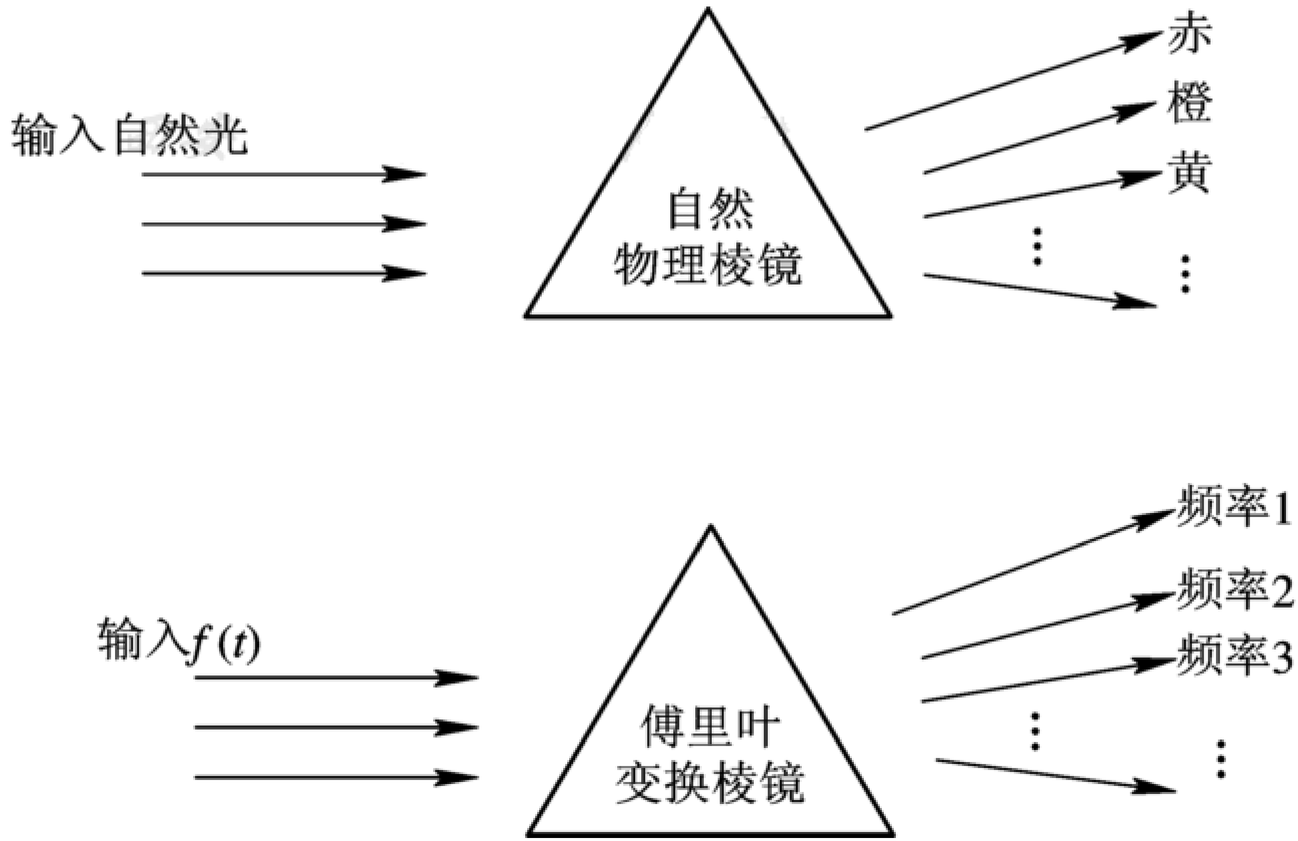


图 两种不同的棱镜

傅里叶级数的基本性质

- **线性特性** 若$x(t) \leftrightarrow \dot{A}_k$，　$y(t) \leftrightarrow \dot{B}_k$

$$则 f(t) = ax(t) + by(t) \leftrightarrow a\dot{A}_k + b\dot{B}_k$$

- **时移特性**

$$若 x(t) \leftrightarrow \dot{A}_k$$

$$则 x(t\text{-}t_0) \leftrightarrow a\dot{A}_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$$

$$证: \frac{1}{T}\int_T x(t\text{-}t_0)e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\Omega_0(\tau+t_0)}d\tau$$

$$= e^{-jk\Omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\Omega_0\tau}d\tau$$

傅里叶级数的基本性质

- 时域翻转

$$若x(t) \leftrightarrow \dot{A}_k$$

$$则x(-t) \leftrightarrow \dot{A}_{-k}$$

- 时域尺度变换

$$若x(t) \leftrightarrow \dot{A}_k \qquad \Omega_0$$

$$则x(at) \leftrightarrow \dot{A}_k \qquad a\Omega_0$$

证： $$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{B}_k e^{jka\Omega t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{B}_k e^{jk\Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega t}$$

傅里叶级数的基本性质

➢ 信号相乘

$$若x(t) \leftrightarrow \dot{A}_k,\ \ y(t) \leftrightarrow \dot{B}_k,且周期相同$$

$$则x(t)y(t) \leftrightarrow \dot{A}_k * \dot{B}_k$$

➢ 共轭对称

$$若x(t) \leftrightarrow \dot{A}_k$$

$$则x^*(t) \leftrightarrow \dot{A}^*_{-k}$$

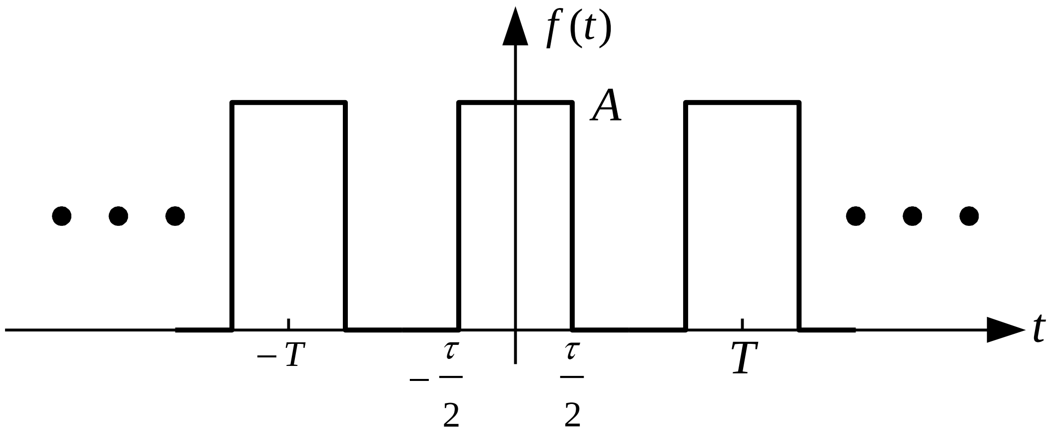
帕斯瓦尔(Parseval)功率守恒定理

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{A}_k|^2$$

- **物理意义：**任意周期信号的平均功率等于信号所包含的直流、基波以及各次谐波的平均功率之和。

■ 周期信号的功率频谱：$|\dot{A}_k|^2$随$n\omega_0$分布情况称为周期信号的功率频谱，简称功率谱。

例　试求周期矩形脉冲信号在其有效带宽(0~2π / τ)内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。其中A=1，T=1/4，τ=1/20。



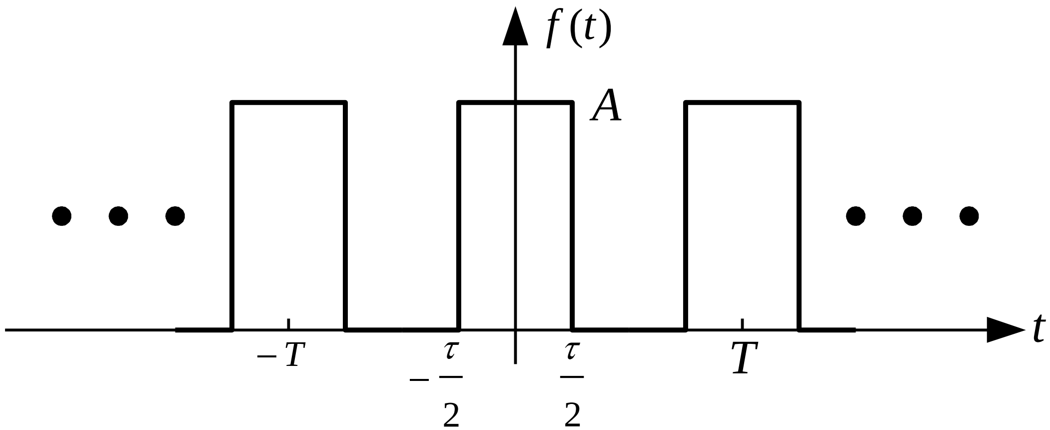
解：　周期矩形脉冲的傅里叶系数为

$$C_n = \frac{A\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

将A=1，T=1/4，τ = 1/20，ω_0= 2π/T = 8π 代入上式

$$C_n = 0.2\,\mathrm{Sa}(n\omega_0/40) = 0.2\,\mathrm{Sa}(n\pi/5)$$

例 试求周期矩形脉冲信号在其有效带宽$(0\sim2\pi/\tau)$内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。其中A=1，T=1/4，τ=1/20。



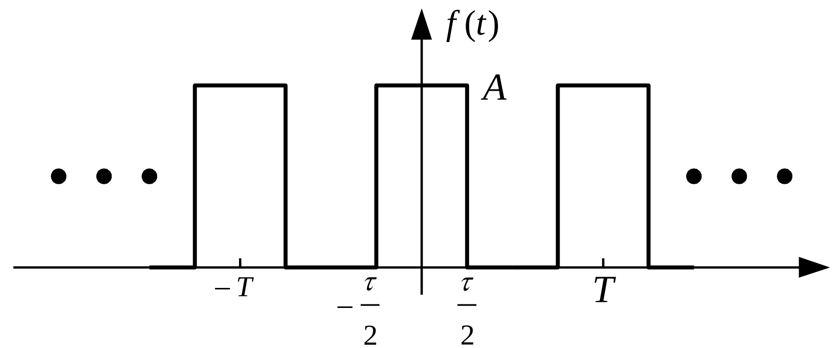
解： 信号的平均功率为 $P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)\mathrm{d}t=0.2$

包含在有效带宽$(0\sim2\pi/\tau)$内的各谐波平均功率为

$$P_1=\sum_{n=-4}^{4}|C_n|^2=C_0^2+2\sum_{n=1}^{4}|C_n|^2=0.1806$$

$$\frac{P_1}{P}=\frac{0.1806}{0.200}=90\%$$

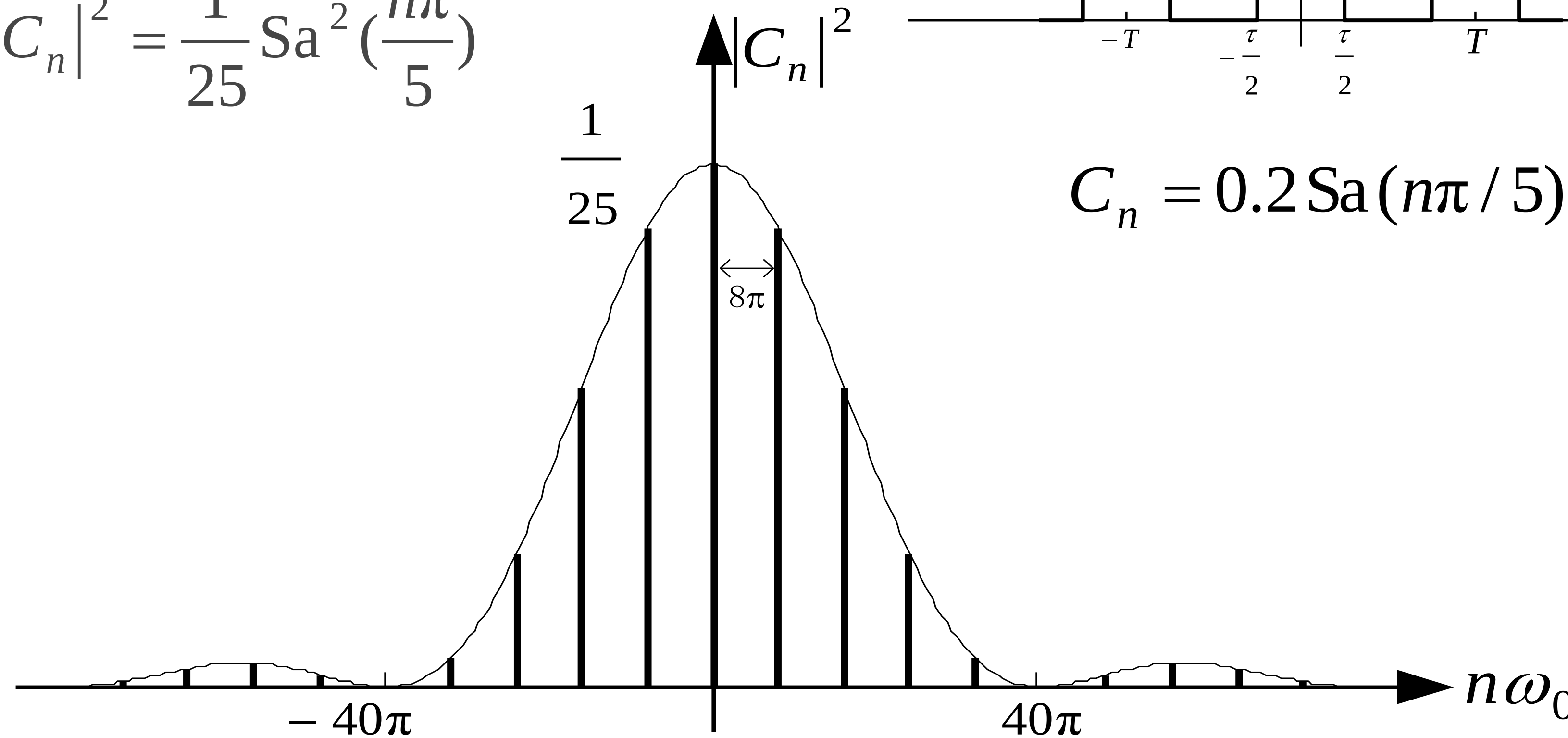
例 试求周期矩形脉冲信号在其有效带宽(0~2π/τ)内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比。其中A=1，T=1/4，τ=1/20。



周期信号的功率谱

$$|C_n|^2 = \frac{1}{25}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

$$C_n = 0.2\,\mathrm{Sa}(n\pi/5)$$



例 $f(t)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+4+3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}$

求$f(t)$的功率。

解： 1）

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2$$

$$C_0=4\qquad C_{\pm1}=3\qquad C_{\pm2}=2$$

$$P=2^2+3^2+4^2+3^2+2^2=42$$

2）

$$f(t)=4+6\cos\omega_0 t+4\cos 2\omega_0 t$$

$$P=4^2+\frac{1}{2}\times6^2+\frac{1}{2}\times4^2=42$$

作业：

3.2(a) (e)

3.3(a)

3.4(a)(b)

3.6(a) (e)